



Zprávy o zasedání královské české společnosti nauk

Königlich-Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften. Třída matematicko-přírodovědecká

SITZUNGSBERICHTE

DER KGL. BÖHM.

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-

NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

1907.

VĚSTNÍK

KRÁLOVSKÉ ČESKÉ SPOLEČNOSTI NÁUK.

TŘÍDA

MATHEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÁ.



VĚSTNÍK

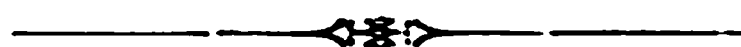
KRÁLOVSKÉ

ČESKÉ SPOLEČNOSTI NÁUK.

TŘÍDA MATHEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÁ.

ROČNÍK 1907.

OBSAHUJE 26 ROZPRAV, S 6 TABULKAMI A 71 OBRAZCI V TEXTU.



V PRAZE 1908.

NÁKLADEM KRÁLOVSKÉ ČESKÉ SPOLEČNOSTI NÁUK

V KOMMISSI U FR. ŘIVNÁČE.

SITZUNGSBERICHTE

DER KÖNIGL. BÖHMISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

JAHRGANG 1907.

ENTHÄLT 26 AUFSÄTZE MIT 6 TAFELN UND 71 TEXTFIGUREN.

PRAG 1908.

VERLAG DER KÖNIGL. BÖHM. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI FR. ŘIVNÁČ.

Seznam přednášek
v sezeních třídy mathematicko-přírodovědecké.

Dne 11. ledna:

Prof. Dr. J. L. Barvíř: O některých spojujících členech rovných řad prvků.

Dne 8. února:

Doc. Dr. Jar. Milbauer: O výrobě jodu z matečných louhů při výrobě inversního ledku.
Dr. J. Jelínek: O rozkladu gelatiny plísněmi.

Dne 22. února:

Prof. Dr. J. L. Barvíř: Poznámky o jižní části kutného okrsku kutnohorského.

Dne 8. března:

Pan M. Servít: První seznam lišejníků Čech, Moravy a Slezska.

Dne 12. dubna:

P. Viktor Teissler: O vnitřním tření solných roztoků.
Prof. V. Řehořovský: Nový způsob sestrojení těžiště čtyrúhelníka.

Übersicht der Vorträge

in den Sitzungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe.

Den 11. Januar:

Prof. Dr. H L. Barvíř: Ueber einige Verbindungsglieder bei den geraden Elementenreihen.

Den 8. Februar:

Doz. Dr. Jar. Milbauer: Studien über die Jodproduction aus den Mutterlaugen bei der Fabrikation des Konversionssalpeters.

Dr. J. Jelínek: Ueber die Zersetzung der Gelatine durch Schimmelpilze.

Den 22. Februar:

Prof. Dr. J. L. Barvíř: Bemerkungen über den südlichen Teil des Kuttenberger Bergbaubezirkes.

Den 8. März:

Herr M. Servít: Erster Verzeichnis der Flechten Böhmens, Mährens und Schlesiens.

Den 12. April:

Herr Viktor Teissler: Über die innere Reibung der Salzlösungen.

Prof. V. Řehořovský: Eine neue Konstruktions-Methode des Schwerpunkts eines Vierecks.

Dne 26. dubna:

Vl. Heinrich: Předběžná zpráva o nové planetě v blízkosti Jupitera.

Ing. Fr. Rogel: Výsledky šetření o správnosti planimetrických konstrukcí.

Dne 10. května:

Prof. Mir. Pelíšek: O úpatnici asteroidy. (Sur la courbe podaire de l'astéroide).

Dr. St. Hanzlík: O studených a teplých anticyklonech.

Dne 14. června:

Prof. Vil. Jung: Komplanace šroubových ploch přímkových, jichž řídící kužel jest točný.

J. Straňák: Studie o temnostní floře jeskyní sloupských.

Dne 28. června:

Dr. J. Pantoflíček: Nová methoda počtu vyrovnávacího.

Prof. Dr. F. Počta: Novotiny o graptolitech.

J. Procházka: Několik pokusů o účinku mechanického chvění na koherer.

Dr. Art. Brožek: O variabilitě a lokalních formách u Palaemonetes varians.

Dne 11. října:

Prof. Dr. K. Petr: O jednom užití eliptických funkcí na theorii čísel.

Doc. Dr. B. Kučera: Radioaktivní vlastnosti půdy pražského vodovodu.

Ing. Fr. Rogel: Transformace harmonických řad $S_{2n} + 1$ a M_{2n}.

Prof. J. Sobotka: Ke konstrukci kuželoseček z bodů imaginárních.

„ Ke konstrukci hyperboloidu oskulačního ploch zborcených.

Dne 25. října:

Doc. Dr. Em. Mencl: Nové doklady k autodiferenciaci oční.

Dr. Jar. Peklo: O lokalisaci saccharosy v pletivech cukrovky.

Den 26. April:

Vl. Heinrich: Vorläufiger Bericht über einen neuen Planeten in der Nähe Jupiters.

Ing. Franz Rogel: Resultate der Untersuchungen über die Genauigkeit planimetrischer Konstruktionen.

Den 10. Mai:

Prof. Mir. Pelíšek: Sur la courbe podaire de l'astéroide.

Dr. St. Hanzlík: Über kalte und warme Antizyklone.

Den 14. Juni:

Prof. Vil. Jung: Die Komplanation der linearen Schraubenflächen mit tangentialem Richtungskegel.

J. Straňák: Über die Dunkelflora der Slauper Höhlen.

Den 28. Juli:

Dr. J. Pantoflíček: Eine neue Methode der Ausgleichsrechnung.

Prof. Dr. F. Počta: Neues über Graptolithen.

J. Procházka: Einige Versuche über die Wirkung der mechanischen Schwingung auf den Kohaerer.

Dr. Art. Brožek: Über die Variabilität und Lokalformen von Palaemonetes varians.

Den 11. Oktober:

Prof. Dr. K. Petr: Über eine Anwendung der elliptischen Funktionen auf die Zahlentheorie.

Doz. Dr. B. Kučera: Radioaktive Eigenschaften des Bodens der Prager Wasserleitung.

Ing. Fr. Rogel: Transformation harmonischer Reihen $S_{2n}+1$ und M_{2n}.

Prof. J. Sobotka: Zur Konstruktion von Kegelschnitten aus imaginären Punkten.

„ „ Zur Konstruktion des Oskulationshyperboloid von Regelflächen.

Den 25. Oktober:

Doz. Dr. Em. Mencl: Neue Belege zur Autodifferenziation des Auges.

Dr. Jar. Peklo: Über die Lokalisation der Saccharose in den Geweben der Zuckerrübe.

Dne 22. listopadu:

Dr. Jar. Wenig. O nových smyslových orgánech slepých isopodů.
Ing. Fr. Rogel: O počtech Bernouillibo a Eulerových.

Dne 6. prosince:

Doc. Dr. F. Studnička: Exoplasma neb Metaplasma.
Doc. Dr. J. Milbauer & O. Quadrát: Studie o síranu železitém.
V. Heinrich: Badání o dráze druhé planety skupiny Jupitera (617) Patroclus.

Den 22. November:

Dr. Jar. Wenig: Über neue Sinnesorgane blinder Isopoden.
Ing. Fr. Rogel: Über die Bernouillschen und Eulerschen Zahlen.

Den 6. Dezember:

Doz. Dr F. Studnička: Exoplasma oder Metaplasma.
Doz. Dr. J. Milbauer & O. Quadrát: Studien über Eisensulphat.
Vl. Heinrich: Untersuchungen über die Bahn des zweiten Planeten der Jupitergruppe (617) Patroclus.

I.

Über einige Verbindungsglieder bei den geraden Elementen-Reihen.

Von Prof. Dr. **Heinrich Barvíř** in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Januar 1907.)

Der Zweck der folgenden Zeilen ist auf die Bedeutung der Lage einiger Glieder der letzten Elementen-Reihen bezüglich ihrer Atomgewichts- und der für den festen Zustand geltenden Dichten-Zahlen hinzuweisen, u. zwar bei Th, Pb, Bi, Tl, Au, Pt und U.

Thorium, ein Metall der Zinngruppe, liefert bekanntlich ein vierwertiges Ion, Blei zumeist ein zweiwertiges oder ein vierwertiges, Platin erscheint in seinen Verbindungen gewöhnlich vierwertig oder zweiwertig, Uran meist sechswertig oder vierwertig, mitunter drei-, fünf- oder achtwertig, Gold und Thallium gewöhnlich ein- oder dreiwertig, Wismut zumeist dreiwertig; letzteres bildet aber auch das Pentoxyd Bi_2O_5 und ausserdem scheinen bei demselben und bei einigen von den früher genannten Elementen noch andere Wertigkeiten vorzukommen.

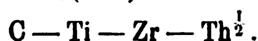
1. Nimmt man für C als mittlere Dichtenzahl im festen Zustande (von Diamant und Carbonado) $d = 3{\cdot}33$ an, so resultiert für Th aus der geraden Reihe C — Ge mittelst der *Const.* 0·035 als d etwa 11·05. Diese Reihe enthält die Elemente



$$C - Si_2^2 - Ge - Sn - Th.$$

Die Richtung Th — Pb zielt in die Nähe von Ru. Die Richtung Ce — Th ist beinahe, falls nicht genau, || zu der R. Ti — Sn — Pb.

Bei halber Dichtenzahl (5·53) fällt Th in die Reihe C — Zr:



$$C - Ti - Zr - Th^{\frac{1}{2}}.$$

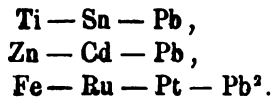
Die Glieder der beiden in C zusammentretenden Reihen stehen insgesamt in solchen Beziehungen, dass sie miteinander und mit verwandten Elementen wieder gerade Reihen bilden, z. B. Ge — Zr — Ti_2 — Si_4, Si_2 — Zr — Ce, Ti — Sn — Pb u. s. w. Ce fällt wohl als $Ce_{\frac{1}{2}}$ in die Reihe C — Zr ($Zr_{\frac{1}{2}}$ in die Linie C — Ce?). In die Reihe Si_2 — Zr — Ce dürfte Th als $Th^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}$ fallen, welches anderseits in die Linie Be — Sr passt.

Gerade verlaufen wahrscheinlich auch die Reihen Os — Pt — Th und Os — Ir — Th^2.

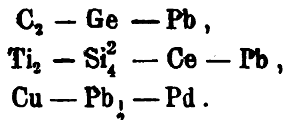
Bei halber Dichtenzahl fällt aber Th zugleich auch in die Richtung der zweiwertig sich verhaltenden Erdalkalimetalle Mg und Ba: Mg — Ba — $Th^{\frac{1}{2}}$.

Bei der Dichtenzahl $2{\cdot}76 = \frac{d}{4}$ passt Th fast in die Linie Na — Cs.

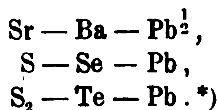
2. Pb erscheint als Glied folgender, wahrscheinlich geraden Reihen:


Ti — Sn — Pb,
Zn — Cd — Pb,
Fe — Ru — Pt — Pb^2.

Möglicherweise verlaufen gerade auch die Reihen


C_2 — Ge — Pb,
Ti_2 — Si^2_4 — Ce — Pb,
Cu — $Pb_{\frac{1}{2}}$ — Pd.

Mindestens angenähert gerade wären die Reihen


Sr — Ba — $Pb^{\frac{1}{2}}$,
S — Se — Pb,
S_2 — Te — Pb. *)

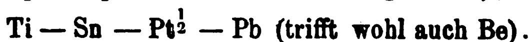
Die Richtung Na — $Pb^{\frac{1}{4}}$ ist beinahe || zu d. R. Li — Cs und scheint mit der Reihe Ca_2 — Mg_4 — Sr_2 zusammenzufallen.

*) Die Richtung Ba — Sr trifft auch Na und Li. Li erinnert in der Tat in chemischer Beziehung einigermassen an die Erdalkalimetalle, während Na wieder in der Natur häufig, ja in den Plagioklasen in der Regel mit Ca vergesellschaftet vorkommt. — In die gerade Reihe S^2_2 — Se — Te würde O bei d im festen Zustande = circa 2·4 fallen.

3. Wahrscheinlich gerade Reihen für Pt:


Fe — Ru — Pt,


Fe_2 — Ni_2 — Pt? (mindestens angenähert),

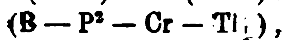

Ti — Sn — $Pt^{\frac{1}{2}}$ — Pb (trifft wohl auch Be).

Möglicherweise verläuft gerade auch die R. Sr — Ba — $Pt^{\frac{1}{4}}$.

Die Richtung Na — $Pt^{\frac{1}{8}}$ fällt wohl mit der Reihe Na — $Pb^{\frac{1}{4}}$ zusammen, ist also wahrscheinlich || zu d. R. Li — Cs.

4. Für Tl:


B — (As —) In — (Ta —) Tl,

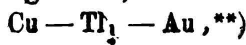

(B — P^2 — Cr — $Tl_{\frac{1}{2}}$),


Cu — $Tl_{\frac{1}{2}}$ — Au.

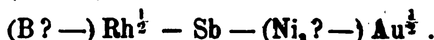
$Tl^{\frac{1}{2}}$ steht nahe der Reihe Li — Na, noch näher $Tl^{\frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}}$, welche Erscheinung in Bezug auf die spektroskopischen Linien dieser drei Elemente interessant sein dürfte.

5. Für Au:


Ag — Au,

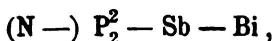

Cu — $Tl_{\frac{1}{2}}$ — Au,**)


(Ni? —) Rh — Sb^2 — Au,


(B? —) $Rh^{\frac{1}{2}}$ — Sb — (Ni_3? —) $Au^{\frac{1}{2}}$.

An gewisse Analogien zwischen einigen Verbindungen von Au, Sb und B hat man schon längst hingewiesen.

6. Für Bi:


(N —) P_2^2 — Sb — Bi,


As — Ni_3 — Bi (*Const.* etwa 0·03),


Y — La — Bi,

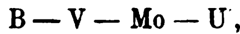

V — Ga — Bi


Nb — In — Bi } mindestens angenähert,


B — Y — $Bi^{\frac{1}{2}}$.

**) In meinem Aufsatze „Über gegenseitige Distanzen einiger geraden Reihen von Elementen" (diese Sitzb. 1906, Nro. XXVIII.) S. 5, Zeile 4 v. u. soll Cu anstatt C stehen. — S. 11, Z. 10 v. u. ist hinter Na zu setzen: „sowie die Entstehung von elektrisch sich entgegengesetzt verhaltenden Elementen (wie etwa bei elektrolytischen Vorgängen), ferner das eventuelle Fehlen von einigen Elementen in der Sonne."

7. Für U:


$B - V - Mo - U$,


$Cr - Mo_2 - U_4$,


$(Cr - Mo - W_2)$,


$Pb_{\frac{1}{2}} - Pd - U$.

Uran schliesst sich mit Wolfram und Molybdän in manchen Eigenschaften dem Chrom an. Chrom ist seinerseits auch mit der Eisengruppe verwandt, und auch für Uran erhält man eine vielleicht gerade Reihe $Fe^2 - U - Pt_2$, welche Andeutungen an seine eventuelle höhere Wertigkeit enthalten dürfte. Ausserdem liegt $U^{\frac{1}{2}}$ sowohl von der Linie $C - Ce$, als auch von der Reihe $P^2 - As - Sb$ kaum allzuweit entfernt.

Aus der gegebenen Übersicht ist zu ersehen, dass die durch die Atomgewichts- und durch die für den festen Zustand geltenden Dichten-Zahlen bestimmte Lage der eingangs genannten Glieder der letzten Elementen-Reihen sich gegen die Lage mancher anderen Elemente, hauptsächlich in Bezug auf die entsprechenden Valenzverhältnisse, z. T. auch in Bezug auf andere Eigenschaften als deutlich symmetrisch oder gesetzmässig erweist. — Bei weiterem Vergleichen scheinen in einigen Fällen, z. B. bei Pt, auch Andeutungen einfacher Beziehungen zwischen dem isolierten Element im festen Zustande und seinen Ionen-Modifikationen hervorzutreten.

II.

O zpracování matečných louhů po výrobě konversního ledku.

(S 1 vyobr. v textu.)

Podává
docent Dr. Jaroslav Milbauer.

Předloženo 8. února 1907.

U příležitosti studia v jedné rakouské chemické továrně měl jsem příležitost pozorovat při sváření zadních louhů po výrobě konversního ledku, jakýchsi „melass", tekutin barvy hnědé, alkalicky zřejmě reagujících a obsahujících značné množství jodových derivátů, že vybavoval se z nich jod ve formě elementární, který obtěžoval tak dělnictvo, že manipulace byla velice ztížena.

Podjal jsem se úkolu vyzkoumati, co je příčinou tohoto zjevu, a všíml jsem si také i dalšího zpracování louhů matečných s ohledem na jod po stránce technické.

Obraťme nejprve pozornost svoji ku

složení matečních louhů odpadních.

Po několikanásobném svaření louhů, které vznikly působením chloridu draselnatého (Stassfurt) na ledek čilský a které skytají surový produkt, jenž znovu vrací se do rozpouštění, resultují hnědé tekutiny o hustotě až 1,5. V továrně dotyčné snažili se odkuřováním získati i z těchto louhů v nich obsažený ledek, avšak vyznačené potíže, mimo jinou dosti důležitou závadu, že nádoby kovové byly rozleptávány, vedly ku přímému využitkování jodu.

Při kvalitativním zkoušení zjistil jsem známými cestami analytickými jakožto hlavní složky následující

kationty: $K^{\cdot}$, $Na^{\cdot}$, $Mg^{\cdot\cdot}$, $Ca^{\cdot\cdot}$, $Al^{\cdot\cdot\cdot}$,
anionty: Cl', J', JO_3', SO_4'', NO_3', CO_3''.

Ve sledech nalezeny:

kationty: $Fe^{\cdot\cdot\cdot}$, $Mn^{\cdot\cdot}$, $Li^{\cdot}$, $Cs^{\cdot}$, $Rb^{\cdot}$,
anionty: Br', BO_3''', PO_4'''.

Dále přítomen jest jodoform, volný jod a organické látky.

Tekutina dlouhým stáním usazuje mocnou ssedlinu, varem vylučuje krystalinickou směs a při zkoncentrování as na polovic unikají hojné fialové páry.

Při jisté koncentraci nastává pěnění a vyloučení jodu dostoupí maxima. Jemná žlutá suspense nedá se ani nejhustším materiálem filtračním zachytiti. Po dlouhé době klidu se usadila a zjištěno pak, že skládá se ze zás. solí železnatých, hlinitých a hořečnatých.

Analysou kvantitativní nalezeno v tekutině v 1 litru:

Louh I.	Louh II.	
580,82 *g*	547,23 *g*	pevných látek, z nich
0,5 „	0,685 „	nerozpustných
317,19 „	259,320 „	$NaCl$
16,74 „	51,730 „	KCl
138,30 „	105,570 „	KNO_3
sledy	0,641 „	KBr
2,28 „	8,544 „	KJ
14,33 „	0,251 „	KJO_3
10,02 „	6,415 „	$MgSO_4$
sledy	0,911 „	$CaSO_4$
„	3,704 „	$Al_2(SO_4)_3$
„	0,366 „	$Fe_2(SO_4)_3$
80,06 „	7,759 „	K_2SO_4
sledy	0,025 „	CHJ_3
10,35 „	6,695 „	veškerého jodu
0,25 „	0,630 „	CO_3.

Zbytek přísluší na organické látky.

Nápadné jest malé množství jodičnanu oproti jodidu draselnatému v louhu II.

Analysy poskytovaly pro komplikovanost některé obtíže, i proto o způsobu, mnou použitém, budiž zde krátce řečeno následující:

Hliník, železo, vápník, hořčík a alkalie stanoveny obvyklým způsobem po opětovaném odkouření odměřené části matečného louhu s kyselinou solnou.

Jod vyloučitelný kyselinou z jodidu a jodičnanu stanoven titrací v roztoku octovém $^1/_{10}$ *n* sirnatanem.

Volný jod určen titrací v mediu alkalickém ($KHCO_3$) titrací $^1/_{10}$ *n* arsenanem.

Jodičnan určen $^1/_{10}$ *n* sirnatanem po přidaní nadbytku jodidu draselnatého a okyselení octovou kyselinou.

Veškery halogeny stanoveny po odkouření odměřeného objemu louhu s hydroxydem draselnatým a následovním vytavením; tavenina na to vyloužena, zředěna v určitý objem a odměřené části přidáno dusičnanu stříbrnatého a okyseleno kyselinou dusičnou. V jiném neutralisovaném podílu této tekutiny oddestilován jod po přidání určitého množství kyseliny sírové a roztoku dusanu sodnatého (viz později při analyse technického jodidu mědičnatého) a jímán do arsenanu sodnatého, obsahujícího kyselý uhličitan sodnatý, chlazeného vodou. Při destilování proháněn tekutinou buď kysličník uhličitý neb vodní pára. Z destilátu vyloučen jodid stříbrnatý a vážen. Ve zbytku po oddestilování jodu stanoven brom destilací s kyselinou sírovou a dvojchromanem draselnatým. Kombinována tedy pro stanovení bromu a jodu methoda Friedheim-Meyerova (*Zeit. f. anorg. Ch.* 1892, 417) s methodou Goochovou (*Sill. Am. J.* [3] 40 [1890] 145), kteroužto poslední jsem pozměnil, pokud se týká absorpce.

Dusičná kyselina určena dle Devardy. Na dusíkovou kyselinu vedle dusičné pátráno dle Pelleta, i stanovena gazometricky pro kontrolu dusičná kyselina, však dusíková nenalezena v měřitelném množství.

Po borové kyselině pátráno po odkouření louhu s koncentr. kyselinou sírovou, po přidání nového podílu kyseliny sírové a methylalkoholu plamennou reakcí. Nalezeny sledy.

Lithium, rubidium a cesium zahlédnuty pouze ve spektroskopu. Kalium a natrium děleny bez ohledu na lithium, kyselinou chloroplatičitou. Kyselina sírová určena obvyklou cestou.

Po perchlorové kyselině pátráno v podílu, v němž stanoveny alkalie. Určeny halogeny jednak přímo, jednak po odkouření a vytavení se sodou. Nenalezeno větší množství; kvalitativně-mikroskopická zkouška na rubidnatou sůl dle návrhu van Breukelevena, dle před-

pisu H. Fresenia a Beyerleina (Zeit. f. anal. Ch. 37, 500) nevedla k positivnímu nálezu.

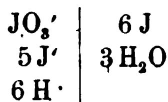
Ku stanovení jodoformu vypracován tento postup:

Přidáno k odměřenému objemu louhu něco zředěné kyseliny solné a stitrováno sirnatanem do odbarvení, na to tekutina extrahována čistým sirouhlíkem. Extrakty slity na váženou misku, sirouhlík odkouřen a zbytek vyloužen několika *cc* horké vody a po překrystalování z líhu a vysušení v exsikatoru vážen. Zbytek prozrazuje svým zápachem a reakcí dle Lustgartena*) jodoform.

Aby mohla být určena alkalita, jež zaviněna je přítomností uhličitanu, musela být hnědá barva louhů, jež způsobena je volným jodem, „neutralisována" sirnatanem sodnatým, pak teprv mohlo být zkoušeno vhodnými indikatory; osvědčily se lakmus a alizarin. Methoda kontrolována slepým pokusem.

Na to přikročeno ku ***stanovení ztrát jodu při svá̌ření i ku vyhledání příčiny této kalamity.***

Samotný zjev, pozorovaný v továrně nebylo možno ihned si vysvětliti; nemohl být způsobován vylučováním jodu z jodidu a jodičnanu dle známé reakce:



jež vyžaduje jistou koncentraci volných iontů vodíkových, neboť zde louhy vlastní alkalitu vykazují, která pak vzniká tím, že při svá̌ření přidává se soda v potřebném množství vždy však o něco větším než theoretickém ku srážení solí těžkých kovů.

V laboratoři vedeny pokusy hlavně dvěma směry a předloženy tyto otázky:

Jak mnoho jodu při svá̌ření maximálně uniká?

Zda uměle dle analysy pořízený roztok jeví touž vlastnost?

Ku zodpovědění první otázky zdestilováno větší množství louhu a unikající jod kvantitativně stanoven. Jako přístroj destilační sloužila frakční baňka z jenského skla, do jejíhož hrdla zabroušena byla dělicí nálevka. Trubice odvádějící destiláty byla přitavena pokud možno nejníže, šikmo vzhůru zahnuta, na konci pak rovně dolů převedena v široký záhrus, který těsnil do Volhardovy absorberky,

*) Lustgarten (Monatsh. 3, 717) nachází jodoform takto; Přidá malé množství fenolu a louhu k alkoholickému roztoku jodoformu a zahřívá opatrně. Vyloučí se červená ssedlina, která se rozpouští v nadbytku alkoholu karminově.

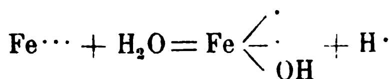
k níž natavena *U* trubice. Do Volhardovy předlohy dán koncentrovaný roztok arsenanu sodnatého (100 *cc*), nádoba chlazena vodou a do *U* trubice dáno několik *cc* téhož roztoku. Destilováno 500 *cc* matečného ledkového louhu. Když zkoncentrováno as na $^{2}/_{3}$, tu počíná volný vývoj jodu, dostoupí-li koncentrace $^{1}/_{2}$, tekutina mocně pění, vylučuje krystaly a hojně uniká jod. Jakmile pěna dostoupila až skoro ku trubici postranní, tu doplněna dělící nálevkou horkou vodou na původní volum a svářeno znovu. V jímadle obsažené destiláty sraženy dusičnanem stříbrnatým, okyseleny dusičnou kyselinou a sražený jodid stříbrnatý filtrován váženým Goochovým tyglíkem, promyt zředěnou kyselinou dusičnou, horkou vodou, amoniakem, horkou vodou, lihem, na to vysušen a vážen.

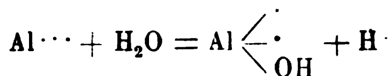
Uniklo 2,93 *g* J, t. j. 44% veškerého jodu. Tekutina po oddestilování jodu ztratila svoji alkalitu.

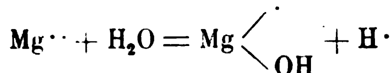
Dle analys jest vidno, že integrujícími součástkami louhů jsou:

chlorid sodnatý,
dusičnan draselnatý,
jodid draselnatý
jodičnan draselnatý,
síran hořečnatý,
síran draselnatý,
jodoform a organické látky.

Zprvu domníval jsem se, že unikání jodu dalo by se vysvětliti hydrolysou*) železitých, hlinitých, i snad hořečnatých solí dle schemat:







a dalším účinkem volných iontů vodíkových na směs jodičnanu a jodidů dle rovnice svrchu naznačené, avšak malá množství těchto solí, jak i pouhý výpočet dle těchto rovnic poukazuje, nedávají taková velká množství jodu. Ostatně i pokus tento předpoklad dosvědčil.

*) Hydrolysa tato jest ze stanoviska fysikálního a analytického studována; viz A. Stock, (Ber. Ber. 1900. 548). S. Moody, (Amer. Journ. of Science 1906; Zeit. f. anrg. Ch 51. 121.) a j.

V 1/2 litru destilované vody rozpuštěno:

280 *g* $NaCl$,
53 „ KNO_3,
5 „ KJ,
13 „ KJO_3,
3 „ $MgSO_4$,
4 „ K_2SO_4,

a směs destilována jako dřív louh matečný.

Zde tekutina nepění, část látek zůstává nerozpuštěna, uniká jod v množství malém. Nalezeno 0,198 *g* J, jež vzniklo hydrolysou hořečnaté soli.

Domníval jsem se dále, že snad účinkem jodoformu na tento roztok vzniká jod. I proto přidal jsem odpovídající množství jeho k našemu umělému louhu a destiloval. Přesvědčil jsem se, že nestává žádné zvláštní akce chemické, jež by měla v zápětí uvolnění jodu, vaříme-li jodoform s jodidem draselnatým neb jodičnanem draselnatým nebo se směsí, alespoň ne v době, po kterou zde destilováno.

Z pokusů je patrno, že příčina unikání jodu bude ležeti ještě jinde. A shledáno, že výjev je způsobován též přítomností organických látek, které působením vody vroucí podrobeny jsou účinné hydrolysy a v této změněné podobě pravděpodobně působí. Přímý důkaz proveden jednak následujícími zkoumavkovými pokusy:

I.	0,5 *g* KJO_3 1 *g* glukosy 10 *cc* vody	Po 5minutovém varu je roztok slabě žlutý a obsahuje volný jod
II.	0,5 *g* KJO_3 0,5 *g* KJ 1 *g* glukosy 10 *cc* vody	Totéž, roztok silněji žlutý
III.	0,5 *g* KJO_3 0,5 *g* KJ 0,5 *g* KNO_3 1 *g* glukosy 10 *cc* vody	Roztok červenohnědý

Při jiných kombinacích jodidu a jodičnanu s ostatními integrujícími součástmi louhu volný jod nepozorován.

Dále proveden důkaz tím způsobem, že vařen náš umělý roztok s glukosou a jímán unikající jod.

Umělému louhu našemu z pokusů popsaných na předchozích stránkách přidáno v prvním případě 5 *g* glukosy (úplně neutrálné) a destilováno $^1/_2$ hodiny.

Uniklo 2,76 *g* J, množství blížící se onomu, jaké skytal vlastní louh při destilaci.

V druhém případě postupováno stejně. Tu uniklo při $^1/_2$hodinné destilaci: 2,59 *g* J.

Z těchto pokusů je patrno, co je zde škodnou látkou, a také vysvětluje se, proč přídavek malého přebytku sody nebyl nic platen.

Jako další otázka zodpověděno, čím možno tyto ztráty velmi cenného jodu zabránit, aby louhy mohly být svařeny ku krystalisaci. Uvážíme-li, že poslední louhy po konečném svaření sráží se síranem měďnatým a kyselým siřičitanem sodnatým za přidání kyseliny sírové, jest samozřejmo, že přídavek siřičitanu mohl by v diskutovaném směru býti užitečným. Přesvědčil jsem se, že tomu tak jest; množstvím siřičitanu, které jest as dvojnásobné než odpovídá veškerému jodu sražitelnému ve formě jodidu mědičnatého, udržíme jod v roztoku a můžeme louhy beze ztrát zahušťovat.

Ku konci této státě musím zmíniti se o pozorování, jež učinili Dafert a Halla (Zeit. f. das landwirtsch. Versuchswesen in Oesterreich 1901) při analysách ledku. Mnohé technické vzorky tohoto materiálu měly v sobě volný jod, který dle jejich názoru z jodičnanu, v ledku vždy v sledech obsaženém, redukcí organickými látkami vznikl.

O srážení jodidu mědičnatého z matečných louhů ledkových; *o rozboru technického jodidu mědičnatého.*

Dnešní vysoká cena jodu, jakož i kartel, který ji drží neustále v libovolné výši, mají za následek, že všechny zdroje jodu, které leží z dosahu kartelu, jsou velmi vítané. Poměry jsou tak zvláštní, že dle soukromých zpráv jistého továrníka v Chile pouštěny jsou částečně louhy jodové do moře, jen určitá jejich část se zpracuje, taková, aby jí kryta byla veškerá spotřeba jodu.

V továrně, v níž jsem měl příležitost pracovat, srážejí z matečných louhů jod za chladu dle methody Duflosovy (Ann. 39.253)

srážením síranem měďnatým a dvojsiřičitanem sodnatým, po okyselení kyselinou sírovou. Zkoušel jsem, do jaké míry tímto způsobem vyčerpá se obsah jodový z matečných louhů.

Jest známo, že z čistých roztoků jodidů alkalických dá se kvantitativně srazit jodid měďičnatý a ten vážením stanovit (viz práce: Mohrovu, Z. anal. Ch. 12, 366, Fleischerovu knihu: Die Titrirmethode als selbstständige quantitative Analyse str. 73 a Zengerovu: Arch. der Pharm. [3] 3. 137).

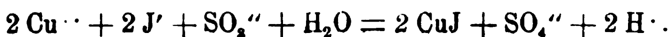
Měl jsem ji příležitost zkoušet, a shledal jsem, že mimo okolnost, že sedlina někdy prochází filtrem, nemá jiné chyby. Ovšem platí to pro čisté roztoky, pro tekutiny, jaké resultují po výrobě konvertního ledku, jsou poměry jiné.

Provedena následující stanovení:

Louh číslo	Obsahuje v litru *g* veškerého jodu	*mg* jodu jako $J' + JO_3'$	Sraženého jako Cu_2J_2 a destilací určeného jodu
I.	6,605	6,537	6,439
II.	6,695	6,686	6,604
III.	10,353	10,278	10,206

Při všech pokusech přidáváno o něco větší množství titrovaného roztoku síranu měďnatého, jež odpovídá veškerému jodu, dále ekvivalentní množství siřičitanu kyselého sodnatého a kyseliny sírové, potřebné ku vybavení veškeré jodovodíkové kyseliny z veškerého jodu vypočtené.

Užito k tomu rovnice:



$$2\,Cu^{\cdot\cdot} + 2\,J' + SO_3'' + H_2O = 2\,CuJ + SO_4'' + 2\,H^{\cdot}.$$

Z výsledků je patrno, že skoro veškeren jod, obsažený jako $J' + JO_3'$ se sráží do jodidu měďičnatého.

Získané produkty jsou technické jodidy měďičnaté. Analysou jich i jiných technických vzorků shledáno bylo, že neodpovídají přesně formuli CuJ. Jsou znečištěny chloridem, po případě i oxychloridem měďičnatým, obsahují sledy železa, vlhkost i organické látky.

Pro analysy technického jodidu mědičnatého zkoušel jsem řadu cest analytických a osvědčila se mi nejlíp následující:

Do přístroje destilačního, který dříve již byl popsán, odvážen 1 *g* jodidu mědičnatého, přidáno 600—700 *cc* destilované vody, pak 10 *cc* kyseliny sírové (1 : 5) a 10 *cc* desítiprocentního roztoku dusanu sodnatého,*) spojeno s jímadly, v nichž nachází se roztok arsenanu sodnatého a dvojuhličitanu, na to destilováno za současného provádění kysličníka uhličitého, pokud unikaly fialové páry (*jod*). Roztok zbylý v baňce slijeme do misky, odkouříme na 200 *cc*, sfiltrujeme a zředíme na 250 *cc* (*nerozpustný zbytek*). V 50 *cc* tohoto roztoku určíme *chlor* vážkově a v jiných 50 *cc* stanovíme *měď* elektrolyticky. Za tím účelem zneutralisujeme ammoniakem, zředíme v elektrolytické mísce as na 100 *cc*, přičiníme 10 *cc* dusičné kyseliny ($h = 1,2$) a elektrolysujeme proudem 0,2 A o napjetí 2—2,5 V přes noc. Nemáme-li proud k disposici, doporučuje se odkouřit odměřenou část roztoku s kyselinou sírovou, srážet měď jako sulfokyanid mědičnatý, ten filtrovat Goochovým tyglíkem a přímo vážit.**) Výsledky jsou spolehlivé. Na *železo* nejlíp je zkoušet ve filtratu po stanovení mědi kvalitativně. Podobně i na *vápník*. Je-li železa větší množství přítomno, pak možno odděliti ho od mědi 2násobným srážením ammoniakem. *Vlhkost* stanovíme obvyklým způsobem.

Výhody tohoto postupu celkové analysy jsou dány hlavně velmi snadným rozkladem samotné látky. Jiný způsob uvádění v roztok na př. koncentrovanou kyselinou sírovou, nebo ammoniakem, neb i sirníkem sodnatým není tak praktický, aby v tak krátké době umožněno bylo oddělení mědi, chloru a jodu.

Stůjtež zde dvě analysy technických jodidů mědičnatých:

Cu	27,27%	33,0%
J	58,32%	66,7%
nerozp. podíl	—	0,4%
Cl	4,58%	0,3%
Fe	1,05%	—
vlhkost	0.57%	0,21%
kyslík, org. látky a ostatní	8,21% (z difference do 100)	—

*) Dusan sodnatý (i od renomovaných firem) mívá v sobě sledy chloridu, některé druhy však až procenta. Jest nejlíp v připraveném roztoku určiti chlor vážkově a zavésti korekci. Cesty preparativní ku odstranění těchto sledů jsou velmi zdlouhavé a při neopatrné práci selhou; proto doporučuji cestu naznačenou.

**) Vážit přímo sulfokyanid mědičnatý radí: R. van Name, Z. f. anorg. Ch. 26. 230.

Z nich patrno, že obsahují chlor, velmi nepříjemnou to součást. Věnoval jsem další pozornost

čištění jodidu měďičnatého.

Předem promluvme si o srážení směse chloridu a jodidu alkalických síranem měďnatým za přítomnosti kyseliny sírové a siřičité. Bylo zřejmo, že za různých podmínek bude množství chloridu měďičnatého do jodidu sražené různé. Následující pokusy tabelárně sestavené osvětlují tyto poměry.

Jako roztoky sloužily:

a) $^1/_5$ *n* jodidu draselnatého,

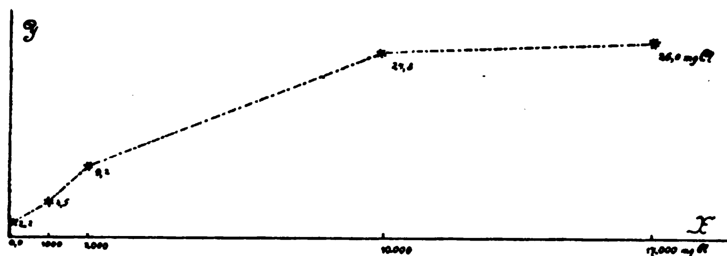
b) $^1/_5$ *n* chloridu sodnatého,

c) síranu měďnatého, jehož 1 *cc* obsahoval 1,9 *mg* Cu,

d) sírové kyseliny 1 : 5.

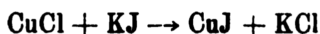
Z následujícího roztoku sražený jodid měďičnatý 2krát 10 *cc* vody promytý					Obsahoval	
mg Cl	*cc* $^1/_5$ *n* J	*cc* H_2SO_4 ($^1/_5$)	*cc* ⊙ $CuSO_4$	*g* Na_2SO_3 5 *aq*	*mg* J	*mg* Cl
71	—	10 *cc*	100 *cc*	2 *g*	—	—
71	10	"	50 *cc*	"	251	2,0
142	10	"	"	"	250	2,2
1.000	10	"	"	"	253	4,5
2.000	10	"	"	"	249	9,2
10.000	10	"	"	"	251	24,8
17.000	10	"	"	"	249	26,0

Vynesou-li se výsledky získané graficky v pravoúhlou soustavu souřadnic, tu získá se křivka, jak vidno z připojeného obrazce.

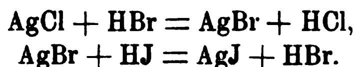


Bližším zkoumáním ssedlin shledáno bylo, že možno snížiti množství chloridu v jodidu obsaženém dlouho trvajícím promýváním. V odtékajících tekutinách nachází se chlorid sodnatý. I znamená křivka naše adsorbci chloridu sodnatého v jodidu mědičnatém. Ovšem nikdy není možno absolutně vymýt jodid mědičnatý a zbavit ho chloru, z té příčiny, že část se ho sráží ve formě chloridu mědičnatého. Kolísalo množství chloru v dokonale promytých preparátech od 0,3 až do 1%.

Částečně dá se dále jodid mědičnatý zbavit chloru, snažíme-li se převést v něm obsažený chlorid mědičnatý na jodid účinkem nadbytečného jodidu draselnatého. Této konversi, jež dle reakce


$$CuCl + KJ \longrightarrow CuJ + KCl$$

postupuje, nacházíme analogickou u halových sloučenin stříbra, kde známy jsou tyto pochody:


$$AgCl + HBr = AgBr + HCl,$$
$$AgBr + HJ = AgJ + HBr.$$

Jsou pozorovány i využitkovány se stanoviska analytického prací Juliusa (Zeit. f. anal. Ch. 1883, 523).

Konverse chloridu mědičnatého jodidem draselnatým jde dost daleko, tak mohl jsem z čistého chloridu mědičnatého 10teronásobným množstvím koncentrovaného roztoku jodidu draselnatého po zahřetí k varu až 20% veškerého chloru nahraditi jodem. Technické jodidy mědičnaté, které až 5% chloru obsahovaly, touto cestou ztratily průměrně $^1/_3$ chloru, který nahražen byl jodem.

Úplného zbavení chloru dá se docíliti tím způsobem, že jodid mědičnatý smíchá se s koncentrovaným roztokem jodidu draselnatého,

zahřívá se tak dlouho za občasného přidání pevného jodidu draselnatého, až získá se čirý, slabě zažloutlý roztok, z něho zředěním vodou vypadne zpět jodid mědičnatý, prostý chloru. Tohoto pozorování dá se dobře využít ku přípravě čistého jodidu mědičnatého, který dál má sloužit jako surovina pro jodid alkalický, chloru prostý, o čemž budiž zde dále promluveno.

Konverse jodidu mědičnatého v jodidy alkalické.

Jodid mědičnatý zpracuje se dosaváde dvěma způsoby, buďto vybavují z něho oxydačními processy jod, který sublimací čistí (technické zpracování dle Soubeirana J. Pharm. Ch. 13. 427) anebo nasuspenduje se do vody a uvádí do tekutiny sírovodík, sraží sirník mědičnatý, uvolní jodovodík, který neutralisují uhličitanem draselnatým (Langhein, *Ber. Ber.* 7. 765). Methoda posledně jmenovaná má v praxi technické své potíže, jednak práce se sírovodíkem je nepříjemná a drahá, neboť jest skrovná část sírovodíku, jenom ta, jež rozpuštěna v tekutině a dál dissociována působí. Sirník mědičnatý jest málo cenný.

Dle soukromého sdělení pana dvorního rady prof. F. Štolby dá se jodid mědičnatý zahříváním s louhem alkalickým převést v jodid alkalický. Zkoušel jsem využitkovat reakce jodidu mědičnatého s uhličitany alkalickými ve smyslu tomto.

Zahříváme-li jodid mědičnatý s roztokem uhličitanu alkalického, tu zvolna vytvořuje se žlutá ssedlina, která varem v červený kysličník mědičnatý, velmi intensivně ohnivě červené barvy přechází, dle této rovnice:

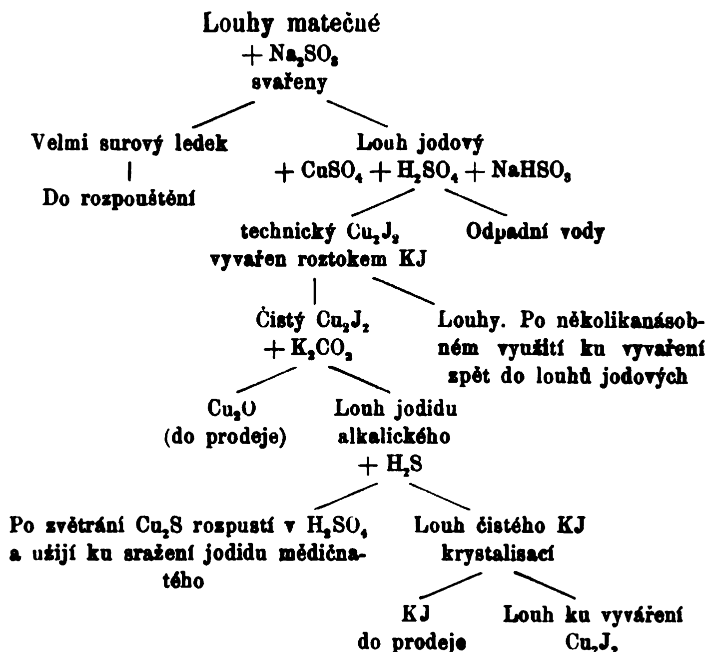


$$Cu_2J_2 + Na_2CO_3 = Cu_2O + CO_2 + 2\,NaJ.$$

Filtrát po kysličníku mědičnatém obsahuje jodid sodnatý, resp. draselnatý a něco mědi. Odpařením ku krystalisaci vypadne jodid alkalický, který však není čistý, obsahuje sledy mědi.

Přítomnost této je ovšem velmi nepříjemná; nemyslitelná, jde-li o preparáty farmaceutické. Jednalo se tedy o odstranění těchto sledů mědi. Zkoušel jsem různé cesty, ale z nich jedině k cíli vedou dvě: odstraňování sledů mědi sírovodíkem nebo sirníkem sodnatým. Filtráty v tomto případě jsou prosty mědi.

Ke konci dovoluji si ještě podat *schematický obraz zpracování matečných louhů od konvertního ledku.*



V této práci nalezeno:

a) příčina ztrát na jodu při svaření matečných louhů po konvertním ledku, jež způsobena je hydrolysou solí kovů a přítomností organických látek;

b) způsob, jak tomu zabránit — přítomností siřičitanů;

c) jednoduchá cesta ku analyse technického jodidu mědičnatého;

d) jeho čištění od halových sloučenin a

e) převedení v sole alkalické uhličitany, při čemž získá se vedlejší cenný výrobek kysličník mědičnatý ohnivě červené barvy.

Z chemické laboratoře c. k. české vysoké školy technické v Praze.

V Praze, v lednu 1907.



Z výzkumné stanice chemicko-fysiologické při c. k. české vysoké škole technické v Praze.

III.

O rozkladu gelatiny plísněmi.

Dr. Jan Jelínek.

Předloženo v sezení 8. února 1907.

V továrnách na výrobu superfosfátů objevovaly se někdy na kostech vyextrahovaných benzinem, ležely-li déle ve skladišti, dvě plísně.[1]) Působením jich tvořilo se v kostech značné množství ammoniaku, jak zápach ve skladištích prozrazoval.[2])

Hlavní organická součástka kostí, *kollagen*, jest velmi dobrým živným prostředím pro mnohé mikroorganismy. Kosti obsahují z organických součástek hlavně tuk, kollagen, pak trochu chondrinu a mucinu.[3]) Z mineralných součástí převládá v nich fosforečnan vápenatý a uhličitan vápenatý. Holdefleiss[4]) uvádí průměrné složení kostí následovně:

voda	21·8%,
tuk	18·6%,
dusíkaté látky . .	21·6%,
popel	38·1%,

a z toho připadá na:

---

[1]) Morfologii těchto plísní nemohu zde uvésti, ježto si určení a popis jejich vyhradil prof. Dr. Bubák, jenž mi ony plísně dodal. Budu je proto prozatím nazývati plíseň *P* a plíseň *O*. Prof. P. Magnus zařaďuje obě plísně do rodu *Oospora*. Plíseň *P* jest prý asi příbuzná s *Oospora variabilis* (Lindner), plíseň *O* s *Oospora crustacea* (Bull) Sacc.

[2]) Podle sdělení prof. Dra J. Stoklasy nebylo obyčejně možno z kostí takto napadených vyrábět klih, poněvadž svařená klihovina při ochlazení neztuhla. Když přece ztuhla, tu se klih špatně sušil, tvořily se v něm velké bubliny a tabulky klihové při klepnutí lehce praskaly.

[3]) Cohnheim, Die Eiweisstoffe str. 285.

[4]) Das Knochenmehl.

P_2O_5	14·7%,
CO_2	2·5%,
SO_5	0·1%,
Cl	0·1%,
CaO	20·4%,
MgO	0·2%.

Poněvadž ale podle novějších analys množství tuku, jež uvádí HOLDEFLEISS, zdá se býti poněkud vysokým, uvádím zde ještě novější analysu J. STOKLASY.[6]) Kosti obsahovaly:

vody	18%,
tuku	*11*%.
glutinu . . . . / chondrinu . . .	17%,
popele	54%.

Kosti ještě tuku nezbavené plísněmi těmito napadány nebývají. Teprve až tuk byl z nich vyextrahován a kosti ostaly po extrakci trochu vlhkými, objevují se na nich plísně. Složení kostí extrahovaných a z nich vyrobené kostní moučky jest různým podle způsobu práce.[5])

Obral jsem si za úkol prostudovati změny, jež plísně tyto na kostech způsobují, a rozhodnouti, zda rozklad se týká jenom organických či snad i anorganických součástí kostí. Neboť, jak STOKLASA [6]) nalezl, rozkládají některé bakterie nejen kollagen, nýbrž převádějí do roztoku i kyselinu fosforečnou. Kdežto na př. *Bac. fluorescens liquefaciens* rozpustil jen 5·36% veškeré v kostní moučce obsažené kyseliny fosforečné, *Bac. mesentericus vulgatus* převedl do roztoku 16·77% *Bac. megaterium* 17·73% a *Bac. mycoides* dokonce 20·20%.

Ke studiu působení těchto plísní na kosti použil jsem tuku zbavené kostní moučky, jež obsahovala 3·92% dusíku a 24·76% kysličníku fosforečného. Do čtvrtlitrových Erlenmayerových baněk odváženo po 20 *g* moučky (0·784 *g* N a 4·952 *g* P_2O_5), přidáno 100 cm^3 vody a sterilisováno několikráte $1/2$ hod. v páře. Po inkubačním stadiu naočkovány do baněk plísně a pozorován jich vzrůst jednak při laboratorní teplotě (průměrně 16° C), jednak při 25° C.

---

[5]) Podrobné údaje viz J. STOKLASA, Chem. Ztg. *1890*, seš. 1—3.

[6]) Centralblatt f. Bakteriol. II. Abt. *4*, 526; Beiträge zur chem. Physiolog. u. Pathol. *8*, 822.

Plísni *P* dařilo se při obou teplotách dobře; při 25° *C* vyvíjela se však rychleji; plíseň *O* rostla dobře jenom při nižší teplotě. Při 25° se mycelium buď vůbec nevytvořilo nebo jenom spoře. Ježto se vyskytují obě plísně na kostech pospolu, domníval jsem se, že symbioticky provádí rozklad jinak než každá o sobě a proto naočkoval jsem do několika buněk obě plísně dohromady. Z počátku se vyvinulo mycelium obou plísní, ale plíseň *O* asi po čase odumřela, neboť při lití gelatinových desek na konci pokusu tvořilo se jenom mycelium plísně *P*, trval-li pokus delší dobu.

Ku posouzení, jak daleko dospěl rozklad glutinu, určen v roztoku po pokuse dusík ve všech třech formách, ve kterých jest v bílkovinách (amidový, diaminový a monoaminový), methodou Hausmannovou.[7]) Kutscher[8]) vytýká sice této methodě, že diaminolátky se ze zředěných roztoků nedokonale srážejí, že přebytečná kyselina fosfovolframová sedlinu opět rozpouští a že i při promývání na filtru se sedlina látek diaminových částečně rozpouští, čímž dostáváme nižších čísel pro dusík diaminový.

Ale pracuje-li se vždy za stejných podmínek, t. j. má-li roztok vždy tutéž koncentraci, přidává-li se kyseliny fosfovolframové jen potud, *pokud* se tvoří sedlina, a promývá-li se vždy stejným množstvím tekutiny, jsou chyby vždy stejné a data takto získaná možno zcela dobře srovnávati, jak to uvádí Osborne a Harris[9]) a jak jsem se sám při parallelních analysách přesvědčil.

Obsah baněk po skončeném pokusu sfiltrován, kostní moučka a mycelium na filtru dobře promyty a filtrát zředěn na 250 cm^3 V 15 cm^3 určen veškerý, do roztoku přešlý dusík podle Kjeldahl Wilfahrta, v 50 cm^3 určeny jednotlivé formy, v jakých byl dusík v roztoku methodou Hausmannovou, v 50 cm^3 pak určena byla kyselina fosforečná, když před tím vařením s kyselinou solnou a chlorečnanem draselnatým byly oxydovány organické látky. Výsledky rozboru podává nám tabulka I.:

---

[7]) Zeitschr. f. physiol. Chemie, *27*, 95; *29*, 136.

[8]) Zeitschr. f. physiol. Chemie, *31*, 215.

[9]) Journal Amer. Chem. Soc. *25* (1903), 323—353.

Tabulka I.

	Plíseň	Teplota	Trvání pokusu	Do roztoku přešlo dusíku		Formy dusíku v roztoku			Do roztoku přešlo P_2O_5	
						amidový	diaminový	monoaminový		
			dní	g	%	%	%	%	g	%
1	Sterilní baňka	—	—	0·2985	38·07	21·69	27·55	52·06	0·0147	0·29
2	P	16	30	0·3315	42·28	49·83	17·94	33·36	0·0175	0·35
3	P	16	58	0·3139	40·03	56·87	15·38	28·32	—	—
4	P	25	19	0·3875	49·42	57·30	20·05	23·30	0·0255	0·54
5	P	25	50	0·3372	43·01	64·56	14·94	23·25	0·0310	0·62
6	O	16	50	0·3442	43·90	56·33	18·91	23·99	0·0128	0·26
7	O	16	84	0·4060	51·78	62·09	11·55	25·34	0·0159	0·32
8	P a O	16	33	0·3290	41·96	48·47	19·36	31·49	0·0230	0·46
9	P a O	16	65	0·3827	48·82	55·97	16·46	26·99	0·0300	0·60
10	P a O	25	29	0·3594	45·84	54·19	26·88	18·50	0·0205	0·41
11	P a O	25	54	0·3372	43·01	66·58	15·78	18·27	0·0294	0·59

Při pokusu *2.*, *4.*, *6.*, *8.* a *10.* analysován obsah baněk as po době, kdy, jak bude níže uvedeno, ztekutily plísně ono množství gelatiny (6%), jaké bylo ve 20 *g* kostní moučky, odvážené do jednotlivých baněk. Při pokuse *3.*, *5.*, 7., *9.* a *11.* analysován obsah baněk asi o 25—30 dní později než v prvém případě.

Z pokusů vidíme, že plísně tyto působí hlavně na organické součástky kostí. Ony jednak rozpouští kollagen v kostní moučce a převádí ho v rozpustný glutin, jednak rozkládají do roztoku přešlý glutin ve sloučeniny jednodušší. V baňce neinfikované přešlo do roztoku 38·07% všech v kostní moučce obsažených dusíkatých látek. Působením plísní stouplo však množství rozpuštěného kollagenu na 40·03—51·78%. Z glutinu vznikají albumosy (glutosy) a peptony podobně jako při štěpení jiných bílkovin. Tyto jednodušší sloučeniny jsou štěpeny dále, až vznikají na konec monoamino- a diamino-

kyseliny. Ze sloučenin těchto asi tvoří plísně svoje tělo; z větší části je však oxydují, při čemž vzniká na konec kyselina uhličitá, ammoniak a voda. Bude se tedy jeviti tento rozklad glutinu ubýváním mono- a diaminové formy dusíku a přibýváním dusíku amidového, respektive ammoniaku. Dusíku monoaminového, jak z tabulky jest viděti, ubývá rychle; diaminového dusíku poněkud volněji. Tak působením plísně *P* ubylo při 16° po 30 dnech 18·7%, po 58 dnech 23·7%, při 25° po 19 dnech 29% dusíku monoaminového. Diaminového ubylo při 16° po 30 dnech 9·5%, po 58 dnech 12·2%; při 25° po 19 dnech 7·5%, po 50 dnech 22·7%. U *O* plísně ubylo při 16° po 50 dnech 29·0%, po 84 dnech 26·7% dusíku monoaminového Dusíku amidového ovšem poměrně přibývá.

Na kyselinu fosforečnou v kostní moučce plísně tyto skorem nepůsobí. V baňce neinfikované rozpustilo se 0·29% P_2O_5, působením plísní rozpustilo se jenom 0·35—0·62%. ***Působí tedy plísně tyto pouze na organické součásti kostí***; anorganické součásti zůstávají skorem beze změny, jak z pokusů jest viděti. Z té příčiny použil jsem ku dalšímu studiu chemismu obou plísní pouze glutinu ve formě čisté gelatiny.

Ku pokusům připraven 6% roztok gelatiny, kterému byly přidány jako anorganické živiny:

0·04% $Ca(H_2PO_4)_2H_2O$
0·04% KH_2PO_4
0·01% $MgSO_4ZH_2O$
0·01% $NaCl$.

Do baněk odměřeno 100 cm^3 roztoku, načež baňky sterilisovány třikrát v páře po $^1/_4$ hodiny a po inkubačním stadiu naočkovány do nich plísně.

Část baněk ponechána při 16°, druhá pak vystavena v biologické komoře teplotě 25° *C*. Při tom pozorováno, za jak dlouho byl obsah baňky (100 cm^3 6% gelatiny) plísněmi ztekucen. Po ztekucení obsah některých baněk analysován hned, některé baňky ponechány ještě dalšímu působení plísní. Ztekucená gelatina analysována z počátku jako roztok z kostní moučky, aby se zjistilo, jak rychle jsou jednotlivé formy dusíku převáděny ve formu amidovou v tom případě, kdy gelatina jest již z kostí vyloužena.

Tabulka II.

	Plíseň	Teplota	Doba od naočkování do ztekucení gelatiny dny	Od ztekucení do analysy uplynulo dnů	Z veškerého dusíku v roztoku bylo ve formě: NH$_3$ %	amidové %	diaminové %	monoaminové %	Dusík v kultuře (v sušině) %	Váha suché kultury g	Poznámka
1	Sterilní baňka	—	—	—	—	1·65	39·67	58·92	—	—	
2	*P*	16	25	1	9·92	11·02	30·71	58·88	8·55	0·4304	
3	*P*	16	21	24	28·21	33·23	19·65	46·59	5·97	0·7447	
4	*P*	16	28	24	27·14	38·20	19·47	43·34	6·27	0·8209	
5	*P*	25	18	4	7·28	15·39	26·00	58·56	8·60	0·2443	
6	*P*	25	11	6	7·41	12·05	25·49	60·74	—	—	
7	*P*	16	34	0	0·99	3·23	32·09	65·18	—	—	Ku gelatině přidán 1 *g* $Ca_3(PO_4)_2$.
8	*P*	16	22	118	29·29	—	—	—	—	—	Ku gelatině přidán 1 *g* $Ca_3(PO_4)_2$. Rozpustilo se 0·0705 *g* P_2O_5.
9	*P*	25	20	5	0·34	2·62	32·64	64·08	—	—	1 *g* $Ca_3(PO_4)_2$ v gelatině.
10	*P*	25	12	26	—	35·18	30·21	—	—	—	1 *g* $Ca_3(PO_4)_2$ v gelatině. Rozpustilo se 0·0306 *g* P_2O_5.
11	*O*	16	50	0	4·07	5·36	45·80	50·27	10·09	0·3759	
12	*O*	16	54	24	16·09	19·16	29·32	51·17	7·72	0·6238	
13	*O*	16	45	93	—	37·48	16·76	47·51	4·93	0·4628	
14	*O*	16	116	2	2·19	3·61	40·69	56·40	—	—	1 *g* $Ca_3(PO_4)_2$ v gelatině.
15	*P* a *O*	16	33	0	6·87	7·64	43·27	52·50	8·78	0·3426	
16	*P* a *O*	16	18	16	—	46·02	19·40	34·44	6·40	0·7131	
17	*P* a *O*	25	13	130	—	60·00	18·21	19·64	5·98	0·5947	

Z tabulky jest vidět, že rozklad jest tu volnějším; dusíku amidového nevzniká tolik jako u pokusů s kostní moučkou. Dusíku diaminového ubývá tu z počátku rychleji než dusíku monoaminového. Ano v některých případech, jako u č. *6*, *7* a *9* — jest monoaminového dusíku na konci pokusu více než v nerozložené gelatině. Plíseň asi odštěpuje napřed z hexonových zásad jen jednu aminovou skupinu, čímž vznikají monoaminokyseliny, na př. z lysinu aminokapronová (leucin), z argininu aminovalerová a p. A odštěpení aminové skupiny z monoaminokyselin neděje se tak rychle jako u hexonových zásad, následkem čehož se množství monoaminokyselin a tedy i množství monoaminového dusíku zvětšuje. Kleslo-li ale množství diaminového dusíku asi na 20%, tu ho již tak rychle neubývá. V baňce č. *2* a *3* bylo ho po 24 dnech 19·5%, v baňce č. *13* po 93 dnech ještě 16·7%. Zajímavým jest, že působením plísně *O* dusíku diaminového na počátku rozkladu přibývá. Tak přibylo u č. 11 o 6·13%, u č. 14 o 1·02% a u č. 15 o 3·60%. Podobný úkaz vlivem některých bakterií uvádí též Stoklasa ve výše uvedené práci. Dusíku monoaminového ubývá hned od počátku rozkladu. Ale ubývání toto nepostupuje tak rychle jako při pokusech s kostní moučkou. Teprve po 143 dnech (č. *17)* kleslo jeho množství na 19·64%, kdežto při pokusech s kostní moučkou kleslo množství monoaminového dusíku již po 29 dnech na 18·50% (č. *10*, *tab. I.*). Ale ani hodně dlouhým působením plísní neklesne množství dusíku mono- a diaminového pod jistou mez. Tak na př. u č. *17* jest v roztoku po 143 dnech ještě 18·2% dusíku diaminového a 19·6% dusíku monoaminového, což poukazuje na to, že asi štěpení gelatiny není úplným. To si můžeme vysvětliti tím způsobem, že plísně, jež z počátku štěpí komplikovanou molekulu gelatiny na sloučeniny postupně jednodušší (gelatosy a peptony), některé z těchto komplexů rozkládají dále až na aminokyseliny a zásady, které pak po odštěpení ammoniaku oxydují, kdežto jiné komplexy dále rozkládati nemohou. Neboť ve ztekucené gelatině, kde plísně vegetovaly asi 4 měsíce, byly ještě sloučeniny, jež dávaly s kyselinou fosfovolframovou sedlinu ve vřelé vodě nerozpustnou; tedy asi gelatosy a peptony. Emmerling a Reiser[10]) zmiňují se rovněž, že i po delším působení mikrobů zbyla část gelatiny nerozložena. Levene[11]) nalezl, že i po 10měsíčním působení trypsinu na gelatinu zbylo v roztoku trochu albumos a větší množství peptonů. Schermesser[12]) isoloval z pro-

[10]) Berichte d. d. chem. Ges. *35*, 700.

[11]) Zeitschr. f. physiol. Chemie, *41*, 8.

[12]) Zeitschr. f. physiol. Chemie, *41*, 68.

duktů rozkladu gelatiny štěpené pepsinem jeden pepton, jenž obsahoval 24·79—25·13% dusíku diaminového a 70·21—69·85% dusíku monoaminového. Dusík amidový neobsahoval. Z použité gelatiny získal 2·3% tohoto peptonu. Jest možným, že podobných peptonů, jež se již dále neštěpí, jest více.

Vedle amidového dusíku určoval jsem v produktech rozkladu též ammoniak, jenž byl v roztoku již volným neb vázaným na kyseliny. Ammoniak stanoven byl methodou Bosshardovou.[13]) Že působením plísní na dusíkaté látky vzniká ammoniak, pozorovali již Nägeli,[14]) Wehmer,[15]) Marchal.[16]) Ježto plísně silně oxydují, myslelo se, že jest ammoniak jedinou zplodinou rozkladu.[17]) Blíže zabýval se vznikáním ammoniaku z dusíkatých látek W. Blutkewitsch,[18]), jež pěstoval plísně v roztoku 4% peptonu, 0·1% saccharosy a 0·1 anorg. živin. *Aspergilus niger* převedl až 58% veškerého dusíku z peptonu v ammoniak. Jiné plísně (*Penicilium glaucum*, *Mucor racemosus*, *stolonifer*, *Mucedo*) ammonisovaly slaběji, vzniklo asi 17% ammoniaku Ale přidával-li těmto plísním do živného roztoku v určitých intervalech zředěnou kyselinu fosforečnou, vznikalo ho více. Naopak zase přidáním uhličitanu vápenatého do živného roztoku se omezila tvorba ammoniaku. Blutkewitsch vysvětluje to tím způsobem, že silně oxydující *Aspergilus niger* tvoří hojně kyseliny šťavelové, jež vznikající ammoniak váže, ostatní pak prý vytvořují málo kyseliny šťavelové nebo vůbec žádnou, následkem čehož větší část ammoniaku zůstává v roztoku volnou a zastavuje brzo činnost plísní. Přidáním kyseliny se alkalita živného prostředí sníží, plísně mohou déle vegetovat a tedy i více ammoniaku vytvořit. Uhličitan vápenatý neutralisuje organické kyseliny, ammoniak ostává v roztoku volným a tím vitální pochody u plísní brzo přestávají. Též u přítomnosti organických bezdusíkatých látek tvořilo se méně ammoniaku, o tom však níže.

Jednalo se mi z počátku o to, není-li snad v roztoku dusík stanovený jako amidový všecken ve formě ammoniaku. Rozdíly mezi dusíkem amidovým a ammoniakovým byly různé; byly tím větší, čím déle pokus trval. Obnášely 1·10—11·06% (viz tab. II.). Ammoniak vzniká odštěpením aminové skupiny z aminokyselin. Bezdusíkaté slou-

[13]) Zeitschr. anal. Chemie, *22* (1883), 329.
[14]) Bot. Mitteil., 1881 Bd. 3.
[15]) Bot. Ztg. 1891, 233.
[16]) Centrblatt f. Bakteriol. II. Abt. *1*, 753.
[17]) Pfeffer, Jahrbuch f. wiss. Bot. *28*, 262.
[18]) Jahrb. f. wiss. Bot., *38*, 147.

čeniny takto vzniklé plísně při dýchání oxydují až vznikne na konec H_2O a CO_2 Je-li v živném roztoku vedle bílkovin nějaká bezdusíkatá látka, oxydují plísně podle BLUTKEWITSCHE napřed tuto sloučeninu, bílkovinu pak štěpí jen nepatrně; proto vzniká v tomto případě málo ammoniaku.

Dále bylo třeba stanoviti, zda jest ammoniak v roztoku volným nebo jako sůl nějaké kyseliny. Poněvadž obsah baněk, zvláště trval-li pokus delší dobu, páchnul dosti silně ammoniakem, mohlo se předpokládati, že aspoň část ho bude v roztoku volná.

Abych tuto otázku zodpověděl, připravil jsem novou řadu baněk se 6% gelatinou; do každé baňky odměřeno tentokrát 200 cm^3. Po skončeném pokuse roztok od mycelia odfiltrován a filtrát zředěn na 500 cm^3. Ve 100 cm^3 určen ammoniak volný, jež se dá vypudit pouhým vařením; ve zbytku určena acidita a konečně destilací s kysličníkem hořečnatým stanoven ammoniak vázaný. V jiném podíle stanoveny těkavé kyselíny. Ve 20 cm^3 určen dusík veškerý. Vedle toho určena byla sušina v roztoku odpařením 20 cm^3 a sušením ve vakuu, aby se zjistilo, mnoho-li gelatiny plísně při svých vitalních pochodech oxydovaly. Výsledky analys sestaveny v *tabulku III.*

Pouhým vařením roztoku uniká dosti mnoho ammoniaku, jak ukazuje *14.* sloupec *III. tab.* Číslice v tomto sloupci udávají, kolik $cm^3 \frac{n}{10}$ kyseliny by neutralisoval ammoniak vypuzený vařením celého rozloženého obsahu jednotlivých baněk (200 cm^3 6% gelatiny). Ammoniak tento může býti v roztoku buď volným, nebo vázán na některé organické kyseliny. ANDRLÍK[19]) uvádí, že ammonaté soli aminokyselin se vařením rozkládají, při čemž ammoniak prchá. Kdyby v našem případě byl všecken vázán na netěkavé kyseliny, jichž ammonaté soli se vařením rozkládají, tu by acidita (vyjádřená $cm^3 \frac{n}{10}$ k) po vaření musela býti aspoň přibližně rovna číslům ve sloupci *14.* Ale jak jest ve sloupci *16.* viděti, jest mnohem menší, zvláště při pokuse *7.*, *10.*, *19.—22.*; ano při č. *9.* a *14.* jest reakce po vaření dokonce neutrálnou. Rovněž se nedá mysliti, že by snad byl tento ammoniak vázán na těkavé kyseliny a že tyto zároveň s ammoniakem těkají. Neboť v jiném podílu roztoku určené těkavé kyseliny (přepočtené rovněž na equivalentní $cm^3 \frac{n}{10}$ k) nám ukazují, že by nestačily

---

19) Zpráva výzkumné stanice cukrovarnické. 1902, 20.

Tabulka III.

	Plíseň	Ku živné gelatině přidáno	Teplota	Doba od naočkování do ztekucení gelatiny	Od ztekucení gelatiny do analysy uplynulo dnů	Váha suché kultury	Dusík v kultuře	
				dny		g.	%	g.
1.	Neinfikováno	—	—	—	—	—	—	—
2.	*P*	—	16	13	135	0·6276	6·73	0·0422
3.	*O*	—	16	52	97	0·4734	4·73	0·0224
4.	*P* a *O*	—	16	13	137	0·6510	7·16	0·0466
5.	*P* a *O*	—	16	21	135	0·5878	6·09	0·0358
6.	*P* a *O*	—	16	21	135	0·5582	6·12	0·0342
7.	*P* a *O*	—	25	13	130	0·5947	5·98	0·0356
8.	Neinfikováno	—	—	—	—	—	—	—
9.	*P*	—	16	25	—	0·9650	8·66	0·0836
10.	*P*	—	16	32	24	1·6702	7·54	0·1260
11.	*O*	—	16	37	1	0·5425	6·29	0·0342
12.	*O*	—	16	32	10	0·7428	6·76	0·0502
13.	*O*	—	16	32	22	1·5011	6·06	0·0910
14.	*P*	2 *g* $CaCO_3$	16	71	4	—	—	0·0489
15.	*O*	„	16	101	—	—	—	0·0217
16.	*P*	3·3 cm^3 $\frac{n}{10}$ H_3PO_4	16	30	1	0·4045	8·51	0·0344
17.	*O*	1·2 „ „ „	16	44	1	0·7243	8·23	0·0596
18.	*P*	4 *g* glycerinu	16	38	1	1·6096	7·79	0·1253
19.	*P*	„	16	42	15	1·9456	6·93	0·1348
20.	*O*	„	16	121	1	1·7695	7·34	0·1299
21.	*O*	„	16	73	30	1·8603	5·05	0·0939
22.	*P*	1·9726 *g* glukosy	16	86	32	2·6407	7·06	0·1865

Tabulka III. (Pokrač.)

N v roztoku	Dohromady dusíku	Ztráta N	Z veškerého N připadá na N v NH_3	NH_3 volný vyjádřený poměrnými cm^3 $\frac{n}{10}$ H_2SO_4	NH_3 vázaný vyjádřený poměrnými cm^3 $\frac{n}{10}$ H_2SO_4	Acidita po destilaci NH_3 cm^3 $\frac{n}{10}$ k	Těkavé kyseliny vyjádřené cm^3 $\frac{n}{10}$ H_2SO_4	Sušina v roztoku	Ubytek susiny	N v sušině
g	g	%	%					g	%	%
0·7210	0·7210	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0·3780	0·4202	41·72	31·12	52·0	30·3	33·0	11·8	—	—	—
0·5250	0·5474	24·07	36·80	83·8	54·2	46·5	27·5	—	—	—
0·4225	0·4691	34·82	38·20	80·8	34·5	36·5	21·5	—	—	—
0·4595	0·4953	31·30	40·82	96·5	37 5	17·0	14·5	—	—	—
0·4702	0·5044	30·04	36·62	88·5	34·5	11·0	23·5	—	—	—
0·3920	0·4276	40·69	58·39	154·0	9 5	53·0	13·0	—	—	—
1·5680	1·5680	—	—	—	—	—	—	9·6650	—	16·22
1·4700	1·5536	0·92	14·52	104·5	48·0	0·0	17·5	7·7925	9·39	16·98
1·4543	1·5803	+ 0·79	38·89	341·5	62·5	14·0	12·5	6·2300	18·26	14·26
1·2093	1·2435	13·76	11·41	57·5	41·0	1·3	7·8	—	—	—
1·3434	1·3936	11·12	13·42	93·0	35·8	15·0	18·0	—	—	—
1·5295	1·6205	+ 3·35	—	—	82·0	8·5	16·5	6·1450	20·89	—
1·5540	1·6029	+ 2·22	15·94	177·0	0·0	0·0	4·5	—	—	—
1·5505	1·5722	+ 0·27	2·39	26·5	3·3	0·0	10·0	—	—	—
1·5645	1·5989	+ 1·98	8·59	41·0	58·5	0·0	10·0	9·4425	0·00	15·96
1·5470	1·6066	+ 2·46	13·19	83·8	62·5	71·5	4·0	8·7800	1·66	15·29
1·5015	1·6268	+ 3·76	11·42	83·0	39·5	13·0	3·5	—	—	—
1·4805	1·6153	+ 3·02	27·12	227·3	59·5	9·5	14·0	—	—	—
1·4385	1·5684	+ 0·02	23·44	188·8	52·0	26·5	12·0	—	—	—
1·4980	1·5919	+ 1·52	39·91	334·0	93·0	13·5	9·5	6·8300	10·08	15·08
1·4140	1·6005	+ 2·08	22·29	171·0	54·0	7·0	5·0	7·4626	13·18	14·72

veškerý těkající ammoniak vázat (viz sloupec *17.*, *tab. III.*). Ammonaté soli mastných kyselin se asi vůbec málo rozkládají, neboť v několika případech určeny těkavé kyseliny jednak ve zbytku po oddestilování ammoniaku, jednak v jiném ještě nevařeném podílu tekutiny. Množství v prvém případě nalezená bývala jenom nepatrně nižší, než ve druhém případě Jest tedy asi ammoniak pouhým vařením roztoku unikající částečně vázán na aminokyseliny; z větší části však asi bude v roztoku volným neb jako uhličitan. Okyselí-li se produkty rozkladu, tu silně šumí a uniká hojně kysličníku uhličitého, což nasvědčuje tomu, že jest v roztoku uhličitan ammonatý. Když jsem destiloval větší množství rozložené gelatiny (as 5 l.), usazoval se ve chladiči na počátku destilace pevný uhličitan ammonatý. Reakce rozložené gelatiny bývala po skončení pokusu vždy silně alkalická; ale titrace byla velmi obtížnou pro žlutohnědé zbarvení tekutiny.

Ammoniaku vázaného, který vypuzen byl teprve vařením s kysličníkem hořečnatým, bylo celkem proti ammoniaku volnému mnohem méně. Jest asi vázán na těkavé a aminokyseliny. Domníval jsem se, že snad jest vázán na některou netěkavou kyselinu, na př. šťavelovou; ale při žádném pokuse nepodařilo se mi ji nalézti. Ani tenkráte, když jsem nechal plísněmi rozložiti najednou 1 *kg.* gelatiny, nenalezl jsem žádnou netěkavou kyselinu.

Ježto se tvoří tak značné množství volného neb jen slabě vázaného ammoniaku, bylo možným, že ammoniak z roztoku prchal, jak tomu již nasvědčoval ammoniakalný zápach rozkladných produktů. Aby se stanovilo, jaké ztráty dusíku mohou tím nastati, stanovil jsem v roztoku gelatiny, v němž plísně pěstovány, veškerý dusík. Poněvadž pak byln do všech buněk odměřeno přesně po 200 cm^3 roztoku gelatiny, muselo být ve všech stejné množství dusíku. Po ukončeném pokuse byl stanoven jednak dusík veškerý v roztoku, jednak dusík v plísni. A tu bylo nalezeno mnohem méně dusíka než ho bylo v roztoku před pokusem. Čím pokus déle trval, tím byly ztráty větší. Tak u č. *9* — 0·92%, u č. *12* — 11·12%, u č. *2—7* 24—41·7%. Ale u č. *10*, *13—22* jeví se naopak příbytek dusíku. U pokusů *13*, *18* a *19* přesahuje příbytek tento dokonce 3%. Rozdíl tento nemůže však býti zaviněn chybou při analysi, poněvadž všechna určování dusíku byla prováděna vždy dvakrát a rozdíly v obou určováních bývaly nepatrné. Saida[20]) sice pozoroval, že některé plísně assimilují dusík ze vzduchu, ale jest těžko myslitelným, že by plísně v našem

[20]) Berichte d. d. bot. Ges. 19, 107—115.

případě v prostředí tak bohatém na dusík assimilovaly ještě dusík vzdušný. Zatím nedá se zjev tento blíže vysvětliti.

Myslel jsem, že tak silná alkalita překáží plísním v dalších vitálních pochodech a že následkem toho nemůže rozklad gelatiny dále postupovati. Kdyby se tedy ammoniak nějakou kyselinou vázal, by reakce živné gelatiny byla jen slabě alkalickou, tu by rozklad gelatiny a tvorba ammoniaku musela býti intensivnější v tom případě, jestliže silná alkalická reakce vitalním pochodům plísní překáží. Tak aspoň to uvádí Blutkenwitsch. Za tou příčinou přidal jsem do dvou baněk (č. *16* a *17*) zředěnou kyselinu fosforečnou. Do baňky č. 16 přidáno po 16 dnech po naočkování, kdy již asi $^3/_4$ veškeré gelatiny byly ztekuceny, 6 kapek $\frac{n}{10} H_3 PO_4$, po 3 dnech 1 cm^3 a po 4 dnech 2 cm^3, tedy celkem asi 3·3 $\frac{n}{10} H_3 PO_4$. Do baňky č. *17* přidáno 16. den po ztekucení 6 kapek a pak po 3., 4. a 7 dnech rovněž po 6 kapkách, tedy celkem asi 1·2 cm^3 $\frac{n}{10} H_3 PO_4$. Ale výsledek byl opačným, než jak se očekávalo. Tvorba ammoniaku byla u plísně ***P*** menší, u plísně ***O*** stejná než jako v případě, kdy nebyla přidána kyselina (srovnej č. *9* a *11*). Volného ammoniaku vytvořila plíseň ***P*** v tomto případě mnohem méně, plíseň ***O*** poněkud více. Ammoniaku vázaného vzniklo v obou případech stejně. Ztekucení gelatiny trvalo u obou plísní poněkud déle. Zdá se, že okyselení nemělo na ***O*** plíseň vlivu; ***P*** plísni však rozhodně vadilo.

Abych stanovil, jaký vliv mají anorganické součástky kostí na rozklad, přidal jsem do několika baněk fosforečnan vápenatý [$Ca_3(PO_4)_2$] a do jiných zase čistý uhličitan vápenatý. Jak fosforečnan, tak uhličitan vápenatý zdržují rozklad gelatiny. Fosforečnan plísni ***P*** tak nevadí. Za obyčejné teploty zdrželo se ztekucení as o 3 dny; při 25° ale na prodloužení doby ztekucení nepůsobil. ***O*** plísni vadil fosforečnan velmi: ztekucení gelatiny nastalo až po 116 dnech. Ammoniaku utvořilo se velmi málo (viz tab. II., č. 7, *9*, *14*). Teprve za za dlouhou dobu vzniklo ho více (č. *8*, tab. II.). Uhličitan vápenatý zdržel u ***P*** plísně dosti značně ztekucení gelatiny. Po ztekucení bylo sice v roztoku právě tolik ammoniaku jako při pokusu bez uhličičitanu, ale poněvadž tu plíseň působila déle na gelatinu než ji ztekutila, jest viděti, že uhličitan tvorbu ammoniaku zdržoval (viz č. *10* a *14*, tab. III.). ***O*** plíseň vytvořila za přítomnosti uhličitanu velice málo ammoniaku, přes to, že ztekucení trvalo 101 den (viz č. *15*).

Ammoniak byl v roztoku volným, poněvadž vařením byl skorem úplně vypuzen. Uhličitan vápenatý asi ammonaté soli v roztoku rozkládal, vápno sloučilo se s organickou kyselinou na vápenatou sůl a ammoniak zůstal v roztoku buď volným neb jako uhličitan.

Rozklad gelatiny, aspoň do té míry, než vzniknou produkty jež mohou procházet blanou buněčnou, způsobují proteolytické enzymy, jež plísně do roztoku vylučují. I zkoušel jsem, dají-li se v živném roztoku, v němž plísně tyto rostly, takové enzymy dokázat. Aby pak roztok, jejž jsem hodlal na enzymy zkoušet, neobsahoval mnoho gelatiny, použil jsem ke kultivaci plísní následujícího roztoku:

1000 *cm*³ vody
10 *g* peptonu
5 *g* gelatiny

a výše uvedené anorganické živiny. Roztok rozdělen do několika baněk a po sterilisaci naočkovány do něho plísně. Až se mycelium dostatečně vyvinulo a počalo tvořiti spory (as po 30 dnech), roztok od mycelia odfiltrován. Ku zjištění proteolytických enzymů použil jsem Fermi-ho 8%ní thymolové gelatiny, jíž naplněny úzké rourky. Tekutina odfiltrovaná od plísní rozdělena na 4 části:

1. ponechána tak, jak byla,
2. přesně neutralisována,
3. slabě okyselena,
4. zavařena.

Od každého takto připraveného roztoku odměřeny 2 *cm*³ do rourek s Fermiho gelatinou a pozorováno, zda-li a jak rychle se gelatina ztekucuje.

Roztok od ***P*** plísně:

1. část:	za	7	dní	ztekucena	vrstva	18	*mm*,	za 1	den	2·6 *mm*
2. část:	„	5	„	„	„	7	„	„ 1	„	1·4 „
3. část:	„	5	„	„	„	6	„	„ 1	„	1·2 „
4. část:	„	7	„	neztekuceno ničeho.						

Roztok od ***O*** plísně:

1. část:	za	5	dní	ztekucena	vrstva	7	*mm*,	či za 1	den	1·4 *mm*
2. část:	„	5	„	„	„	5	„	„ „ 1	„	1·0 „
3. část:	„	5	„	„	„	7	„	„ „ 1	„	1·4 „
4. část:	neztekuceno ničeho.									

Z uvedeného jest viděti, že enzym ***P*** plísně jest citlivým na reakci prostředí a že nejlíp působí při alkalické reakci. Enzym ***O*** plísně jest, jak se zdá, lhostejnějším vůči reakci prostředí. Nyní též si můžeme vysvětliti, že při pokuse č. 16 (tab. III.) rozklad gelatiny

byl zdržován proti pokusům, kde nebylo přidáno kyseliny, na př. č. 9. Neboť přidáním i tohoto malého množství kyseliny fosforečné snížena byla alkalita prostředí a enzym byl ve své působnosti oslaben. Že u *O* plísně nezpůsobila kyselina fosforečná velkého zvolnění rozkladu gelatiny, pokus s enzymem rovněž vysvětluje, neboť působil i při slabé kyselé reakci.

Ježto působí enzymy tyto nejlépe při alkalické reakci prostředí, budou asi povahy trypsinu, Z roztoku nebylo možným je sraziti. Teprve velkým přebytkem alkoholu se tekutina slabě zakalila; sedlina však nevznikla. Přidáním etheru k tomuto alkoholickému roztoku vznikla nepatrná sedlina.

Mycelium plísně, jež bylo zachyceno na filtru, promyto vodou, rozetřeno s pískem a močeno asi 2 dni ve chloroformové vodě. Roztok tento ztekucoval gelatinu jenom nepatrně, což poukazuje na to, že plíseň vylučuje vytvořený enzym hned do živného prostředí; v buňce samé zůstane ho málo. Gelatina jako koloid blanou buněčnou neprojde. Aby plíseň mohla na útraty gelatiny vegetovat, musí vylučovat enzym do živného roztoku, ve kterém roste.

Je-li enzym, jež plísně tyto tvoří, povahy tryptické, možná že štěpí gelatinu až na hexonové zásady a aminokyseliny. Jest však též možným, že plísně vytvořují enzymů více, z nichž každý způsobuje rozklad jen k určitému stupni. Reich-Herzberger[21]) uvádí, že získal z gelatiny štěpené trypsinem nepatrné množství leucinu (z 50 *g* gelatiny několik centigramů). Při podobném pokusu isoloval Levene[22]) leucin a glykokol. Uvádí dále, že při rozkladu gelatiny trypsinem se tvoří i ammoniak. Tak vzniklo:

po 15 *h*	0·17%	NH_3	z veškerého	N
„ 96 „	0·85%	„	„	„
„ 13 dnech	1·21%	„	„	„
„ 27 „	5·02%	„	„	„
„ 90 „	8·38%	„	„	„

Konečně nalezl K. Shibata,[23]) že *Aspergilus niger* vytvořuje enzym, který odštěpuje z *amidů* ammoniak. Na aminokyseliny nepůsobí; jenom z alaninu a tyrocinu uvolňuje trochu ammoniaku. Jest možným podle nálezů Levenových a Shibatových, že odštěpování aminové skupiny z aminokyselin způsobuje též enzym a plísně te-

[21]) Zeitschr. f. physiol. Chemie, 34, 119.
[22]) Zeitschr. f. physiol. Chemie 41, 8.
[23]) Beiträge zur chem. Physiol. u. Pathol. 5, 384.

prve vzniklé bezdusíkaté sloučeniny při dýchání oxydují. Poněvadž ale se mi nepodařilo dosud vyloučit enzymy z roztoku, ponechal jsem studium této otázky na pozdější dobu.

Blotkewitsch nalezl, že za přítomnosti bezdusíkatých látek rozklad bílkovin jest pomalejší, poněvadž plísně napřed oxydují tuto látku bezdusíkatou. Že plísně některé produkty rozkladu gelatiny spalují až na vodu a kyselinu uhličitou, ukazuje nám pokus *9.*, *10.*, *13.*, *16.*, *17.*, *21.* a *22.* V roztoku gelatiny do baněk odměřeném určena byla sušina. Po pokuse pak byla v roztoku opět sušina stanovena. Součet pak sušiny v roztoku po pokuse s váhou suché kultury jest menším než sušina před pokusem. Ztráta jest tu různou podle toho, jak dlouho plísně na gelatinu působily; obnáší 9·39 až 20·89%. Abych stanovil, zda bezdusíkaté sloučeniny skutečně zvolňují rozklad bílkoviny, přidal jsem do 4 baněk po 4 *g* glycerinu, do jedné as 2 *g* glukosy.

Glycerin zdržel dosti rozklad gelatiny; zvláště u plísně *O.* Méně ammoniaku vytvořila jenom plíseň *P.* Plíseň *O* vytvořila ho sice trochu více než v tom případě, kdy gelatině nebyl přidán glycerin, ale to se vysvětluje dlouhou dobou, která uplynula, než veškerá gelatina byla ztekucena. Hořejší vrstva gelatiny byla dříve ztekucena než vrstvy spodní; tato hořejší partie pak se rozkládá působením plísně dál, a za tak dlouhou dobu, než se celý obsah baňky ztekutil, vzniklo v hořejší již ztekucené vrstvě ono větší množství ammoniaku (viz č. *20.* a *21.*). Ztráta sušiny nebyla tu stanovena, poněvadž nebylo dáno do všech baněk stejné množství glycerinu. Pouze při pokusu *21.* určena v roztoku sušina. Po připočtení váhy kultury nalezeno sušiny, nebéřeme-li ohled na to, že gelatině přidáno před naočkováním plísně 4 *g* glycerinu, o 10·08% méně. Můžeme z toho soudit, že glycerin byl již úplně spotřebován a že plísně kryly spotřebu uhlíku, potřebného ku dýchání, opět z gelatiny. Při pokuse *22.*, kde přidána byla gelatině glukosa, jeví se též značné zpozdění ve ztekucení. Po pokuse nalezena byla v roztoku ještě glukosa. Kvantitativně nebylo však možným ji stanoviti, poněvadž se při vaření tohoto roztoku s Fehlingovým roztokem vylučoval kysličník mědičnatý tak jemný, že procházel i silnou asbestovou vrstvou. Ač analysován byl obsah baňky teprve za 32 dni po ztekucení, nalezeno ammoniaku přece méně než za stejnou dobu při pokuse s pouhou gelatinou (č. *10.*). *O* plíseň sice v gelatině, které přidána byla glukosa, slabě rostla, ale neztekucovala; ani po roce nenastalo ztekucení.

Ve všech baňkách, jež obsahovaly vedle gelatiny ještě glukosu nebo glycerin, narostlo více mycelia. Váha mycelia stanovena tím způsobem, že živný roztok sfiltrován váženým filtrem, mycelium na filtru promyto vodou a potom filtr i s myceliem sušen ve vakuové sušárně při 100° C do konstantní váhy.

V baňkách s gelatinou bez přídavku bezdusíkatých látek byla váha mycelia různá podle množství gelatiny. Ve 100 cm^3 gelatiny (tab II. a č. 2.—7. v tab. III.) narostlo maximálně 0·8 *g* suchého mycelia. Váha mycelia byla tím větší, čím pokus déle trval. Ponechány-li však plísně příliš dlouhou dobu v rozložené gelatině, tu váhy jejich zase ubývalo, jak možno souditi z pokusů 2.—7. (tab. III.), kde váha suchého mycelia obnáší průměrně as 0·59 *g*. Produkty jejich vitalních pochodů jim asi zabraňovaly v dalším vývoji. Starší části mycelia asi odumřely a obsah jeho se autolysou rozložil a difundoval do roztoku, tak že zbyla jenom blána buněčná. Tomu zdá se nasvědčovati množství dusíku v myceliu. Mladé kultury *P* plísně obsahovaly asi 8·5%, *O* plísně 9·7—10% dusíku. Čím starší plísně byly, tím procentické množství dusíku v nich klesalo. Ve 200 cm^3 gelatiny (č. 9—13 tab. III.) narostlo *P* plísně 0·96—1·67 *g*, *O* plísně 0·54 až 1·50 *g* podle doby, jak dlouho pokus trval. V baňce, jíž přidána kyselina fosforečná (č. 16), narostlo velmi málo *P* plísně. Na *O* plíseň přídavek kys. fosforečné v tomtoohledu nepůsobil. Je tedy viděti i z váhy narostlého mycelia obou plísní, že přídavek kyseliny fosforečné škodí hlavně plísni *P*, jak již nahoře bylo dovozeno z doby ztekucení gelatiny, tvorby ammoniaku a chování se enzymů.

Při pokusech, kdy gelatina obsahovala ještě glycerin neb glukosu, neklesla váha suché kultury pod 1·6 *g*; ano při pokuse s glukosou vytvořilo se 2·6 *g* suchého mycelia. Blutkewitsch vysvětluje větší vzrůst plísní a menší tvorbu ammoniaku za přítomnosti bezdusíkatých látek dvojím způsobem. Buď prý bezdusíkaté látky chrání bílkovinu před rozkladem, nebo plísně za přítomnosti bezdusíkatých látek mohou vzniklý ammoniak rychle assimilovat, tak že se v roztoku nehromadí. Druhá domněnka nezdá se mi vysvětlovat dobře menší množství ammoniaku v roztoku. Neboť kdyby plísně v obou případech rozkládaly bílkoviny stejně rychle, ale za přítomnosti bezdusíkatých látek vzniklý ammoniak rychleji assimilovaly, muselo by ztekucení trvati v obou případech stejně dlouho a plísně by obsahovaly dusíku o tolik více, o kolik jest ho v roztoku ve formě ammoniaku méně než v případě, kdy nebyla v roztoku bezdusíkatá látka. Ale tak tomu

není. Přihlédněme na př. ku pokusům č. 10, 19 a 22. Ztekucení gelatiny při pokuse 19 a 22 trvalo mnohem déle.

	N v kultuře	N v roztoku	N v NH_3
č. 9: pouhá gelatina . . .	0·1260 *g*,	1·4543 *g*,	0·5642 *g*
č. 19: gelatina a glycerin .	0·1348 *g*,	1·4805 *g*,	0·4015 *g*
č. 22: gelatina a glukosa .	0·1865 *g*,	1·4140 *g*,	0·3250 *g*

Při pokuse 19. mělo mycelium jen o 8·8 *mg* více dusíku než při pokuse 9., a dusíku ve formě ammoniaku bylo v roztoku o 162·7 *mg* méně.

Při pokusu 22. mělo mycelium o 60·5 *mg* dusíku více, ale v roztoku bylo o 239·2 *mg* dusíku ammoniakového méně. Zbývá tedy ku vysvětlení úkazu, že za přítomnosti bezdusíkatých látek se mycelium lépe vyvine a ammoniaku tvoří méně prvnější domněnka, že totiž bezdusíkaté látky bílkoviny před rozkladem chrání. Tato ochrana asi spočívá tom, že, jak jsem se již nahoře zmínil, plísně spalují při dýchání napřed sloučeny bezdusíkaté a bílkoviny rozkládají jen nepatrně. Proto také trvalo ztekucení déle. Následkem toho se ale na počátku tvoří málo rozkladných momentů, jež by plísním vadily, a plísně pak mohou delší dobu růsti a více se vyvinouti.

Když jsem poněkud objasnil vznik ammoniaku, zkoušel jsem, nedalo-li by se plísní těchto použiti v praxi na výrobu ammoniaku. Především obrátil jsem zřetel ku melase a melasovým výpalkům, jichž dusík se nepodařilo dosud výhodně zužitkovat. Melasa však obsahuje ještě značné množství saccharosy, která asi tvorbě ammoniaku by překážela. Provedené pokusy skutečně ukázaly, že v melase působením těchto plísní ammoniak nevznikl; naopak malé množství ammoniaku, jež v melase bylo, plísně za přítomnosti saccharosy assimilovaly. Ale ani ve výpalkách melasových plísně ammoniaku netvořily. Ve výpalkách vyvinovaly se plísně slabě. Ani pokus přivyknuti plísně výpalkům se nezdařil, poněvadž po několikerém přeočkování odumíraly.

Konečně pokusil jsem se určiti kvalitativně ostatní jednoduché zplodiny rozkladu gelatiny, pokud se daly ve větším množství isolovat. Působením plísní na bílkoviny zabýval se podrobněji dosud jen W. Blutkewitsch a P. W. Butjagin. Výsledky Blutkewitschovy

práce uvedl jsem již nahoře. P. W. Butjagin[24]), jež pěstoval *Penicilium glaucum a Aspergilus niger* na mase, nalezl, že působením jich ubývá sušiny, absolutního množství dusíku, přibývá rozpustných dusíkatých sloučenin, alkalita a množství těkavých kyselin stoupá.

Působením bakterií na gelatinu zabýval se Selitrenny,[25]) Emmerling a Reiser.[26]) Selitrenny nalezl mezi produkty rozkladu; metylmerkaptan, kyselinu fenylpropionovou a glykokol.

Emmerling s Reiserem isolovali mono- a trimetylamin, cholin a betain. Rozkladem gelatiny plísněmi se, pokud mi známo, posud nikdo nezabýval.

Gelatina upravena ku pokusu následovně: 2 *kg* gelatiny rozpuštěno ve 33 *l* vody, přidány výše uvedené anorganické živiny a roztok pak rozdělen do desíti pětilitrových baněk. Potom gelatina frakciovaně sterilisována a po inkubačním stadiu naočkována do 5 baněk plíseň ***P*** a do 5 plíseň ***O***. Asi za 6—9 neděl byl obsah baněk ztekucen. Po 4 měsících po naočkování byly produkty rozkladu analysovány a to u obou plísní stejně:

V odměřeném množství roztoku (500 cm^3) stanoven byl veškerý ammoniak. Na to odměřeno vždy 5 *l* tekutiny do 8litrové baňky, přidáno tolik pálené magnesie, aby dle výše naznačeného předběžného pokusu stačila vypudit veškerý ammoniak a destilováno tak dlouho, dokud přecházel ammoniak, jenž jímán ve zředěné kyselině solné Takovým způsobem zdestilována všechna rozložená gelatina od obou plísní. Na počátku destilace obyčejně se usazoval ve chladiči uhličitan ammonatý. Tekutina v jímadle šuměla unikajícím kysličníkem uhličitým. (Roztok *1.*)

Zbytek po destilaci sfiltrován od zbylého kysličníku hořečnatého a okyselen kyselinou sírovou, načež vytřepáván etherem, by se vyextrahovaly organické kyseliny. (Roztok *2.*)

Ku roztoku po extrakci kyselin přidáno tolik kyseliny sírové, aby jí obsahoval 1%, načež přidáváno tak dlouho kyseliny fosfovolframové, pokud se tvořila usedlina. (*3.*)

---

[24]) Arch. Hyg. 1905, 52, 1.
[25]) Monatshefte f. Ch. 10, 908.
[26]) Ber. d. d. chem. G. 35, 700.

Roztok (*4.*) po odfiltrování usedliny obsahoval hlavně aminokyseliny.

Jednotlivé takto získané podíly analysovány každý zvlášť.

1. Chloridy těkavých zásad.

Roztok získaný jímáním par unikajících při destilaci ve chlorovodíku odpařen na vodní lázni do sucha. Od *P* plísně získáno 375 *g*, od *O* plísně 250 *g* chloridů. Chloridy dobře vysušeny a extrahovány po částech v Soxhletově extraktoru chloroformem po 5 *h*. Ale nevyextrahovalo se ničeho, tak že tercierní a sekunderní aminy, jako na př. tri- a dimetylamin nebyly přítomy. Potom vyluhovány chloridy absolutním alkoholem. Rozpustilo se sice trochu látky, ale byl to chlorid ammonatý, jak ukázala analysa platinové soli. Též isonitrilovou reakci HOFFMANNOVU[27]) na primerní zásady chloridy tyto neskýtaly. Vznikl tedy působením obou plísní *jen ammoniak*.

2. Etherický roztok.

Ether oddestilován a zbytek přeháněn vodní parou, pokud přecházel kyselý destilát. Ze zbylé tekutiny neextrahoval již ether ničeho, tak že etherem vytřepané kyseliny byly všechny těkavé. Destilát neutralisován louhem a k vůli snadnější manipulaci odpařen na vodní lázni na malý objem. Potom uvolněny kyseliny sírovou kyselinou a vytřepány etherem. Ether oddestilován a zbytek frakciovaně destilován.

Kyseliny od P plísně. Při destilaci stoupal teploměr ponenáhle a nejevil žádného stálého bodu varu. Jen při 162° se poněkud zdržel a potom opět pomalu stoupal až asi do 186°, načež rychle stoupl na 280°. Při této teplotě se destilace ukončila. Tekutina rozdělena na 4 frakce: *1.* do 150°, *2.* 150—166°, *3.* 166—186°, *4.* 186—280° Asi do 125° nepřecházelo ničeho. Ani trojnásobným frakciováním nedosaženo u 1. a 3. stálého bodu varu. Druhá frakce vřela asi při 160. až 163°, čtvrtá při 280°. Frakce vážily *1.*: 3 *g*, *2.*: 12 *g*, *3.*: 1·5 *g* a *4.*: 2 *g*.

---

[27]) Ber. d. d. chem. Ges. III. 767.

Kyseliny prvních tří frakcí převedeny ve stříbrnaté soli a ty frakciovaně krystalisovány. V každé frakci krystalů určeno pak stříbro.

Soli první frakce obsahovaly:

54·51, 57·00% *Ag*,

soli druhé frakce:

54·48, 53·21% *Ag*.

Třetí frakce dala jednu krystalisaci se

44·03% *Ag*.

Stříbrnaté soli mastných kyselin mají následující množství stříbra:

propionová	59·64%
máselná	55·34%
valerová	51·64%
kapronová	48·39%

Byla tedy v první frakci *kyselina propionová a máselná*, ve druhé *máselná*, ve třetí nějaká vyšší kyselina.

Čtvrtá frakce krystalicky ztuhla. Barnatá sůl této kyseliny jest ve vodě a alkoholu značně rozpustná. Z vodného roztoku odpařeného do houštky syrupu krystalují bílé lupeny. Na vzduchu sušené obsahují 31·60% *Ba*, při 130° sušené 34·38% *Ba*. Barnatá sůl kyseliny fenylpropionové (b. v 280°) krystaluje ze 2 H_2O a má 31·83% *Ba*; bezvodá sůl obsahuje 34·99% *Ba*. K vůli určitější indentifikaci připraven ještě nitroderivát této kyseliny: 0·5 *g* látky rozpuštěno ve 5 *g* dýmavé kyseliny dusičné a roztok vlit do 22 cm^3 vody, načež směs odpařena na vodní lázni na skrovný objem. Vykrystalovaly žluté jehlice, jež měly b. t. 132°. Aby se oddělila paranitrofenylpropionová kyselina od ortoderivátu, vyvařeny krystaly malým množstvím vody a zbytek třikrát překrystalován as ze 20 cm^3 vody. Tím stoupnul b. t. na 161—162°. Paranitrofenylpropionová kyselina taje při 161—163°.

Kyseliny od O plísně. Frakciovány jako v prvém případě. Získány 4 frakce: *1.*: do 143°, *2.*: 143—165°, *3.*: 165—186°, *4.*: 186° až 280°. Váha jednotlivých frakcí byla: *1.*: 4 *g*, *2.*: 16 *g*, *3.*: 4·5 *g*, *4.*: 1·5 *g*. Stříbrnaté soli prvních tří frakcí měly stříbra:

1. frakce:	2. frakce:	3. frakce:
58·58%	52·64%	52·93%
59·73 „	53·45 „	52·83 „
	54·57 „	52·01 „
	53·98 „	52·37 „
	54·22 „	
	55·29 „	

Byla tedy v první frakci hlavně *kyselina propionová*, ve druhé *máselná* pomísená valerovou, ve třetí pak *valerová,* znečistěná máselnou.

Ve čtvrté frakci byla opětně *kyselina fenylpropionová.*

Třeba zde vytknouti, že gelatina neobsahuje tuku, že tedy nalezené mastné kyseliny vznikly z gelatiny.

3. Sedlina vyloučená kyselinou fosfovolframovou.

Sedlina vyvařena několikrát vodou a roztok za horka zfiltrovná. Nerozpuštěné zbyly sloučeniny gelatos a peptonů jako mazy. Ačkoliv bylo sedliny velké množství, rozpustilo se z ní poměrně málo; převládaly tedy mezi látkami srazitelnými kyselinou fosfovolframovou ještě gelatosy a peptony. Nebyly blíže určovány. Roztok získaný vyvářením sedliny okyselen chlorovodíkem a vytřepán etherem, aby se odstranila kyselina fosfovolframová.[28]) Roztok chloridů zásad oddělen v dělicí nálevce od olejovitě se vyloučivší kyseliny fosfovolframové a sfiltrován, aby se zachytily i drobné kapky v tekutině rozptýlené. Filtrát odpařen. Při odpařování vykrystalovaly drobné jehlice chloridu hořečnatého, jež odsáty. Zbytek odpařen do houštky syrupu; nevykrystalovalo ničeho. Na to syrup zředěn vodou, chlor vyloučen z roztoku kysličníkem stříbrnatým, načež pátráno v roztoku po hexonových zásadách methodou Kossla a Kutschera.[29]) Argininu a histidinu získáno velmi malé množství, jež sotva stačilo na stanovení bodu tání.

Arginin převeden v kupronitrát; měl b. t. 112° (má býti 112 až 114°).

Histidin převeden ve chlorhydrat; b. t. 230°; má býti 231 až 233°.

[28]) E. Winterstein, Zeitschr. f. physiol. Chemie 31, 153.

[29]) Zeitschr. f physiol. Chemie 31, 165.

Z filtratu po srážení argininu sraženo baryum kyselinou sírovou, stříbro sírovodíkem, načež filtrát odpařen na malý objem a zkoušeno chloridem zlatovým, není-li v roztoku cholin neb betain. Nesráželo se však ničeho. Roztok potom odpařen do syrupu a pikrovou kyselinou srážen *lysin*.[30]). Jenom z roztoku od *P* plísně srazilo se trochu pikranu. Z roztoku od *O* plísně nesrazilo se ničeho.

Pikran rozpuštěn ve zředěné kyselině solné, kyselina pikrová vytřepána etherem a zbytek odpařen. Vyloučené krystalky rozpuštěny v metylalkoholu, odpařeno na malý objem a přidáno trochu etylalkoholu. Vykrystalovaly ploché jehlice o bodu tání 192°. (Lysinchlorhydrát taje při 192—193°.)

Filtrát po pikranu lysinu okyselen kyselinou solnou a etherem vytřepána kyselina pikrová. Potom roztok odpařen na malý objem a nasycen plynným chlorovodíkem; vyloučily se jehlicovité krystalky, jež odsáty. Filtrát znovu zkoncentrován a nasycen chlorovodíkem, ale nevyloučilo se již ničeho. Celkem získáno z roztoků od obou plísní as 1·7 *g* látky. Krystalky rozpuštěny ve vodě, kysličníkem stříbrnatým vyloučen z roztoku chlor, načež filtrát odpařen; vyloučily se krystaly lupenovité. Látka tato při vaření s dvojchromanem a kyselinou sírovou vyvinuje fenylacetaldehyd. Roztok její rozpouští za varu hydroxyd měďnatý. Z modrého roztoku krystalují při chladnutí bledě modré lupeny. Reakce tyto by poukazovaly na to, že jest to kyselina fenyl -α- aminopropionová či fenyl-alanin. Ale s fenylisocyanatem nedává látka tato oné význačné, ve studené vodě skorem nerozpustné sloučeniny. Tu při okyselení reakční směsi se nevyloučilo skorem ničeho. Látka tato nezdá se být též opticky činnou, jak jsem mohl při tom malém množství stanovit. Ježto bylo získáno tak málo látky, nebylo možným ji blíže charakterisovat.

Filtrat po krystalcích vyloučených plynným chlorovodíkem odpařen na vodní lázni do houštky syrupu, by se pokud možno vypudil z roztoku volný chlorovodík. Potom syrup zředěn a zbytek chlorovodíku vyloučen kysličníkem stříbrnatým. Filtrat vařen s hydroxydem měďnatým; vznikl temně modrý roztok. Přidáním 50% alkoholu se srazila z tohoto roztoku modrá, poněkud nazelenalá krystalická sedlina, jež odsáta a promyta 50% alkoholem. Při 100° sušená obsahovala tato sloučenina:

$$37{\cdot}23\%\ Cu \text{ a } 8{\cdot}05\%\ N.$$

---

[30]) Zeitschr. f. physiol. Chemie 81, 165.

Filtrat po první sraženině odpařen na malý objem a smísen s přebytkem alkoholu. Srazila se bleděmodrá sedlina, jež po vysušení obsahovala:

38·77% *Cu* a 9·18% *N*.

Z filtrátu po druhé sedlině se ani sebe větším přebytkem alkoholu ničeho nesráželo. I odpařen roztok do houštky syrupu a nechán ve vakuovém exsikatoru v klidu. Asi za 14 dní vykrystalovaly drobné, temně modré krystalky v alkoholu lehce rozpustné. Tato rozpustnost měďnaté soli v alkoholu ay poukazovala na to, že by to mohla být sůl kyseliny l-a-pyrrolidinkarbonové. Ale krystaly obsahovaly jenom 14·12% *CuO*, kdežto by měly míti 27·09%. Ale ani s fenylisocyanatem nedávala sloučenina tato hydantoinu odpovídajícího kyselině pyrrolidinkarbonové. Kdežto hydantoin kyseliny l-a-pyrrolidinkarbonové taje při 143°, získána z této sloučeniny látka tající konstantně při 160—161°.

Jest možným, že tyto tři soli pochází od nějakých oxyaminokyselin neb vyšších diaminokyselin jak nalezl v poslední době Skraup[31].) Solí těchto získal jsem tak málo, že jsem jich nemohl dále studovati.

4. Filtrat po sedlině vyloučené kyselinou fosfovolframovou.

Ku filtratu po sedlině přidáno kyseliny solné a kyselina fosfovolframová odstraněna z roztoku třepáním s etherem podobně jako z roztoku hexonových zásad. Kyselina solná musí se přidati, poněvadž se kyselina fosfovolframová jinak z roztoku špatně vylučuje. Potom sražena z roztoku kyselina sírová hydrátem a poslední stopy chloridem barnatým, načež roztok odpařován. Při odpařování se vylučoval opět chlorid hořečnatý, jenž byl odsát. Když byl roztok odpařen do houštky syrupu, nekrystalovalo již ničeho. I zředěn syrup poněkud vodou a nasycen plynným chlorovodíkem, by se vyloučila případně v roztoku přítomná kyselina glutaminová. Nekrystalovalo však ničeho ani po několika dnech. Proto odpařen roztok za sníženého tlaku do houštky syrupu a aminokyseliny převedeny v ethylestery, jež dále zpracovány methodou E. Fischerovou.[32])

---

[31]) Zeitschr. f. physiol. Chemie 42, 274.

[32]) Zeitschr. f. physiol. Chemie; *33*, 177; *35*, 70, 151, 221; *36*, 268, 462.

Z roztoku od *P* plísně získáno velmi málo estherů (as 1·5 cm^3), tak že nebylo možným je dále děliti. Z roztoku od *O* plísně získáno sice více estherů (as 9 cm^3), ale přece byla frakciovaná destilace a pak analysa jednotlivých frakcí při tak malém množství velmi obtížnou. Po zmýdelnění estherů získáno tak málo krystalických látek, že jsem se u všech kyselin musel omeziti pouze na stanovení kysličníku měďnatého v solech měďnatých a na některé nejvýznačnější vlastnosti aminokyselin. Určení aminokyselin bylo poněkud usnadněno tím, že E. Fischer stanovil, jaké aminokyseliny vznikají z gelatiny při hydrolyse kyselinou solnou.[33]) Ježto bylo získáno v našem případě tak málo aminokyselin, nebylo ani pomyšlení, abych je krystalisací neb pod. mohl dělit a čistit. Proto též nebyl určován bod tání a otáčivost. Ale i kdyby byly tyto konstanty stanoveny, nesloužily by mnoho ku orientaci, ježto aminokyseliny, získané z estherů, jsou *částečně* racemisované, jak Fischer uvádí.[34])

Destilováno za tlaku 60 *mm*, ježto většího zředění jsem nemohl vývěvou dosíci. Frakce děleny při následujících teplotách:

1. —80°
2. 80°— 95°
3. 95°—105°
4. 105°—145°
5. 145°—175°

1.—*3.* frakce zmýdelněny zahříváním na vodní lázni s vodou až do zmizení alkalické reakce, *4.* a *5.* frakce zahříváním s hydroxydem barnatým po 4 hod.

1. frakce. Po odpaření roztoku získán as 1 *g* kyseliny. V alkoholu jest i za horka skorem nerozpustná. Chutná sladce. Roztok kyseliny rozpouští za varu hydroxyd měďnatý barvou temně modrou. Po zahuštění roztoku krystalují temně modré lupeny, jež jsou ve vodě dosti rozpustné. Při 100° sušená sůl obsahuje 33·24% *CuO*, alanin má míti 33·20%. Benzoylprodukt této kyseliny rozpouští se lehce v chloroformu. Glykokol tedy nebyl přítomen, ježto jeho benzoylderivát jest v chloroformu nerozpustným. Byl tedy v prvé frakci jenom *alanin*.

2. frakce. Po odpaření zbyl bezbarvý škraloup v alkoholu částečně rozpustný. Po vyloužení alkoholem zbylo asi 0·5 *g* látky sladce

[33]) Zeitschr. f. physiol. Chemie *35*, 70.
[34]) Zeitschr. f. physiol. Chemie *35*, 70.

chutnající. Benzoylderivát se rozpouští ve vroucí vodě; ale z roztoku se brzo vylučují olejovité kapky krystalicky tuhnoucí. Roztok těchto aminokyselin rozpouští za varu hydroxyd měďnatý modrou barvou. Po odpaření tohoto roztoku zbyly modré lupeny, jež obsahovaly 31·47% CuO. Alanin má 33·20%, leucin 24·58% CuO. Byla to tedy asi *směs alaninu a leucinu*. Přítomnosti leucinu nasvědčovaly ony olejovité kapky benzoylderivátu.

3. frakce. Kyseliny se rozpouštěly též částečně v alkoholu. Nerozpustný v alkoholu podíl (as 0·3 *g*) rozpuštěn ve vodě a roztok vařen s hydroxydem měďnatým. Po odpaření modrého roztoku zbyly bledě modré lupeny, mající 38·17% CuO. Měďnatá sůl kyseliny glutaminové má 38·18%.

Alkoholický roztok aminokyselin 2. a 3. frakce spojen a odpařen. Zbytek rozpuštěn ve vodě a vařen s hydroxydem měďnatým. Temně modrý roztok odpařen na malý objem. Po čase vykrystalovaly drobné, temně modré krystalky v alkoholu poněkud rozpustné. Při sušení fialoví. Na vzduchu vysušené obsahují tyto krystaly 25·16% CuO. Měďnatá sůl neaktivné kyseliny pyrrolidinkarbonové krystaluje se $2H_2O$ a má 25·53% CuO. Sůl *l-α* pyrrolidinkarbonové krystaluje bezvodá a má 27·09% CuO. Byla to tedy asi *i-α-pyrrolidinkarbonová kyselina.*

4. a 5. frakce. Esthery zmýdelněny hydroxydem barnatým a baryum potom vysráženo kvantitativně kyselinou sírovou. Trochu roztoku vařeno s koncentrovanou kyselinou sírovou a dvojchromanem; zápach po fenylacetaldehydu se neobjevil, tak že fenylalanin přítomen nebyl. Ostatní roztok hodně odpařen; ale nekrystalovalo ničeho. I rozpuštěn syrup ve vodě a roztok vařen s hydroxydem měďnatým. Po odfiltrování přebytečného hydroxydu měďnatého odpařen modrý roztok do houštky syrupu. Nekrystalovalo opět nic. Alkohol srážel z tohoto roztoku bledě modrou krystalickou sedlinu, jež po vysušení obsahovala 39·48% CuO. Měďnatá sůl glutaminové kyseliny obsahuje 38·18%, asparageové 40·89% CuO. Byla to tedy asi *směs kyseliny asparagové a glutaminové.* Že fenylalanin nebyl v této frakci přítomen, na to poukazuje i to, že z roztoku měďnatých solí aminokyselin nic nekrystalovalo; a měďnatá sůl fenylalaninu jest ve studené vodě těžce rozpustnou.

Jest tedy hlavním produktem vitální činnosti těchto plísní na gelatině, nepřihlížíme-li ku kyselině uhličité a vodě, ammoniak. V menší

míře vznikají těkavé kyseliny, mezi nimiž převládá kyselina máselná a fenylpropionová. Amino- a diaminokyselin vzniká velmi málo.

Jest ostatně možným, že část těchto posledních sloučenin vznikla z peptonů a albumos teprve při destilaci rozložené gelatiny s kysličníkem hořečnatým.



IV.

Notizen über den südlichen Teil des Kuttenberger Bergbaubezirkes.

(Mit einer Skizze.)

Von Prof. Dr. Heinrich Barvíř in Prag.

Vorgelegt in der Sitzung den 22. Februar 1907.

I.

Es besteht kein Zweifel darüber, dass in der jetzigen Zeit niemand die Eröffnung und Entwässerung der alten Kuttenberger Schächte unternehmen wird, nachdem das Aerar selbst alle Versuchsarbeiten da — hauptsächlich wegen Andrang des Wassers — aufgegeben hat. Leider blieb dabei unermittelt, ob bei Kuttenberg noch Erze in der Tiefe mindestens der alten Silbergruben unverhauen anstehen oder nicht, und in welcher Menge, ob man also mindestens für die Zukunft dennoch irgend eine Hoffnung haben kann, — oder ob der Bergsegen bei Kuttenberg für immer verschwunden ist.

Und doch ist es, glaube ich, denkbar, dass einmal die Zeit kommen wird, in welcher andere, einheimische und fremde Silberlagerstätten mehr oder weniger erschöpft sein werden. Dann werden auch die Preise des Silbers in bedeutendem Masse steigen, man wird sein Augenmerk wiederum auf die alten einheimischen Silberlagerstätten wenden, und künftige Generationen werden mit vervollkommneten technischen Hilfsmitteln und Methoden den Bergbau dort fortzusetzen versuchen, wo die Alten aufgehört haben. Dann wird man sicherlich auch an den Kuttenberger Bergbaubezirk denken, wo im Mittelalter so reiche Schätze gewonnen wurden, dass jene Stadt damals als die reichste Silberbergstadt Europa's, ja des ganzen damals bekannten Kontinentes galt.

Haben nun unsere Vorfahren im Kuttenberger Bergrevier in den alten Silbergruben noch stärkere gute Erzmittel unverhauen zurückgelassen? — Diese Frage erweckt speziell auch ein geologisch-wissenschaftliches Interesse, denn es handelt sich um die Beantwortung der Frage, ob in grösseren Tiefen bei Kuttenberg die Silbererz-Führung anhält, oder schwindet.

Bergrat Theodor Haupt weist darauf hin,[1]) dass die grösste Tiefe der Kuttenberger Silbergruben entweder in den letzten Jahren der Regierung Kaiser Karls IV. oder in dem ersten Viertel des XV. Jahrhunderts vom Wasser überschwemmt und seit jener Zeit nie wieder entwässert wurde. Er glaubt daraus und aus einigen späteren Nachrichten den Schluss ziehen zu dürfen, dass im Tiefsten des Kuttenberger Bergbaues noch recht viel Erz verlassen worden.

Dagegen behauptet Johann Grimm,[2]) man könne aus keiner einzigen älteren Schrift auf verlassene edle Erzanstände schliessen. Von allen Kommissionen werde abgeraten, die alten tiefen Silbergruben weiter zu bauen und die Tiefsten wieder zu gewältigen. Grimm führt aus, dass die Tiefbaue der nach den hussitischen Kriegen wichtigsten Silbergruben: der Eselgrube und Junger „Reussengrube" (= Mladé Rousy) — andere Silbergruben lässt er dabei unerwähnt — noch im Jahre 1530 nicht ertränkt waren, dass jedoch in ihrer grössten Tiefe nicht mehr genug Erze vorhanden gewesen, und empfahl daher nicht, die Wiederaufnahme der alten Kuttenberger Gruben zu unternehmen.

Dazu soll angemerkt werden, dass die grössten Tiefen von mehreren grossen Silbergruben in der Tat und zwar in den hussitischen Kriegen ertränkt und seit jener Zeit nie mehr entwässert wurden. Da die Trokkenlegung dieser Gruben damals nicht durchführbar gewesen, so konnte man nachher bloss in ihren oberen Horizonten arbeiten, wo jedoch die übrig gebliebenen oder neu aufgefundenen Mittel mit der Zeit möglichst vollständig ausgebeutet wurden, und im XVI. Jahrhunderte konnten die Bergleute, ohne die Gruben vollständig entwässert zu haben, keinen Nutzen mehr hier erhoffen. Die amtlichen

[1]) Theodor Haupt: Gutachten über das Bergwerk zu Kuttenberg, Berg- und Hüttenm. Jahrbuch der k. k. Montan-Lehranstalten zu Leoben und Příbram und der k. k. Bergakademie zu Schemnitz, X. Band, Wien 1861, pag. (1—132), 50, 51, 89 u. ff.

[2]) Johann Grimm: Ueber den alten Bergbau von Kuttenberg. Dortselbst pag. (133—200) 91 (Anm.), 194, 195.

Kommissionen des XVI. Jahrhunderts konnten sich aber nicht direkt überzeugen, ob in dem Tiefsten Erze unverhauen anstehen, und konnten dann demgemäss nur zur Auflassung dieser Gruben anraten. Da die letzteren jedoch zu Kriegszeiten mit Wasser angefüllt wurden, so ist es schon deswegen a priori durchaus nicht unwahrscheinlich, dass in denselben noch unverhauene, eventuell sogar einmal noch abbauwürdige Mittel angetroffen werden könnten. Es sollen hier zur Beleuchtung dieser Frage die entsprechenden amtlichen Berichte wörtlich folgen.[1])

1. Bericht der k. böhmischen Kammerräte de dto. 17. August 1530, Prag:

„... so haben wir uns samt dem obersten Berghauptmann in Gelegenheit des Bergwerks erkundigt, und anfänglich auf dem Silberbergwerk neun Gruben im Gebäu befunden, nämlich den Huet Rewter, den Rosenstrauch, den Flaschner, den Zimermundt, den Klingen Schmidt und den Alten Reussen, diese sechs Gebäu, die unterhält E. Kö. Mt. allein, und es läuft alle Wochen bei denselbigen sechs Zechen Unkosten auf das Wasser ungefährlich 125 Gulden R., dementgegen E. Kö. Mt. ungefähr in die 10 oder 12 Gulden Nutzung hat, ... und soviel wir uns erkündigt, *so sein die Tiefsten bei denselbigen Zechen all' aufgegangen*, und die *oberen* Mittel alle verhaut, und können bei uns noch (bei) Anderen nicht befinden, dass bei angezeigten Zechen etwas sonderliches fruchtbärliches Neues zu erbauen sei, es haben sie auch die vorigen Gewerken aus Unhöfflichkeit aufgelassen, und Weiland König Ludwig um der Wasser willen, damit die gehalten werden, annehmen müssen.

Weiter so seien noch zwei zusammengeschlagene Zechen, der Jung Reuss und Esel genannt, gehören den Gewerken zu, jedoch hat E. Kö. Mt. auch Teil daselbst, bei solchen zweien Gebäuen haut man etlichermassen Erz, es kann aber die Samtkosten nicht ertragen, und würdet in das Hangende ein Zwerchort getrieben, darauf man sich vermüt etwas zu erbauen, und wo nun die obbemeldeten E. Kö. Mt. sechs Zechen aufgelassen, so würde der Esel und Jung Reuss auch ertränkt werden. Sollen dann E. Kö. Mt. Zechen um des Esels und Jungen Reussen willen noch länger

[1]) Aus den wortgetreuen, z. T. mit den Original-Urkunden nochmals verglichenen Abschriften in Grafen Sternberg's Sammlung „Kutnomontana" im Archiv des böhm. Museums zu Prag. Vergl. die Auszüge in Gf. Sternberg's: Umrisse einer Geschichte der böhmischen Bergwerke, I. 1. Prag 1836.

gehalten werden, so ist die Fürsorge, wenn man gleich auf dem Zwerchort beim Esel ein Erz erbaute, als dort noch zum Glück steht, es werde der Esel und Jung Reuss die Unkosten allein schwerlich ertragen mögen, und es ist unseres Erachtens in dem Silberberg bei den Zechen, so jetzt in Arbeit sind, wenig Hoffliches mehr zu erbauen ... Es wäre unseres einfältigen Gutdünkens E. Kö. Mt. nützlicher, es würden die Zechen ausserhalb des Stragka-Stollens aufgelassen ... Wiewohl wir Beisorg tragen, es möchte viel Leuten entgegen sein, die ihre Nahrung bei solchen Zechen haben. Damit aber hierinnen mit Bescheidenheit und gegen die Kuttenberger nicht mit Unlieb gehandelt würde, so wäre unser Rat und Gutdünken, dass E. Kö. Mt. der Gemeinde zu Kuttenberg auf die Meinung geschrieben hätte, dass E. Kö. Mt. die oben angezeigten Zechen auf dem Silberberg nun etliche Jahr mit schweren Kosten unterhalten und entgegen kleinen Nutzen geniessen mögen, zu dem allen so sei auch E. Kö. Mt. wunderlich, *dass die Tiefsten alle ertränkt und versetzt*, und nicht mehr dann mit überschwungener grossen Kostung zu gewältigen, und ob dieselben gleich gewältigt, *dennoch* (sei es) *ungewiss, ob in dem Tiefsten etwas zu erbauen*, und dass auch die Mittel *ob den Wassern* allenthalben verhaut seien ...

Wir haben auch der Gemeinde jetzund zu Kuttenberg fürgehalten, dieweil sie sehen, dass die Zechen, so man jetzund auf dem Silberberg arbeitet, gar im Fall seien, und sie ihre Nahrung allein von dem Bergwerk haben, dass sie doch selbst raten wollten, womit dem Berg mit etwas Neuem zu helfen seie. Darauf sie uns angezeigt, es wären noch fünf alte ertränkte Zechen, nämlich der Zapzoch, Jorgen, Zimpa, Engel und Krieg, die waren noch nicht so tief als die anderen obbemeldeten Zechen verhaut und versunken, und es sollte auch noch an viel Orten das Erz am Anbruch stehen, und so man bei dem Krieg das Wasser gewilligt, so möchte man die anderen Zechen damit trocknen, und würde solchergestalt ein gewahrlich langwähriges Bergwerk erbaut werden. Darauf (haben) wir ihnen zu verstehen (ge)geben und (zu) erwägen, dass nicht die Unkosten grösser denn der Nutzen seien ...

Ferner so haben wir auf dem Gebirg zu Kuttenberg gegen zweien Stunden nach Mittag, da alle Hauptkluft hinfallen, einen alten Schurf zu gewältigen aufgenommen, der seit der Deutschen Austreibung, wie man sagt, nie geöffnet worden, und daselbst der Gang am Tag bei einer Ellen breit, und im

Gang einen Strich dreier Finger breit mit gutem Erz durchfahren befunden, welches der Centner XXVII Mark Silbers gehalten.[4]) Und dieweil dann dasselbe Gebirg noch ganz unerschrotten ist, und alle Kuttenbergische Hauptgänge daselbsthin streichen, und sich dermassen edel und mächtig erzeigt, seien wir ungezweifelter Hoffnung, sofern man in demselben Gebirg bauen (möchte), es würde sich ein neues namhaftiges Bergwerk erregen (lassen); wie es sich aber in der Tiefe desselbigen alten Schurf(es) erzeigen wird, das werden wir kürzlich erfahren."

Ein Schreiben des Königs Ferdinand vom 12. Mai 1536 enthält eine Antwort „wegen Auflassung der Gruben zum Esel genannt zu Kuttenberg samt ihren anhangenden Zechen, darbei keine Hoffnung zu erwarten, sondern alle verhaut und ertränkt seien."

Die Kuttenberg'sche Bergwerks-Reformation vom Jahre 1551 sagt darüber Folgendes:

„Silberbergwerk. Auf dem Silberbergwerk findet man im Augenschein, auch aus alten Schriften und Berichten, dass es ein beständiges, gewaltiges Bergwerk, dergleichen man nicht bald findet gewesen, und bei langer Inhabung gebaut. Aber in dem Krieg, so Kaiser Sigmund im Lande gehabt, der Kuttenberg und (auch das) Bergwerk verbrannt, verwüstet und ertränkt. Und (es wurden) letztlich hernach etliche Zechen von dem Bergwerk durch die Behaim wiederum gewältigt und aufgenommen, und eine Zeit lang ansehnlich Erz in den verfahrenen Mitteln mit grossem Ueberlauf gewonnen. *Aber gleichwohl dabei die alten Tiefsten verstürzt und ertränkt, und etliche Züge gar nicht gewältigt worden.*"

Der von dem obersten Bergbauptmann Christoph von Gendorf im Jahre 1557 an den König erstattete Bericht[5]) erwähnt, es sei nach den Verheerungen des Hussitenkrieges der einzige Zug am Gange, der Esel genannt, durch die böhmischen Bergleute gewältigt worden, und *selbst dieser nicht bis auf das Allertiefste*, doch so, dass bis zu König Ludwigs Regierung sich allda reichhaltige Ausbeute ergeben. Die übrigen Züge seien nie mehr gewältigt worden, so notwendig es auch gewesen wäre. Nachdem aber am Esel auch die dermaligen Tiefsten verhauen und verlassen worden, so habe man die mittleren und oberen angegriffen, und dem

---

[4]) Nicht 37, wie Gf. Sternberg I. 1, pag. 99 angibt.

[5]) Gf. Sternberg, I. 1, pag. 115, 116.

Könige wäre übel geraten worden, diesen Zug so lange zu halten, wobei wohl 100.000 Gulden verloren worden.

Aus den mitgeteilten Berichten folgt also ganz unzweideutig, dass die wichtigsten Silbergruben des Kuttenberger Bezirkes in den hussitischen Kriegen ertränkt und seit jener Zeit in ihrem Tiefsten nie mehr trocken gelegt wurden. Hauptsächlich nur über die berühmte Eselgrube, welche damals auch verstürzt wurde, und sich in der Folge wahrscheinlich ebenfalls mit Wasser füllte, besitzen wir bisjetzt auch meines Wissens erst aus dem Jahre 1557 eine ausdrückliche Mitteilung, dass auch dort das vor den hussitischen Kriegen erreichte Tiefste nie gewältigt worden. Und Joh. Grimm bemerkt (pag. 195), diese Ansicht wäre erst später aufgetaucht und stütze sich „wie auch aus dem Berichte Gendorfs vom J. 1557 hervorgeht, bloss auf ungewisse Erinnerungen und unsichere Aussagen älterer Bergleute, keineswegs aber auf eine durch Urkunden beglaubigte Tatsache".

Abgesehen davon, dass in dem vom Gf. Sternberg publizierten Auszuge aus dem Berichte Gendorf's bei dieser Stelle überhaupt kein Hinweis auf Erinnerungen und Aussagen älterer Bergleute enthalten ist, haben wir aus dem J. 1531 eine Nachricht, welche man leicht für dem Berichte vom Jahre 1557 entgegengesetzt halten könnte. Im Jahre 1531 mass der Markscheider Sigmund Prášek die Tiefe der Eselgrube[6]) und bemerkt in seiner Beschreibung schliesslich: „darunter" (unter dem Haspel Havířský) „ist nun das rechte Tiefste, welches weiter zu bauen unterlassen worden aus Ursachen, dass sich der Gang auf einer Fläch wie an einem Flez abgestossen, und unartiger Stein worden, also dass keines Erzes ferner zu hoffen gewest." Da sind nun zwei Fälle möglich: entweder hatte man das alte reiche Tiefste der Eselgrube nach den hussitischen Kriegen wieder gewältigt und baute da weiter, bis man an eine Verwerfung stiess, — oder man hatte dasselbe nicht mehr vollständig gewältigen können und arbeitete dann nur in höheren Horizonten, resp. nach anderen Richtungen weiter. Ich möchte den zweiten Fall für wahrscheinlicher halten. Selbst die von Vysoký publizierte Urkunde, welche aus der zweiten Hälfte des XVI. Jahrhunderts stammt, bemerkt zu der Beschreibung Prášek's: „Es hat sonst wohl mehr Strecken und Haspel, die sich wiederum

[6]) Ernst Vysoký: Ueber die Teufe der Grubenbauten in Kuttenberg. — Oesterr. Zeitsch. für Berg- und Hüttenwesen, 1856, pag. 365—388.

oben anfangen, aber hierin nichts davon gemeldt, und wann dasselbige, alles Wasser abgezogen, Haspel und Strecke zusammengerechnet wird ... "

Und warum hat Prášek die Tiefe der Eselgrube damals gemessen? Ich meine, dass kaum etwa zu dem Zwecke, um nur die Tiefe des tiefsten Kuttenberger Schachtes zu bestimmen, sondern deswegen, weil es sich um die Entscheidung handelte, ob es möglich wäre, zu den tiefen Strecken der Eselgrube einen neuen Richtschacht vom Tage aus zu errichten. Ich ziehe diesen Schluss aus der im Jahre 1537 verfassten Kommissions-Relation über den Zustand des Kuttenbergischen Bergwerkes, wo Folgendes berichtet wurde:

„Zum ersten haben wir befahren und besichtigt im Esel ein Ort, wird genannt Vaněk Pražský, mehr ein Ort, wird genannt Pan Drasij, auf diesen beiden Ortern befinden wir, dass itzund keine nützlichere Gebäude mögen angestellt werden dann itzund angestellt sind, ob man gleich willens wäre diesen oder anderen Ortern des Orts zu Hilfe zu kommen mit einem Richtschacht, so ist es nicht möglich durch das Quergestein ohne merkliche grosse Unkosten, und noch viel unmöglicher einem Markscheider die Ortung rauss an Tag zu bringen,[7]) (so aber die Alten solche vor viel Jahren hätten fürgenommen, ehe es alles also wild verkrüppelt worden wäre, hätte es geschehen mögen, dass merklicher Unkosten abgelegt worden wäre, wie wohl gottlob auf beiden Ortern gut Erz bricht und steht für sich und über sich)."

Sonst darf man freilich auch nicht übersehen, dass Prášek im Jahre 1530 „auf demselben Zuge" auch die Tiefe der Flaschner-Grube gemessen hat, und dass auch da in demselben Horizonte wie in der Eselgrube Gänge und Trümer ihren Abschluss fanden, die Erze verschwanden und Wasser zum Vorschein kam. Die in der Eselgrube angetroffene Verwerfung reichte also noch weiter. Wird es jemals möglich sein, dieses tektonisch-geologische Problem — sei es nur vom Tage aus — näher zu verfolgen?

Weiter tritt die Frage heran, ob in dem Tiefsten der ganz bestimmt in den hussitischen Kriegen ertränkten und seit jener Zeit nie wieder vollständig gewältigten Silber-

---

[7]) Wäre jenes Problem auch für die Zukunft unlösbar?

gruben mindestens so viel Erz anstehend zurückgeblieben ist, dass die Alten jene Stellen noch für abbauwürdig hätten halten können.

Dazu gibt uns folgende Nachricht[8]) eine, glaube ich, bemerkenswerte Antwort. Kuttenberg wurde im Jahre 1424 von Žižka eingenommen, verbrannt und die Berggebäude wurden zerstört, namentlich wurde auch der Eselschacht bei vollstem Erzanbruche in einer Tiefe von 572 Lachtern (böhm. Mass)[9]) verschüttet. Žižka wollte, wie sich der gleichzeitige oberste Münzmeister Ptáček von Waldstein ausdrückt, durch die Verschüttung dieses Schachtes verhindern, dass seine Feinde aus demselben täglich *122* Bulgen[10]) des reichsten Silbererzes zu fördern im Stande wären. Derselbe oberste Münzmeister forderte zur Wiedererhebung des ganzen Kuttenberger Bergbaues von dem Könige Sigismund die Kosten zur Gewältigung dieses einzigen Eselschachtes, mit dessen Ausbeute er dann den sämtlichen, damals mit 30.000 Mann belegten Kuttenberger Bergbetrieb in bauhaften Stand bringen wollte. — Wozu sollten nun damals die ertränkten und verstürtzten Gruben wiedererhoben werden? Selbstverständlich nur dazu, um in denselben wieder den Abbau fortzusetzen, d. i. mit anderen Worten: in dem Tiefsten der alten ertränkten Silbergruben ist soviel Silbererz unverhauen der Zukunft erhalten geblieben, dass die Alten an jenen Stellen einen regelmässigen und dauernden Abbau für möglich hielten.

In dem eigentlichen Kuttenberger, sowie in jenem in und bei der Stadt Gang befindlichen Bergbaubezirke sind jetzt in sehr grossen Hohlräumen der alten Verhaue ungeheuere Wassermassen angehäuft. Die einen Räume hangen mit den anderen oft mannigfach zusammen. Eine zweckmässige Entwässerung könnte nur auf diejenige Weise ausgeführt werden, dass man planmässig sukzessive zuerst die nördliche, dann die südliche Abteilung möglichst ganz und möglichst tief entwässern möchte. Es wäre ein sehr grosses Unternehmen, und

---

[8]) Fr. Ant. Schmidt: Chronologisch-systematische Sammlung der Berggesetze der österr. Monarchie. I. Bd. Wien 1832, pag. XXXII.

[9]) ein Lachter = 3 Prager Ellen = 1·778 *m*, ein Dumplachter = 4 Prager Ellen = 2·372 *m*. Sollte diese Tiefe im vertikalen Sinne verstanden werden, so wäre sie bedeütend grösser als jene von Prášek im J. 1531 gemessene, es würde sich also in der Tat um eine andere Abteilung des Eselgruben-Komplexes handeln!!

[10]) Bulg = wohl etwa 10 Eimer.

durch gewöhnliche Wasserhebungsmaschinen kaum ausführbar. Auch müssten zu diesem Zwecke bei der Stadt Kuttenberg einige neue Zugänge zu den alten Schächten in den südlichen Abhängen beim Bach angelegt werden. Es ist jedoch meines Erachtens für alle Zukunft nicht alles verloren. Man könnte ja zu jenem Zwecke einmal auch die Wasserkraft des nahen Elbeflusses benützen, welche in elektrische Energie überführt, nötigenfalls auch mehrere Jahre lang das Wasser aus den ertränkten Schächten schöpfen würde. Nach hinreichender Abführung der Wässer könnte man desto leichter und ohne bange Sorgen auch zur Untersuchung jener Gebiete schreiten, welche vom Tage aus noch nicht hinreichend durchkuttet worden — ich möchte vor allem an das zwischen der Stadt Gang und dem Lorec in Kuttenberg befindliche Gebiet denken.

Ob jedoch aus den in den alten Silbergruben zurückgelassenen Mitteln jemals noch ein neuer Bergsegen wirklich entstehen wird — diese Frage lässt sich heute noch nicht beantworten und muss späteren direkten Untersuchungen und fachmännischen Berechnungen überlassen werden.

II.

Joh. Grimm hielt — den früheren Ansichten entgegen — den südlichen Teil des Kuttenberger Bergbaubezirkes für arm und empfahl zur weiteren Untersuchung eher den nördlichen Teil, und hauptsächlich befürwortete er den Skalker Bau anzugreifen. „Die Alten richteten ihr Augenmerk", sagt er,[11]) „zur Aufnahme neuer Gruben bloss an den südlichen und südöstlichen Revierteil. Sie liebten ansteigende Gebirge und setzten in ihnen eine bessere Erzführung voraus. Die Erfahrung entsprach nicht den Erwartungen. Alle in jenem Teile unternommenen Bergbauversuche missglückten. Es ist dies eine Tatsache, worüber die Beschaffenheit der dort vorwaltend abgelagerten Gesteine die Aufklärung liefert."

Im Gebiete der Skalka haben sich jedoch die Erwartungen Grimm's nicht bewährt. Die erzführende Zerklüftung ist dort im ganzen nicht stark genug entwickelt, und auch die angetroffene Erzmenge war nicht zufriedenstellend. Die Skalka hat übrigens schon mehr als einmal enttäuscht. Bereits im Jahre 1768 zeigte sich der

[11]) l. c. pag. 196.

Skalker Gang nicht mehr bauwürdig.[12]) Und *die wichtigsten alten Silbergruben befanden* sich nicht in dem Rejzský Gangzuge (Reissen-G. Z.), wie Grimm annahm, sondern *im Bereiche der Stadt Kuttenberg selbst,* also *in dem südlichen Teile des Reviers.*[13]) Die wirklichen lokalen Verhältnisse waren also grösserenteils umgekehrt als Grimm voraussetzte. Er selbst zitiert ja noch einen Bericht vom Jahre 1588 (pag. 161), nach welchem in dem Ganger Gebiete sich ein grosser Silbergehalt und mehr Bleiglanz mehr gegen Mittag hin zeigte. Auch die Richtung einiger Gangzüge macht den Eindruck, als wie wenn im südlichen Teile des Reviers ein gewisses Zentral-Gebiet der erzführenden Hauptklüfte vorhanden wäre.

Die Alten kannten die Veränderlichkeit der Erzführung und Kluftbildung bei Kuttenberg ganz gut, sowohl im allgemeinen,[14]) als auch für den Übergang der Gänge in andere, namentlich amphibol-

---

[12]) Joh. Georg Megerle von Mühlfeld: Merkwürdigkeiten der k. f. B. Kuttenberg und des daselbst befindlichen Silberbergwerkes. Wien 1825, pag. 190.

[13]) Vergl. Barvíř: O poloze některých dolů Kutnohorských (Über die Lage einiger Kuttenberger Schächte), Hornické a Hutn. Listy (Prag), VII. Jahrg., 1906, pag. 17—20.

Andere meine Mitteilungen über Kuttenberg:

Konec pokusných prací u Kutné Hory? (Schluss der Versuchsarbeiten bei Kuttenberg?). Daselbst IV, 1903, pag. 33—34.

Přehledné zprávy o některých našich místech zlato- a stříbronosných z poslední čtvrti 16. století (Uibersichtliche Nachrichten über einige unsere gold- und silberführende Lokalitäten aus dem letzten Viertel des XVI. Jahrhunderts), daselbst, IV, pag. 154, 155, 167—169.

Dodatek ku článku O poloze některých dolů Kutnohorských (Zusatz zu d. zuerst genannten Aufsatze), daselbst VII, 1906, pag. 70—71.

Další poznámky k otázkám Kutnohorským (Weitere Bemerkungen zu den Kuttenbergischen Fragen), daselbst VII, 1906, p. 100—103.

Grimm kam auf seine Idee durch eine falsche Auffassung der Berichte vom J. 1530, 1537, 1542 und 1588. Möglicherweise verleitete ihn auch eine gewisse Ähnlichkeit der deutschen Benennungen: Junge Reussen-Grube (böhmisch: Mladé *Rousy*) und Reissen-(Reussen-)Zug (böhmisch: *Rejzské* pásmo), obwohl er dies bestreitet. Vergl. übrigens seine Abh. pag. 157, 158, 166, *167*, 170, 171. — Sonst, kannte er z. B. nicht die Identität der *„Kavčí hory"* und des *„Tollner Zuges"* obwohl die amtliche Relation vom Jahre 1551 (Bergwerk Kuttenb. Reformation) ausdrücklich sagt: *„eine* (Zeche) *auf dem Kavčí hory oder Tolnperk genannt"*.

[14]) wie dies aus der Beschaffenheit der alten Baue erhellt, von schriftlichen Nachrichten vergl. z. B. Jan Kořínek: Staré Paměti Kutnohorské, Orig. ausg. Prag, 1675, pag. 170, den Schluss meines Aufsatzes O poloze někt. dolů Kutnohorských u. a. m.

führende Gesteine, wie man sich davon im 19. Jahrhundert am Gutglück (Kuklík) überzeugt hat.[15])

Im XVI. Jahrhunderte legte man besonders grosse Hoffnungen in den südwestlichen Teil des Kuttenberger Reviers und zwar nicht etwa wegen eines „ansteigenden Gebirges" — ein solches besteht da überhaupt nicht, sondern deswegen, wie es bereits oben aus einem amtlichen Berichte v. J. 1530 angeführt wurde, weil sie dort ein reiches Silbererz angetroffen hatten. Deswegen sollen hier noch weitere amtliche Berichte über diesen Fundort, zum Teil in wörtlicher Wiedergabe folgen.

Im J. 1532 zeigt Cristoph von Gendorf an,[16]) dass sich auf einer Herrschaft nächst Kuttenberg, gegen welche alle Hauptgänge ihr Streichen haben, ein namhaftes Bergwerk mit beinahe ganz gutem Erze in einem unverhauenen Gebirge befände, dessen Bau jedoch der Besitzer Georg Háša aus dem Grunde verweigerte, weil er besorgte, dass die ihm zufolge der Fristung und Begnadigung des Königs Ludwig zustehende Obrigkeit unter das Gericht zu Kuttenberg eingezogen werden würde. Er riet daher an, mit diesem Edelmanne, bei welchem schon Markgraf Georg von Brandenburg und andere vornehme Edelleute eigene hundert Gulden zum Beginnen des Bergbaues hinterlegt hatten, einen ordentlichen Verkaufsvertrag abzuschliessen.

Im J. 1537 berichtet eine aus fremden Bergleuten bestehende Kommission (zweien von St. Annaberg, zweien von St. Joachymstal, einem von Kromau und zweien von Elischau, die mit zwei Bergleuten von Příbram das Kuttenberger Bergwerk besichtigt hatten):

„Zum anderen ist eine Zeche, heisst der Friede mitsamt den Massen, darnach ein sehr schönes hoffliches Gebäude, welche auf

---

15) Vergl. Adolf Grimm, k. k. Berg-Assessor in Kuttenberg: Über die Einwirkung des Nebengesteins auf die Metallführung des Kuttenberger Bergreviers. Jahrbuch für den Berg- und Hüttenmann des österr. Kaiserstaates, herausg. v. Joh. B. Kraus, 2. Jahrgg., Wien 1849, pag. 58—62. — Aus der anhaltenden Mächtigkeit der N—S Klüfte am Gange und in dem Kralitzer Zuge und aus dem Vorhandensein von Amphibolit-artigem Gestein in der Nähe der Ziegeleien südlich unweit von Kuttenberg schloss ich, dass der Kralitzer und der Esels-Gangzug hinter diesem Gestein weiter gegen Süden erzführend fortsetzen dürften und halte die entsprechenden Stellen für einer gründlichen Untersuchung wert.

16) Joh. Megerle: Merkwürdigkeiten etc. pag. 150—151.

unser gnädigen Herren Gründen keineswegs liegen bliebe, denn alldo schön Rotguldenerz bald unter dem Rasen in der Gänze bricht; dieweil dieser Gang wassernötig ist, . . ."

Kuttenbergische Bergwerks-Reformation vom J. 1551 führt Folgendes an:

„Nun aber haben solche Gänge ihr Streichen auf Maleschow zu, und sind daselbst hin noch nie abgebaut oder verschrotet worden, nur allein was bei der Zeche Zum Friedt genannt geschehen. Da man dann befunden, dass die Gänge am selbigen Ort nicht wenig edel als zum Kuttenberg seien, und ist gar ein grosser Trost und Hoffnung, dass man derselbigen Enden, wo man anders (für) die Wässer, nachdem es wassernötig ist, (einen) Weg erdenkt, *einen neuen Kuttenberg aufrichten möchte.* Und zur Erkundigung solcher Gänge und (des) Bergwerks möchte auch am Bach ein Suchstollen zwerch über die streichenden Gänge getrieben, und dann auf den Gängen ein Stollen weiter nachgeführt, und darauf gesunken, und Gebäu vorgenommen werden. Es hat aber auch den Mangel, dass sich der Jan Salawa auf denselbigen Gründen, dieweil sie zu seinem Erbgut Maleschow gehören . . . Und es seien auch Gewerken, die sich um das Gebäu zum Friedt auf denselbigen des Salawa Gründen wiederum annehmen wollten."

Im J. 1556 stattete der oberste Berghauptmann Christoph von Gendorf an den König einen Bericht, in welchem er bemerkt,[17]) wo noch etwas auf dem Kuttenberger Bergbaue zu hoffen bliebe, wären die Gänge auf des Herrn Salawa Grunde, wo man die Zeche Pokoj zu gewältigen angefangen, aber wegen Zudrang der Wässer behindert wurde; an jenem edlen Gebirge liesse sich ein Versuch machen.

In der Relation der Kuttenbergischen Kommissarii vom J. 1567 findet man folgende Worte:

„Nun hat aber Einer vom Adel, Hans Salawa, sein Erbgut Maleschau genannt, gar nahe von hinnen und dem Bergwerk mit Teichen, Wäldern, Gründen, ganz wohl gelegen, dahin auch die meisten Gänge und Züge vom hiesigen Bergwerk in ein ganz unverhautes Feld und Gebirg streichen, allda allbereit vor Jahren Gänge erschürft und entblösst, auch Zechen aufgeschlagen, gut wohlhältig Erz erbaut, aber der grossen zugehenden Wasser halben die Kosten nicht ertragen, und derhalben nicht

[17]) Gf. Sternberg, l. c. pag. 116, 117.

erhalten werden mögen; es ist aber nicht zu zweifeln, wo man sich auf denselben Gründen rechtschaffen einlassen und tapfer bauen (möchte), es würde *ein neuer Kuttenberg der Enden zu erregen sein* . .“ Weiter wird der Ankauf des Maleschauer Gutes anempfohlen.

Auch im Jahre 1581 geschieht in einem Berichte Wilhelm's von Oppersdorf in ähnlichem Sinne eine Erwähnung von den maleschauer Bergwerken,[18]) der Grube Pokoj, wo Spiesglanzerze gebrochen, und der Grube Svornost, wo Quarz mit Rotgülden 80 Mark gegeben haben soll,[19]) welche beide wegen Andrang der Wässer verlassen wurden. Und noch im Jahre 1591 versuchte der Staat am Pokoj zu bauen,[20]) doch musste die Grube, obwohl sie gute Anbrüche gehabt, schliesslich doch wieder des Wassers wegen verlassen werden.[21])

Da die Alten im XVI. Jahrhundert für die Zukunft in die Aufnahme der ertränkten Zechen Pokoj (Friede) und Svornost (Eintracht) so grosse Hoffnungen legten, dass sie erklärten, es dürfte dort ein neuer Kuttenberg entstehen, so halte ich jene Stellen für sehr wichtig — mindestens vom geologischen Standpunkte — und habe mir Mühe genommen dieselben auszusuchen. Dabei legte ich das Hauptgewicht auf die in den amtlichen Berichten mehrmals wiederholte Angabe, dass jene Gruben sich auf dem Boden des Maleschauer Gutes befanden. Dort konnte ich jedoch lange keine erwünschten Anzeichen treffen, und in den bisjetzt publizierten Karten werden in jenem Gebiete auch keine Bergbaureste verzeichnet. Joh. Grimm war bezüglich der Grube Pokoj der Meinung (pag. 169), dass dieselbe „vielleicht jener noch durch mehrere alte Halden kennbare verfallene Bau oberhalb der Schmelzhütte bei Poličan ist, der in jüngster Zeit mit dem Spálený-Stollen unterfahren und untersucht wurde. Man hat wohl einen Erzgang mit diesem Stollen auf eine weite Erstreckung verfolgt, aber ausser wenig Grauspiesglanz kein anderes Erz in der Gangmasse aufgeschlossen, und sonach die Lagerstätte als aussichtslos und unhöfflich verlassen müssen.“ — Derjenige Stollen jedoch bei der Spálený-Mühle, welchen ich bisjetzt gesehen habe, ist nur kurz, und

[18]) Gf. Sternberg, l. c. pag. 143.
[19]) Vielleicht sind die Grubennamen hier verwechselt worden?
[20]) Megerle, l. c. pag. 165.
[21]) Gf. Sternberg, l. c. pag. 162.

sollte auch ein anderer da gemeint werden, falls man in dem letzteren nur wenig Antimonit fand, so traf man noch nicht jene Stellen, an welchen die Alten Rotgültigerz hatten.

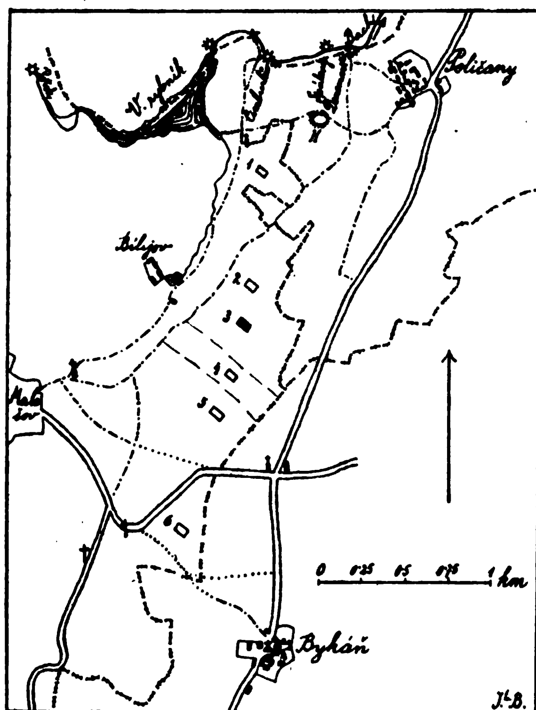
Die Angabe des Berichtes vom J. 1530 „gegen zweien Stunden nach Mittag" gibt Graf Sternberg (I. 1. pag. 98) durch „gegen Süden, etwa 2 Stunden" wieder und bemerkt dem Sinne nach richtig: „So weit gegen Süden findet man dermalen auch nicht die geringste Spur eines Bergbaues; es ist freilich in jener Gegend alles Feld, folglich eingeebnet, oder es ist die Orientierung nicht richtig, und die südwestliche Gegend unter der alten Schmelzhütte verstanden, welche aber auch kaum so weit reichen dürfte; vielleicht sollte es heissen: in Süden, etwa in der zweiten Stunde (nach dem Kompass)."

Sucht man von Kuttenberg aus nach der in jener Urkunde vom J. 1530 angegebenen Richtung, so muss man freilich vor allem an die damalige Einteilung des Kompasses denken, und damals teilte man den Kompasskreis in zweimal 12 Stunden. Deswegen bedeutet die Angabe „gegen zweien Stunden nach Mittag" eigentlich (ohne Rücksicht auf die Deklination) gegen 30° von S gegen SW, oder wenn man die Grenzen breiter zieht, $1^1/_2$ bis $2^1/_2$ Stunden $= 22^1/_2{}^0$ bis $37^1/_2{}^0$ ohne Rücksicht auf die Deklination. Betrachtet man nun etwa von dem zentralen Teile der Stadt Kuttenberg aus die Richtung circa 30°, oder mit Rücksicht auf die Deklination circa 20° von S gegen SW, so trifft man die südwestliche Umgebung von Poličan, oder den östlichen Rand des zu der Maleschauer Gemeinde gehörigen Gebietes; weil aber die genannten Gruben nur in dem Maleschauer Gebiete zu suchen sind, so wird die Poličaner Umgebung in dieser Frage ausgeschlossen. Und in der Nähe der östlichen Maleschauer Gemeindegrenze fand ich in der vom Jahre 1838 stammenden Katastralkarte, welche in dem k. k. Katastralkarten-Archiv in Prag aufbewahrt wird, [22]) eine Reihe von sechs kleinen Parzellen eingetragen (1 bis 6 in der beigefügten Skizze), deren jede mit einer eigenen Nummer und mit Zeichen von Gebüsch versehen ist. Die Dimensionen einer jeden derselben

---

[22]) Ich benütze die Gelegenheit, dem Vorstand Herrn Heinrich Šafránek für seine freundliche Genehmigung zur Durchsicht bereits mehrerer Katastral-Karten zu wissenschaftlichen Zwecken an dieser Stelle meinen wärmsten Dank auszusprechen.

betragen nur etwa 40 *m* an Länge und 20 *m* an Breite. Da ich bereits von mehreren Fundorten eine entsprechende Erfahrung habe, dachte ich sofort daran, dass hier Stellen alter Gruben vorliegen. In der neueren Katastralkarte werden diese Parzellen nicht mehr geführt, sie wurden bereits mit den sie umgebenden Feldparzellen verbunden:



Gemeindegrenzen.

	früher Parz.-Nro.	jetzt verbunden mit Parz.-Nro.
1.	876	877_1
2.	887	880 zu Parz.-Nr. 887
3.	884	887
4.	909	910 zu Parz.-Nr. 909
5.	905	906
6.	914	913.

In der Natur findet man in fünf Fällen bereits keine Merkmale nach irgend früheren Halden und Pingen vor, die Oberfläche ist vollkommen eben, nur hie und da bemerkt man bei eifrigerem Suchen Stücke von Gangquarz in der Ackererde oder neben dem Felde ausgeworfen, an der Stelle der 3. Parzelle jedoch bestehen noch Überreste von einer alten, in (zweiglimmerigem, dünnplatigem) Gneis gehauenen Grube und der zugehörigen Halde. Die Grube ist zwar schon fast vollständig verschüttet, man wirft ja in dieselbe auch alle an dem Felde gesammelten Steine hinein, der Befund bestätigt jedoch, glaube ich, in hinreichendem Masse meinen Schluss, dass an jenen Parzellen einst alte Gruben gewesen. Und bei Berücksichtigung ihrer Lage gegen Kuttenberg komme ich auf die Idee, dass unter den letzteren sich auch die einstigen Gruben Pokoj und Svornost befanden, auf welche die Alten im XVI. Jahrhundert ihr Augenmerk richteten. Ich glaube dies umsomehr, weil die Urkunde vom J. 1567 deutlich von mehreren Zechen spricht, unter welchen auch die Zechen Pokoj und Svornost zu suchen wären.

Mein Fund hat wohl, falls nicht eben eine praktische für die Zukunft, so doch eine geologische Bedeutung schon aus dem Grunde, weil da eine besondere — eventuell zusammengesetzte — Reihe von alten Gruben oder Pingen verraten wird, deren Lage und Richtung sicherlich nicht jede Beziehung zu der Lage und den Richtungen der Kuttenberger Gangzüge entbehrt. Darüber beabsichtige ich nach Tunlichkeit weitere Untersuchungen vorzunehmen.

III.

In dem südlichen Teile des Kuttenberger Bergbaubezirkes baute man in alter Zeit auch im Gebiete der Poličaner Gemeinde. Es gab da Gruben und Stollen, von welchen uns jedoch nur wenige deutliche Spuren übrig geblieben sind, z. B. der bei der Denemark's Mühle befindliche Stollen. Es verdient also auch dieses Gebiet eine genauere Untersuchung, mindestens zu geologischen Zwecken. In dem königl. böhm. Landesarchiv befindet sich eine Abschrift einer Urkunde vom 17. Okt. 1569,[23]) in welcher sich der ob. Münzmeister Karl von Biberstein dagegen ausspricht, dass das Dorf Poličan dem Wilhelm von

[23]) Das Original im k. k. Reichsfinanz-Archiv in Wien.

Malowetz abgetreten werde, und seine Ansicht mit folgenden Worten begründet: „so seindt auch auf diesen Gründen alte Stolln und Schächte, dass vor Jahren Bergwerk alldo gewesen und sonders Zweifels noch ist.“

Namentlich soll noch eine alte Halde erwähnt werden, welche ich etwa SW vom Dorfe Poličan bemerkt habe, welche jedoch in den bisjetzt publizierten Übersichtskarten nicht verzeichnet wird. Ich habe dieselbe in meiner Skizze mit dem Buchstaben H signiert.



V.

Vnitřní tření solných roztoků.

Napsal Viktor Teissler.

(Se dvěma vyobrazeními v textu.)

Předloženo v sezení dne 12. dubna 1907.

V předložené práci obral jsem si za úkol zkoumati, jak dalece jest vnitřní tření additivní vlastností solných roztoků.

Kdežto většinu fysikálních vlastností vodných roztoků solných dlužno považovati za additivní,[1]) o viskositě podobného soudu posud pronésti nelze. Přes četná měření, která v tomto oboru provedli *S. Arrhenius*[2]) a *J. Wagner*[3]) — jichž práce byly mi hlavním vodítkem — nedospělo se k přesnějším zákonům. Dosud stanoveno jen několik povšechných pravidel, zákonů nalézti se nepodařilo.

Ke zkoumání této additivnosti užil jsem obvyklého způsobu: Má-li býti vnitřní tření roztoku additivním, nutno je považovati za součet tření 1. rozpustidla, 2. aniontu a 3. příslušného kationtu.

Při svém měření volil jsem jednoduché soli jako *NaCl*, *KCl*, *NaBr*, *NaJ*, *LiCl*. Tu při stejném stupni dissociace skládal by se koefficient vnitřního tření (η) roztoku *NaCl*

$$\eta_{NaCl + aq} = \eta_{aq} + \eta_{Na} + \eta_{Cl}$$

z koefficientu vnitřního tření vody (η_{aq}) a příspěvku jontu natria (η_{Na}) a chloru (η_{Cl}).

---

[1]) Sv. Arrhenius, Z. f. phys. Chem. I. 631, 1887.

[2]) Sv. Arrhenius, Z. f. phys. Chem. I. 284, 1887.

[3]) J. Wagner, Wied. Ann. *18*, 259; 1883; Z. f. phys. Chem, *5*, 31; 1890. *46*, 867; 1903.

Podobně při stejně koncentrovaném roztoku *KCl* platila by relace

$$\eta_{KCl + aq} = \eta_{aq} + \eta_{K} + \eta_{Cl},$$

takže odečtením obou výrazů nabyla by se hodnota pro

$$\eta_{Na} - \eta_{K}.$$

Stejný vztah měl by platnost při jiném páru roztoků s týmiž kovy, ale jinou kyselinou, na př. *NaBr* a *KBr*. V tom případě má býti

$(\eta_{Na} - \eta_{K})$ při chloridech $= (\eta_{Na} - \eta_{K})$ při bromidech a pod.

Obdobnou kombinací dal by se opět vyloučiti kov, a ve výsledku by se objevil pouze vliv užitých kyselin $\eta_{Cl} - \eta_{Br}$ atd.

Zjistiti, do jaké míry jsou napsané rovnice správny, bylo úkolem části experimentální.

K vyjádření jiného postupu užiji tohoto označení: $\eta_{NaCl + aq}$, $\eta_{KCl + aq}$ buď koefficient viskosity roztoku *NaCl* resp. *KCl* jisté (normální) koncentrace, a $\eta_{^1/_2 NaCl + aq}$, $\eta_{^1/_2 KCl + aq}$ značiž viskositu roztoku koncentrace poloviční. Podobně $\eta_{(^1/_2 NaCl + ^1/_2 KCl) + aq}$ je vnitřní tření směsi dvou stejně koncentrovaných (půlnormálních) roztoků *NaCl* a *KCl*. Pak při additivnosti vnitřního tření má býti

$$\eta_{(^1/_2 NaCl + ^1/_2 KCl) + aq} = \eta_{aq} + \eta_{^1/_2 Na} + \eta_{^1/_2 K} + \eta_{Cl} \text{ a}$$

$$\eta_{NaCl + aq} = \eta_{aq} + \eta_{Na} + \eta_{Cl}, \text{ kde}$$

$$\eta_{(^1/_2 NaCl + ^1/_2 KCl) + aq} \text{ a } \eta_{NaCl + aq}$$

dáno experimentem. Odečtením vychází

$$\eta_{(^1/_2 NaCl + ^1/_2 KCl) + aq} - \eta_{NaCl + aq} = \eta_{^1/_2 K} - \eta_{^1/_2 Na}.$$

Při tom učiněn předpoklad, že

$$2\eta_{^1/_2 Na} = \eta_{Na}.$$

Všechny tyto relace měly by platnost při krajně zředěných roztocích, kdy možno všechny molekuly sole považovati za dokonale dissociované. Než v praxi pokus takový se provésti nedá. K měření vnitřního tření nelze užíti methody tak citlivé jako na př. při měření el. vodivosti. Při viskositě nemožno měřiti roztoků příliš zředěných, neboť pak rozdíly pohybují se v pozorovacích chybách, kdy lze zdánlivě dokázati vše, v pravdě nic. Proto vedle zřeďováním snažil jsem se poněkud větší dissociace docíliti zvyšováním temperatury.

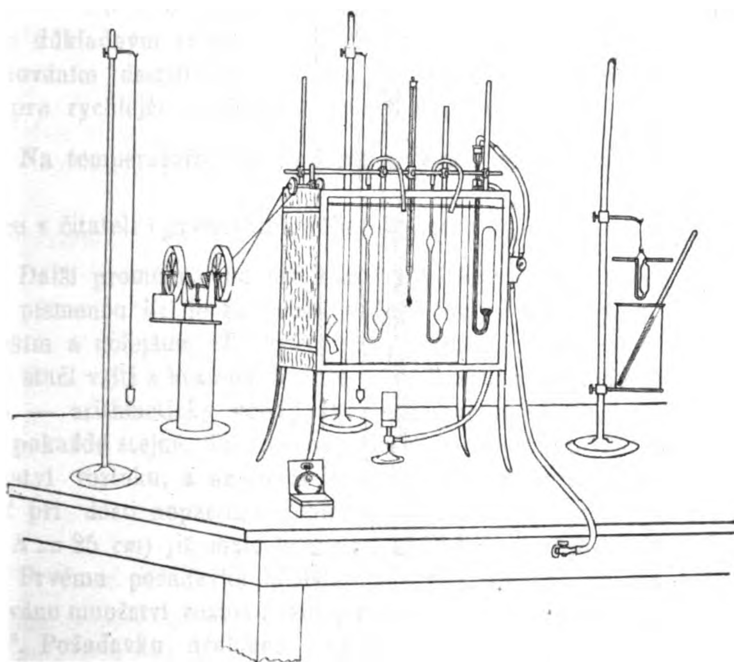
Tak se měření moje řadí v tyto skupiny:

1. Jednak měřen koefficient vnitřního tření při různé koncentraci,
2. pak při různé temperatuře, a konečně
3. stanovena viskosita směsi dvou stejně koncentrovaných roztoků.

K měření užito bylo známé methody výtoku kapillární rourkou. Koefficient vnitřního tření měřen relativně. Za jedničku zvoleno vnitřní tření vody při téže temperatuře.

Uspořádání pokusu znázorňuje přiložený obrazec 1.

Vhodná kapillára v U-formě, *Ostwaldem* navrhované[4]) upevněna ve vodní lázni (kapacity 16 l) udržované na určité temperatuře. Teplota lázně měřena normálním teploměrem děleným na desetiny stupně.



Obr. 1.

Ježto koefficient vnitřního tření značnou měrou závisí na teplotě, bylo nutno zajistiti konstantní temperaturu. K tomu sloužila toluolem plněná trubice regulující příchod plynu pod thermostat. Šroubová míchačka byla udržována v stálé rotaci teplovzdušným motorkem. Tímto zařízením podařilo se docíliti, že během jednoho měření změny temperatury nepřekročily $^1/_2$ desítiny stupně.

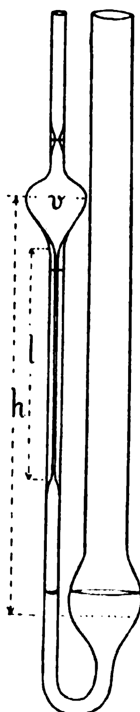
Svislost kapilláry pojištěna vždy pomocí dvou olovnic.

[4]) Ostwald-Luther, Hand- und Hilfsbuch zur Ausführung physiko-chemischer Messungen 1902, str. 259.

Čas měřen stopkami udávajícími $^1/_5$ vteřiny. Měření konáno tak, že při témže plnění apparátu měřen koefficient viskosity při stoupajících teplotách.

* * *

K poznání přesnosti methody třeba se obrátiti k theoretické formuli *Hagenbachově.* Ve své práci[5]) uvádí pro koefficient vnitřního



Obr. 2.

tření kapaliny, která ku stěnám kapilláry lne, a u níž lze korrekci za rychlost vytékající kapaliny zanedbati, výraz

$$\eta = \frac{981}{8} \frac{\pi r^4 h s \tau}{l v}.$$

(K rozšířené rovnici obsahující korrekci za rychlost, netřeba v našem případě přihlížeti.)

V této rovnici znamená 981 acceleraci v *cm*, *r* poloměr kapil-

[5]) E. Hagenbach, Ann. d. Physik CIX, 385; 1860.

láry, h střední rozdíl hladin, s specifickou hmotu, v objem proteklé kapaliny, τ čas, během kterého se výtok děje, l délku kapilláry.

Vlivu pozorovatele podléhají jen veličiny r, h, s, τ.

Z výrazu hořejšího je patrno, že největší vliv na výsledek má čistota kapilláry. Sebe menší chloupek uvíznuvší v kapilláře zvětšuje značně τ. Chyba ta se vždy poznala nepravidelnou dobou výtoku. Při měření, které se při téže temperatuře opakovalo asi 6krát, snadno se z rozdílu dob dalo poznati, že kapalině ve výtoku brání závada, již nutno důkladným vyčištěním odstraniti. To se dálo několikerým proplachováním destillovanou vodou, po případě kyselinou dusičnou a pak pro rychlejší vyschnutí čistým alkoholem.

Na temperatuře jsou rozměry apparátu ve výrazu $\frac{r^4}{lv}$ nezávisly, jsouce v čitateli i jmenovateli téhož rozměru $\frac{L^4}{L^4}$.

Další proměnná, od níž konečný výsledek silně závisí, je označena písmenou h; je to rozdíl výšek hladin kapaliny v reservoiru hořejším a dolejším. Ta výška se průběhem měření mění. Pro výpočet stačí vzíti z krajních hodnot — při počátku jednoho měření a na konci — arithmetický střed. Při serii měření záleží na tom, aby h bylo pokaždé stejné. To znamená: do apparátu nutno dáti vždy stejné množství roztoku, a kapillára musí býti pokaždé svisle upevněna, neboť při dosti nepatrném objemu a krátkosti apparátu (v necelý cm^3, $h = 25$ cm) již malé odchylky způsobují značné chyby.

Prvému požadavku hleděno vyhověti tím, že do apparátu odměřováno množství roztoku vždy touž pipettou s jemnou špičkou obsahu 5 cm^3. Požadavku druhému napomáhaly obě těžnice, dle nichž byl apparát vždy před měřením postaven.

Specifická hmota s byla správně stanovena pyknometrem Sprengel-Ostwaldovým na 4. desetinné místo, takže možná chyba neměla na výsledek vlivu.

Čas τ kolísal mezi 180—100 vteřinami. Bylo jej možno měřiti na $^1/_5$ vteřiny. Z počátku lišila se jednotlivá odečítání na stopkách až o $^4/_5$ vteřiny. Později ovšem získanou zručností obnášely rozdíly nejvýše $^2/_5$ vteřiny. Aby se tyto chyby uvedly na míru co možná nejmenší, měřen byl čas několikrát po sobě, 6 až i 10krát. Ze všech těch hodnot vzat střed, takže nyní úchylka činila asi $^1/_2$ chyby původní.

V uvážení toho všeho možno říci, že pozorovací chyby na počátku nedosáhly 0·5%; později, jak experimentem zjištěno, nepřekročily chyby 0·2%.

Roztoky byly měřeny $^1/_1$, $^1/_2$, $^1/_4$ normální a to: chloridy *LiCl*, *NaCl*, *KCl*, jodidy *LiJ*, *NaJ*, *KJ* a bromidy *LiBr*, *NaBr*, *KBr*.

Poněvadž při tomto měření, zvlášť při měření viskosity směsi dvou roztoků nebylo možno užiti nějakých korrekcí, bylo nutno připraviti roztoky co možná přesné. K přípravě roztoků bylo použito bezvodých praeparátů, které ještě před odvážením byly náležitě vyžíhány. Roztoky připraveny byly při 20° C. Zřeďování roztoků na $^1/_2$ a $^1/_4$ normální dálo se pipettami a odměrkami také při této temperatuře kalibrovanými.

Kontrolou správné koncentrace bylo titrování na chlor, brom, jod a stanovení specifické hmoty. (Viz na konci připojené tabulky, udávající specifickou hmotu měřených roztoků.) Ostatně roztok LiBr a LiJ byl připraven jenom titrováním.

Poněvadž koefficient vnitřního tření byl měřen při temperatuře 20, 30, 40 a 50°, bylo nutno určiti specifickou hmotu roztoků při téže temperatuře. Proto určována byla sp. hmota roztoků normálních i směsí jejich mezi 20—50° v intervallech 5stupňových, tedy při 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50°. Hodnoty změřené korrigovány byly methodou nejmenších čtverců.

Sp. hmota roztoků jiné koncentrace stanovena zpravidla jen při 20, 30, 40, 50°; případné odchylky též korrigovány.

* * *

Úkolem měření bylo stanoviti relativní koefficient η_r viskority solných roztoků. η vypočteno ze vztahu $\eta_r = \frac{s_r\,\tau_r}{s_v\,\tau_v}$, kde s_r, τ_r znamenají sp. hmotu a dobu potřebnou k tomu, by určitý objem roztoku protekl kapillárou; s_v a τ_v znamenají stejné hodnoty pro vodu.

Šlo tedy především o to, stanoviti součin $s\tau$ pro vodu. Specifická hmota byla vybrána z tabulek, τ měřeno při různých temperaturách několikráte.

Měřeno bylo při:

$t = 19{\cdot}95^0$	$3^m\,10{\cdot}2^s$	$\tau_{20} = 189{\cdot}88^s$.
	$9{\cdot}8$	
	$10{\cdot}4$	
	$10{\cdot}0$	
	$10{\cdot}0$	
	$3^m\,10{\cdot}08^s$	$\tau = 190{\cdot}08^s$.

$t = 29{\cdot}9^0$	$2^m\ 31{\cdot}6^s$	$\tau_{30} = 150{\cdot}87^s$.
	$31{\cdot}6$	
	$31{\cdot}2$	
	$31{\cdot}2$	
	$31{\cdot}4$	
	$2^m\ 31{\cdot}4^s$	$\tau = 151{\cdot}40^s$.
$t = 39{\cdot}5^0$	$2^m\ 5{\cdot}6^s$	$\tau_{40} = 124{\cdot}1^s$.
	$5{\cdot}2$	
	$5{\cdot}4$	
	$5{\cdot}2$	
	$5{\cdot}2$	
	$2^m\ 5{\cdot}3^s$	$\tau = 125{\cdot}3^s$.
$t = 49{\cdot}5^0$	$1^m\ 45{\cdot}0^s$	$\tau_{50} = 104{\cdot}02^s$.
	$45{\cdot}0$	
	$45{\cdot}0$	
	$44{\cdot}8$	
	$45{\cdot}4$	
	$1^m\ 45{\cdot}04^s$	$\tau = 105{\cdot}04^s$.

Druhé měření:

$t = 20{\cdot}18^0$	$3^m\ 8{\cdot}4^s$	$\tau_{20} = 189{\cdot}1^s$.
	$8{\cdot}2$	
	$8{\cdot}6$	
	$8{\cdot}2$	
	$8{\cdot}6$	
	$8{\cdot}2$	
	$3^m\ 8{\cdot}37^s$	$\tau \doteq 188{\cdot}37^s$.
$t = 29{\cdot}8^0$	$2^m\ 32{\cdot}6^s$	$\tau_{30} = 151{\cdot}61^s$.
	$32{\cdot}2$	
	$32{\cdot}4$	
	$32{\cdot}0$	
	$31{\cdot}8$	
	$32{\cdot}0$	
	$2^m\ 32{\cdot}17^s$	$\tau = 152{\cdot}17^s$.

$t = 39·8^0$	2^m 4·2^s	$\tau_{40} = 123·52^s$.
	4·2	
	3·8	
	4·0	
	3·8	
	4·0	
	2^m 4·0^s	$\tau = 124·0^s$.
$t = 50·3^0$	1^m 53·6^s	$\tau_{50} = 104·00^s$.
	53·0	
	53·4	
	53·4	
	53·6	
	1^m 53·4^s	$\tau = 103·4^s$.

Lineární interpolací redukovány hodnoty τ pro příslušné temperatury 20, 30, 40, 50°. Správným bylo by učiniti nejprve součiny $s\tau$ při teplotě pozorování a teprve takové součiny redukovati na žádané temperatury. Poněvadž však rozdíl temperatury nepřesahuje výše několika desetin stupně, tu chyba, jíž se dopouštíme, nepadá nikterak na váhu.

Z redukovaných hodnot pro τ při obou měřeních vzat arithm. střed; ten násoben specifickou hmotou. Jest pak $s\tau$ pro vodu:

20°	189·49 . 0·998 = 189·153
30°	151·24 . 0·996 = 150·586
40°	123·81 . 0·992 = ~~122·850~~
50°	104·01 . 0·988 = 102·769.

Podíl těchto čísel s podobně získanými hodnotami pro roztoky udává jejich relativní tření.

Aby však tato práce zbytečně nenabývala na svém objemu, neuvádím podrobně hodnot naměřených u každého roztoku, nýbrž sestavuji pro snazší přehled získané výsledky v následující tabulky.

První čtyři sloupce obsahují relativní koefficient vnitřního tření vzhledem k vodě při téže teplotě. Aby byla patrna i závislost na temperatuře, vypočten v následujících sloupcích absolutní koefficient míře $\frac{dyna}{cm^2}$ *sec.* Za absolutní koefficient vnitřního tření u vody vzat byl z tabulek Landolt-Börenstein-Meyerhofferových 1905 střed z měření *Poiseuillova*, *Sprungova*, *Slotteho* a *Thorpe-Rodgerova*.

Tím způsobem vychází pro vodu:

t	$\eta \frac{dyna}{cm^2} sec$
20°	$0{\cdot}01005_2$
30°	$0{\cdot}00801_6$
40°	$0{\cdot}00655_3$
50°	$0{\cdot}00551_3$

Poslední čtyři sloupce udávají, oč se liší absolutní koefficient při temperatuře vyšší od koefficientu při temperatuře předcházející. Čísla tato mají sloužiti k rychlé orientaci o průběhu viskosity. Zastupují diagramm, který na základě čtyř hodnot v intervallu od 20° do 50° by nebyl přesnějším.

(Viz tabulky na str. 10., 11., 12.)

Dříve než přistoupím k rozboru těchto výsledků, nebude nemístno srovnati svoje měření s hodnotami cizími. Ovšem nelze srovnávati všechna čísla, neboť v tomto uspořádání se měření dosud nekonala kromě starých pozorování na roztocích se stejným procentuálným obsahem, ne však se stejně normálním.

Pozorování vyjímám z tabulek Landoltových, a pokud tam uvedena nejsou, přímo z prací originálních.

Pro kaliumchlorid nalezl:

Arrhenius	$t = 17{\cdot}6^0$	$^1/_1\ \eta = 0{\cdot}978$		
Mützel	20°	0·9955		
Wagner	25°	0·9874	$^1/_2\ \eta = 0{\cdot}9874$	$^1/_4\ \eta = 0{\cdot}9903$
T.	20°	0·9837	0·9899	0·9903
	30°	1·0068	1·0118	1·0006

Natriumchlorid.

Arrhenius	$t = 17{\cdot}6^0$	1·093		
Mützel	20°	1·1069		
Reyher	25°	1·0973	1·0471	1·0239
T.	20°	1·0759	1·0412	1·0244
	30°	1·0891	1·0531	1·0257

Lithiumchlorid.

Arrhenius	17·6°	1·147		
Wagner	25°	1·1423	1·0665	1·0314
T.	20°	1·1453	1·0810	1·0299
	30°	1·1434	1·0703	1·0244

Tab. I.

Chloridy.

Temperatura	LiCl	NaCl	KCl	NaCl + KCl	LiCl	NaCl	KCl	NaCl + KCl	NaCl + KCl	LiCl	NaCl	KCl	NaCl + KCl
1/1									střed	Spád temperaturní			
20⁰	1·145$_3$	1·075$_9$	0·988$_7$	1·029$_5$	0·01151$_2$	0·01081$_5$	0·00988$_8$	0·01034$_8$	0·01035$_1$				
30	1·143$_4$	1·089$_1$	1·006$_8$	1·051$_0$	0·00916$_8$	0·00872$_9$	806$_9$	0·00842$_4$	0·00839$_9$	0·00235	0·00208	0·00182	0·00193
40	1·152$_4$	1·101$_8$	1·026$_1$	1·069$_1$	755$_1$	722$_0$	672$_4$	700$_6$	697$_2$	161	151	135	141
50	1·151$_6$	1·108$_3$	1·040$_1$	1·074$_5$	684$_9$	608$_3$	578$_4$	592$_4$	590$_9$	120	114	99	109
1/2													
20⁰	1·081$_1$	1·041$_2$	0·989$_9$	1·014$_2$	0·01086$_7$	0·01046$_6$	0·00995$_0$	0·01019$_5$	0·01020$_6$				
30	1·070$_3$	1·053$_1$	1·011$_8$	1·025$_4$	0·00857$_8$	844$_1$	810$_9$	821$_8$	827$_5$	0·00229	0·00202	0·00184	0·00198
40	1·074$_8$	1·055$_5$	1·011$_7$	1·042$_7$	704$_3$	691$_7$	668$_0$	683$_2$	677$_4$	154	152	148	139
50	1·088$_7$	1·055$_0$	1·018$_7$	1·041$_5$	597$_5$	581$_7$	561$_6$	574$_2$	571$_7$	107	110	101	109
1/4													
20⁰	1·028$_9$	1·024$_4$	0·992$_3$	1·006$_6$	0·01034$_3$	0·01029$_7$	0·00997$_5$	0·01011$_8$	0·01018$_6$				
30	1·024$_4$	1·025$_7$	1·000$_6$	1·010$_8$	821$_0$	822$_1$	802$_0$	810$_1$	812$_1$	0·00213	0·00198	0·00196	0·00202
40	1·031$_7$	1·026$_2$	1·006$_2$	1·015$_1$	676$_0$	672$_4$	659$_3$	665$_3$	665$_9$	145	150	148	145
50	1·031$_7$	1·028$_1$	1·013$_6$	1·016$_6$	568$_8$	566$_6$	558$_8$	560$_4$	562$_8$	107	105	100	105

Tab. II.

Bromidy.

Temperatura	LiBr	NaBr	KBr	NaBr + KBr	LiBr	NaBr	KBr	NaBr + KBr	NaBr + KBr	LiBr	NaBr	KBr	NaBr + KBr
$^1/_1$									střed	Spád temperaturní			
20^0	$1{\cdot}098_9$	$1{\cdot}054_6$	$0{\cdot}961_4$	$0{\cdot}973_6$	0·01105	0·01060	$0{\cdot}00966_4$	$0{\cdot}00978_7$	0·01018				
30	$1{\cdot}100_7$	$1{\cdot}065_7$	$0{\cdot}974_8$	$1{\cdot}013_8$	882_2	854_3	781_3	812_5	817_8	0·00223	0·00206	0·00185	0·00166
40	$1{\cdot}114_5$	$1{\cdot}080_7$	$1{\cdot}002_2$	$1{\cdot}035_5$	730_3	708_2	656_7	678_5	682_5	152	146	124	134
50	$1{\cdot}119_8$	$1{\cdot}090_7$	$1{\cdot}012_7$	$1{\cdot}089_2$	617_4	601_8	558_3	600_5	579_8	118	107	98	78
$^1/_2$													
20^0	$1{\cdot}041_1$	$1{\cdot}021_8$	$0{\cdot}973_0$	$0{\cdot}979_0$	0·01046	0·01027	$0{\cdot}00978_1$	$0{\cdot}00984_1$	0·01003				
30	$1{\cdot}064_3$	$1{\cdot}026_7$	$0{\cdot}980_6$	$1{\cdot}002_2$	853_0	822_9	786_9	808_3	804_5	0·00195	0·00204	0·00192	0·00181
40	$1{\cdot}049_5$	$1{\cdot}038_5$	$0{\cdot}994_6$	$1{\cdot}018_0$	687_6	680_4	653_2	667_0	666_8	171	143	133	136
50	$1{\cdot}042_7$	$1{\cdot}043_1$	$1{\cdot}005_2$	$1{\cdot}021_5$	574_9	575_1	554_2	563_2	564_7	113	105	99	104
$^1/_4$													
20^0	$1{\cdot}021_3$	$1{\cdot}019_4$	$0{\cdot}994_7$	$0{\cdot}979_0$	0·01025	0·01025	$0{\cdot}00999_9$	$0{\cdot}00984_1$	0·01012				
30	$1{\cdot}020_6$	$1{\cdot}022_6$	$0{\cdot}991_3$	$0{\cdot}998_2$	812_0	819_6	794_5	800_0	807_1	0·00213	0·00205	0·00205	0·00184
40	$1{\cdot}027_9$	$1{\cdot}035_2$	$1{\cdot}004_4$	$1{\cdot}007_8$	673_5	678_3	658_1	660_4	668_2	138	132	136	140
50	$1{\cdot}027_0$	$1{\cdot}032_3$	$1{\cdot}008_8$	$1{\cdot}013_7$	566_2	569_2	556_2	558_9	562_7	108	109	102	101

Tab. III.

Jodidy.

Temperatura	LiJ	NaJ	KJ	NaJ + KJ	LiJ	NaJ	KJ	NaJ + KJ	NaJ + KJ	LiJ	NaJ	KJ	NaJ + KJ
1/1									střed	Spád temperaturní			
20°	1·044$_6$	1·015$_5$	0·917$_5$	0·938$_0$	0·01050$_2$	0·01020$_8$	0·00922$_3$	0·00942$_9$	0·00971$_6$				
30	1·056$_8$	1·030$_6$	0·940$_3$	0·957$_3$	847$_9$	826$_0$	753$_6$	767$_7$	789$_8$	0·00203	0·00195	0·00168	0·00175
40	1·069$_3$	1·045$_9$	0·964$_1$	0·979$_6$	700$_7$	685$_3$	631$_6$	642$_9$	658$_6$	146	141	122	126
50	1·075$_0$	1·057$_9$	0·984$_4$	1·065$_7$	592$_8$	588$_3$	542$_6$	587$_6$	562$_9$	108	102	89	54
1/2													
20°	1·024$_9$	0·980$_9$	0·967$_6$	0·967$_0$	0·01030$_3$	0·00986$_8$	0·00972$_6$	0·00972$_0$	0·00979$_3$				
30	1·026$_7$	0·997$_1$	0·977$_6$	0·978$_0$	822$_9$	799$_2$	783$_6$	783$_9$	791$_4$	0·00207	0·00187	0·00189	0·00188
40	1·034$_8$	0·996$_7$	0·990$_2$	0·990$_2$	678$_0$	653$_1$	648$_9$	648$_9$	651$_0$	145	146	135	135
50	1·037$_3$	1·008$_0$	0·998$_5$	1·004$_4$	571$_9$	555$_7$	550$_5$	553$_7$	553$_1$	106	97	98	95
1/4													
20°	1·008$_0$	0·976$_1$	0·988$_6$	0·984$_7$	0·01018$_3$	0·00981$_2$	0·00988$_7$	0·00989$_5$	0 00987$_6$				
30	1·011$_6$	0·981$_1$	0·985$_1$	0·987$_3$	810$_8$	786$_4$	789$_5$	791$_3$	787$_9$	0·00202	0·00195	0·00199	0·00198
40	1·016$_4$	0·993$_2$	1·000$_4$	0·991$_2$	666$_8$	650$_9$	655$_5$	651$_5$	653$_2$	145	135	134	139
50	1·017$_8$	0·996$_4$	1·002$_9$	1·004$_5$	561$_2$	549$_3$	552$_9$	553$_9$	551$_1$	105	102	108	98

Kaliumjodid.

Arrhenius	17·6°	0·912		
T.	20°	0·9175		
	30°	0·9403		

Natriumbromid.

Reyher	25°	1·0639	1·0299	1·0148
T.	20°	1·0546	1·0218	1·0194
	30°	1·0657	1·0267	1·0226

Z čísel zde uvedených patrno, že se moje výsledky k cizím dobře řadí. Pokud se týče odchylek, dlužno je vysvětliti tím, že různí pozorovatelé, připravujíce roztoky při jiné temperatuře, nedosáhli téže koncentrace; pozorování *Mützelova* byla provedena jinou methodou

---

Ze sestavených tabulek a to z posledních sloupců je patrno, že η při stoupající temperatuře značně ubývá; průměrně při 1° asi o 2%. Úbytek viskosity s temperaturou se mění. Celkem při nižší temperatuře je větší než při temperatuře vyšší, ale nějakého přímého vztahu zde není.

Pokud se týče koncentrace, patrno, že viskosita roztoků se stoupajícím zředěním blíží se tření vody. Tedy u roztoků, jichž viskosita je větší než u vody, klesá koefficient vnitřního tření; u těch, kde vnitřní tření je negativní, tam blíží se k vodě, stoupá.

Že méně koncentrované roztoky snižují vnitřní tření až na negativní, patrno z čísel pro roztok NaJ. Pro normální roztok při 20° je $\eta = 1·0155$, při $^1/_2$normálním již 0·9809 a při $^1/_4$ 0·9761. Dlužno očekávati, že by se při dalším zřeďování dospělo konečně k bodu, u kterého by η dosáhlo svého minima, pak nutně by se přibližovalo svou hodnotou vnitřnímu tření vody.

O Arrheniově formuli z těchto pozorování nelze usuzovati. Jednak stanovena byla pro neelektrolyty a pro roztoky koncentrovanější. Při koncentraci mnou užívané se neosvědčuje.

Příkladem uvádím: (Viz str. 14. a 15.)

Směsi dvou stejně koncentrovaných roztoků mají vnitřní tření mezi hodnotami pro jednotlivé součásti. Při směsi chloridů osvědčují se údaje *Brücknerovy*[6]) o t. zv. „korrespondujících roztocích". V tepelném intervallu 20—30° je vnitřní tření směsi *NaCl* a *KCl* arith-

---

[6]) H. Brückner, Wied. Ann. *42*, 286; 1891.

LiCl

$t = 20^0$	log A z η $^1/_2$ normal. = 0·03383	η $^1/_1$ normal. měřené	1·1453	počítané 1·1686
		$^1/_4$	1·0289	1·0397
30^0	log A = 0·02938	$^1/_1$	1·1434	1·1447
		$^1/_4$	1·0244	1·0344
40^0	log A = 0·03132	$^1/_1$	1·1524	1·1552
		$^1/_4$	1·0317	1·0361
50^0	log A = 0·03491	$^1/_1$	1·1516	1·1744
		$^1/_4$	1·0317	1·041

NaCl

$t = 20^0$	log A = 0·01746	η $^1/_1$ normal. měřené	1·0759	počítané 1·0838
		$^1/_4$	1·0244	1·0203
30^0	log A = 0·02245	$^1/_1$	1·0891	1·1088
		$^1/_4$	1·0257	1·0261
40^0	log A = 0·02345	$^1/_1$	1·1018	1·114
		$^1/_4$	1·0262	1·0274
50^0	log A = 0·02325	$^1/_1$	1·1033	1·113
		$^1/_4$	1·0281	1·0271

KCl

$t = 20^0$	$\log A$ z η $1/2$ normal. $= 0·99559 - 1$	η $1/1$ normal. měřené	0·9887	počítané 0·9799
		$1/4$	0·9923	0·9949
30^0	$\log A = 0·00510$	$1/1$	1·0068	1·0238
		$1/4$	1·0006	1·0042
40^0	$\log A = 0·00505$	$1/1$	1·0261	1·0235
		$1/4$	1·0062	1·0059
50^0	$\log A = 0·00805$	$1/1$	1·0401	1·0378
		$1/4$	1·0136	1·0093

Směs roztoků *NaCl* a *KCl*.

$t = 20^0$	$\log A = 0·00605$	η $1/1$ normal. měřené	1·0295	počítané 1·0283
		$1/4$	1·0066	1·007
30^0	$\log A = 0·01074$	$1/1$	1·0510	1·0507
		$1/4$	1·0108	1·0124
40^0	$\log A = 0·01816$	$1/1$	1·0691	1·0872
		$1/4$	1·0151	1·0211
50^0	$\log A = 0·01766$	$1/1$	1·0742	1·0848
		$1/4$	1·0166	1·0205

metickým středem tření roztoku *NaCl* a *KCl*. U jiných roztoků v této práci užitých se vlastnost podobná neukazuje.

Z přehledných tabulek jest dále viděti, že při témž kovu vnitřní tření je tím větší, čím menší je atomová váha anionu, a naopak při téže kyselině že se stoupající atomovou vahou kovu vnitřní tření klesá — vztah již *Sprungem*[7]) nalezený.

Tato věta potvrzuje se v mezích pozorovacích chyb u všech mých výsledků.

Jak dalece jsou platny rovnice napsané pro additivnost, vysvítá z těchto výpočtů: (Viz str. 17.)

Výsledky pro směsi 2 roztoků pohybují se již namnoze v mezích chyb pozorovacích.

Celkem jest patrno, že některé výsledky (ku př. pro $^1/_1$ normální *Na—K*) zcela dobře vyhovují. Leč větší počet čísel méně vyhovuje. Z toho nutno souditi, že při vnitřním tření solných roztoků nejeví se tak význačně additivnost jako při jiných vlastnostech ku př. při el. vodivosti, snížení bodu mrazu a pod.

Snad při větším počtu pozorování zjevily by se pravidelněji některé vztahy, které se nyní dosud zdají ojedinělými. Snad by se při tom i vysvětlil dosti pravidelný chod odchylek při roztocích koncentrovanějších ($^1/_1$ normálních), kde hodnoty při *Li—Na* a *Li—K* klesají dle toho, jsou-li tyto kovy spojeny s aniontem *Cl*, *Br*. n. *J*, kdežto při rozdílu *Na—K* naopak tyto hodnoty rostou.

Proto shrnuji výsledky svého pozorování v následující resumé:

V předložené práci měřen byl relativní koefficient vnitřního tření několika roztoků při různé koncentraci a různé temperatuře. Dosavadní poznatky dají se dobře applikovati na tato měření. Pokud se týče additivnosti nutno přiznati, že některé výsledky na ni zřejmě ukazují; než aby se vysvětlily četné odchylky, k tomu bylo by třeba rozšířiti podobná měření na větší řadu roztoků.

Konečně budiž mi dovoleno vzdáti na tomto místě uctivé díky panu dvornímu radovi prof. dru *Č. Strouhalovi*, řediteli fysikálního ústavu, jenž mi laskavě poskytl prostředků k měření, jakož i panu s. docentu dru *B. Kučerovi* za laskavou radu i pomoc, jíž mi v nejednom případě při konání této práce poskytl.

Z fysikálního ústavu české university.

V Praze v březnu 1907.

---

[7]) Sprung, Pogg. Ann. *159*, 1; 1878; Slotte, Wied. Ann. *14*, 18; 1881; *20*, 257; 1883.

Tab. VII.

Směsi 2 roztoků.

t	1/2 normální			1/4 normální		
$t = 20^0$	1/2(NaBr+KBr) = 984 1/1 KBr = 966 1/2 (Na—K) = 18	1/2(NaCl+KCl) = 1020 1/1 KCl = 989 1/2 (Na—K) = 31	1/2 (NaJ+KJ) = 972 1/1 KJ = 922 1/2 (Na—K) = 50	1/4(NaBr+KBr) = 984 1/2 KBr = 978 1/4 (Na—K) = 6	1/4(NaCl+KCl) = 1012 1/2 KCl = 995 1/4 (Na—K) = 17	1/4 (NaJ+KJ) = 990 1/2 KJ = 973 1/4 (Na—K) = 17
30^0	1/2(NaBr+KBr) = 803 1/1 KBr = 781 1/2 (Na—K) = 22	1/2(NaCl+KCl) = 822 1/1 KCl = 807 1/2 (Na—K) = 15	1/2 (NaJ+KJ) = 784 1/1 KJ = 754 1/2 (Na—K) = 30	1/4(NaBr+KBr) = 800 1/2 KBr = 786 1/4 (Na—K) = 14	1/4 (NaCl+KCl) = 810 1/2 KCl = 811 1/4 (Na—K) = −1	1/4 (NaJ+KJ) = 791 1/2 KJ = 784 1/4 (Na—K) = 7
40^0	1/2(NaBr+KBr) = 667 1/1 KBr = 657 1/1 Na—K = 10	1/2(NaCl+KCl) = 683 1/1 KCl = 672 1/2 (Na—K) = 11	1/2 (NaJ+KJ) = 649 1/1 KJ = 632 1/2 (Na—K) = 17	1/4(NaBr+KBr) = 660 1/2 KBr = 653 1/4 (Na—K) = 7	1/4(NaCl+KCl) = 665 1/2 KCl = 663 1/4 (Na—K) = 2	1/4 (NaJ+KJ) = 652 1/2 KJ = 649 1/4 (Na—K) = 3
50^0	1/2(NaBr+KBr) = 563 1/1 KBr = 558 1/2 (Na—K) = 5	1/2 (NaCl+KCl) = 574 1/1 KCl = 573 1/2 (Na—K) = 1	1/2(NaJ+KJ) = 554 1/1 KJ = 543 1/2 (Na—K) = 11	1/4(NaBr+KBr) = 559 1/2 KBr = 554 1/4 (Na—K) = 5	1/4(NaCl+KCl) = 560 1/2 KCl = 562 1/4 (Na—K) = −2	1/4 (NaJ+KJ) = 554 1/2 KJ = 551 1/4 (Na—K) = 3

The inner Friction in Salt Solutions.

By **Viktor Teissler.**

In the present paper I resolved to examine, in what way the inner friction of salt solutions is an additive property. While most of the physical properties of hydrous salt solutions must be regarded as additive, till now one can't say the same about the viscosity. Although many experiments have been made on this subject, no exact laws hawe been formulated.

In order to examine this additivity I made use of the ordinary method: If the inner friction of the solution is said to be an additive one then, it must be regarded as the sum of the frictions:

1. of the solvent,
2. of the anion and
3. of the kation.

For my experiment I chose simple salts as *NaCl*, *KCl*, *LiCl*. There the coefficient of the friction at the same degree of dissociation ought to consist of $\eta_{NaCl+aq} = \eta_{Na} + \eta_{Cl} + \eta_{aq}$ the coefficient of the inner friction of water and of a part of natrium and chlor. Likewise for the same concentration of the solution of *KCl* the relation $\eta_{KCl+aq} = \eta_K + \eta_{Cl} + \eta_{aq}$ may be stated, so that after subtraction of both the value for $\eta_{Na} - \eta_K$ is to be found. Equal relations consist of another pair of solutions with the same metals but other acids, for example *NaBr* and *KBr*. In that case ought to be

$\eta_{Na} - \eta_K$ of the chloride $= \eta_{Na} - \eta_K$ of the bromide.

By a similar combination the metal may be eliminated and in the result only the influence of the employed acids $\eta_{Cl} - \eta_{Br}$ would be seen.

To settle in what way the formulated relations are valid, was the object of the experimental test.

For the shortness of the expression of my results I made use of the following annotations: $\eta_{NaCl+aq}$, η_{KCl+aq} these are the coefficients of the inner friction of the solution of *NaCl* resp. *KCl* by a fixed concentration (normal solution) and $\eta_{1/2 NaCl+aq}$ means the inner friction of a half concentrated solution. In the same way $\eta_{1/2 NaCl + 1/2 KCl + aq}$ is the inner friction of the mixture of two equal concentrated solutions of *NaCl* and *KCl*.

Then in the case of additivity the following formulae must hold

$$\eta_{1/2 NaCl + 1/2 KCl + aq} = \eta_{aq} + \eta_{1/2 Na} + \eta_{1/2 K} + \eta_{Cl} \text{ and}$$

$\eta_{NaCl+aq} = \eta_{aq} + \eta_{Na} + \eta_{Cl}$, where $\eta_{1/2 (NaCl+KCl)+aq}$ and $\eta_{NaCl+aq}$ are experimentally given. By subtraction one will find

$$\eta_{1/2 NaCl + 1/2 KCl + aq} - \eta_{NaCl+aq} = \eta_{1/2 K} - \eta_{1/2 Na}.$$

Thereat is provided that $2\eta_{1/2 Na} = \eta_{Na}$.

All these relations were correct for extremely diluted solutions, where all molecules may be regarded as perfectly dissociated.

By the inner friction however one can't measure two dilute solutions, for then the differences move in the faults of observation Therefore I tried to get a greater dissociation beside the dilution by increasing the temperature.

According to that my experiments can be divided into the following groups:

1. the coefficient of the inner friction was measured at different concentration,

2. at different temperature and at the last

3. the viscosity of the mixture of two solutions, equally concentrated, was measured.

All measurements were made by the known method of capillary efflux. The coefficient was measured relatively, and the inner friction of water at the same temperature was taken as the unit. Then the absolute coefficient was calculated by the known coefficient of water.

All measurements, the preparation of the solutions and the observing of constant temperature were made with the greatest carefulness, so that the faults of observation can be reckoned fewer than $0{\cdot}2\%$.

Of all measurements I take these final results, on which the additivity of the inner friction is to be seen.

Tables IV., V., VI.

All numbers in these tables are to be multiplied by 10^{-5}.

The scored values testify with certainly the additivity of inner friction of the salts concerned. By these values at the same time is to be seen that this physical quantity does not show by all salts and concentrations so explicit an additivity as the other properties. In order to get more precise results, further measurements on a greater scale will be necessary, whereby perhaps also the regular effect of the anomalies at the obtained values will be declared. For, as the tables show the values are falling at the $^1/_1$ normal solutions, on line I. and similary on line II., on the contrary on line III. the values rise. Similar anomalies, although not so regular, are also to be found in more diluted solutions.

Values found by the second method present themselves as the result of faults in observation.

The last table (VIII.) contains the specific gravity of the concerning solutions.

The physical Laboratory of the Bohemian University of Prague.

Tab. IV.

Roztoky $^{1}/_{1}$ normální.

$t = 20^0$	Li + Cl = 1151 Na + Cl = 1082 K + Cl = 989 I. Li − Na = 69 II. Li − K = 162 III. Na − K = 93	Li + Br = 1105 Na + Br = 1060 K + Br = 966 Li − Na = 45 Li − K = 139 Na − K = 94	Li + J = 1050 Na + J = 1021 K + J = 922 Li − Na = 29 Li − K = 128 Na − K = 99	Cl − Br = 46 Cl − Br = 22 Cl − Br = 23	Cl − J = 101 Cl − J = 61 Cl − J = 67	Br − J = 55 Br − J = 39 Br − J = 44
30^0	Li + Cl = 916 Na + Cl = 873 K + Cl = 807 I. Li − Na = 43 II. Li − K = 109 III. Na − K = 66	Li + Br = 882 Na + Br = 854 K + Br = 781 Li − Na = 28 Li − K = 101 Na − K = 73	Li + J = 847 Na + J = 826 K + J = 754 Li − Na = 21 Li − K = 93 Na − K = 72	Cl − Br = 34 Cl − Br = 19 Cl − Br = 26	Cl − J = 59 Cl − J = 47 Cl − J = 58	Br − J = 35 Br − J = 28 Br − J = 27
40^0	Li + Cl = 755 Na + Cl = 722 K + Cl + 672 I. Li − Na = 33 II. Li − K = 83 III. Na − K = 50	Li + Br = 730 Na + Br = 708 K + Br = 657 Li − Na = 32 Li − K = 73 Na − K = 51	Li + J = 701 Na + J = 685 K + J = 632 Li − Na = 16 Li − K = 69 Na − K = 53	Cl − Br = 25 Cl − Br = 14 Cl − Br = 15	Cl − J = 54 Cl − J = 37 Cl − J = 40	Br − J = 29 Br − J = 23 Br − J = 25
50^0	Li + Cl = 635 Na + Cl = 608 K + Cl = 573 I. Li − Na = 27 II. Li − K = 62 III. Na − K = 35	Li + Br = 617 Na + Br = 601 K + Br = 558 Li − Na = 16 Li − K = 59 Na − K = 43	Li + J = 593 Na + J = 583 K + J = 543 Li − Na = 10 Li − K = 50 Na − K = 40	Cl − Br = 18 Cl − Br = 7 Cl − Br = 15	Cl − J = 42 Cl − J = 25 Cl − J = 30	Br − J = 24 Br − J = 18 Br − J = 15

Tab. V.

Roztoky $^1/_2$normální.

$t = 20^0$	Li + Cl = 1087	Li + Br = 1046	Li + J = 1030	Cl — Br = 41	Cl — J = 57	Br — J = 16
	Na + Cl = 1047	Na + Br = 1027	Na + J = 986	Cl — Br = 20	Cl — J = 61	Br — J = 41
	K + Cl = 995	K + Br = 978	K + J = 972	Cl — Br = 17	Cl — J = 23	Br — J = 6
	I. Li — Na = 40	Li — Na = 19	Li — Na = 44			
	II. Li — K = 92	Li — K = 68	Li — K = 58			
	III. Na — K = 52	Na — K = 49	Na — K = 14			
30^0	Li + Cl = 858	Li + Br = 858	Li + J = 828	Cl — Br = 5	Cl — J = 35	Br — J = 30
	Na + Cl = 844	Na + Br = 823	Na + J = 799	Cl — Br = 21	Cl — J = 45	Br — J = 24
	K + Cl = 811	K + Br = 787	K + J = 784	Cl — Br = 24	Cl — J = 27	Br — J = 3
	I. Li — Na = 14	Li — Na = 30	Li — Na = 24			
	II. Li — K = 47	Li — K = 66	Li — K = 39			
	III. Na — K = 33	Na — K = 36	Na — K = 15			
40^0	Li + Cl = 704	Li + Br = 688	Li + J = 678	Cl — Br = 16	Cl — J = 26	Br — J = 10
	Na + Cl = 692	Na + Br = 680	Na + J = 653	Cl — Br = 12	Cl — J = 39	Br — J = 27
	K + Cl = 663	K + Br = 653	K + J = 649	Cl — Br = 10	Cl — J = 14	Br — J = 4
	I. Li — Na = 12	Li — Na = 8	Li — Na = 25			
	II. Li — K = 41	Li — K = 35	Li — K = 29			
	III. Na — K = 29	Na — K = 27	Na — K = 4			
50^0	Li + Cl = 598	Li + Br = 575	Li + J = 572	Cl — Br = 23	Cl — J = 26	Br — J = 3
	Na + Cl = 582	Na + Br = 575	Na + J = 556	Cl — Br = 7	Cl — J = 26	Br — J = 19
	K + Cl = 562	K + Br = 554	K + J = 551	Cl — Br = 8	Cl — J = 11	Br — J = 3
	I. Li — Na = 16	Li — Na = 0	Li — Na = 16			
	II. Li — K = 36	Li — K = 21	Li — K = 21			
	III. Na — K = 20	Na — K = 21	Na — K = 5			

Tab. VI.

Roztoky ¼ normální.

t	Cl	Br	J	Cl — Br	Cl — J	Br — J
t = 20°	Li + Cl = 1084	Li + Br = 1025	Li + J = 1018	Cl — Br = 9	Cl — J = 21	Br — J = 12
	Na + Cl = 1080	Na + Br = 1025	Na + J = 981	Cl — Br = 5	Cl — J = 49	Br — J = 44
	K + Cl = 998	K + Br = 1000	K + J = 984	Cl — Br = — 2	Cl — J = 4	Br — J = 6
	I. Li — Na = 4	Li — Na = 0	Li — Na = 32			
	II. Li — K = 36	Li — K = 25	Li — K = 29			
	III. Na — K = 32	Na — K = 25	Na — K = — 3			
30°	Li + Cl = 821	Li + Br = 812	Li + J = 811	Cl — Br = 9	Cl — J = 10	Br — J = 1
	Na + Cl = 822	Na + Br = 820	Na + J = 786	Cl — Br = 2	Cl — J = 36	Br — J = 34
	K + Cl = 802	K + Br = 795	K + J = 790	Cl — Br = 7	Cl — J = 12	Br — J = 5
	I. Li — Na = — 1	Li — Na = — 8	Li — Na = 25			
	II. Li — K = 19	Li — K = 17	Li — K = 21			
	III. Na — K = 20	Na — K = 25	Na — K = — 4			
40°	Li + Cl = 676	Li + Br = 674	Li + J = 666	Cl — Br = 2	Cl — J = 10	Br — J = 8
	Na + Cl = 672	Na + Br = 678	Na + J = 651	Cl — Br = — 6	Cl — J = 21	Br — J = 27
	K + Cl = 659	K + Br = 658	K + J = 656	Cl — Br = 1	Cl — J = 3	Br — J = 2
	I. Li — Na = 4	Li — Na = — 4	Li — Na = 15			
	II. Li — K = 17	Li — K = 16	Li — K = 10			
	III. Na — K = 13	Na — K = 20	Na — K = — 5			
50°	Li + Cl = 569	Li + Br = 566	Li + J = 561	Cl — Br = 3	Cl — J = 8	Br — J = 5
	Na + Cl = 567	Na + Br = 569	Na + J = 549	Cl — Br = 2	Cl — J = 18	Br — J = 20
	K + Cl = 559	K + Br = 556	K + J = 552	Cl — Br = 3	Cl — J = 7	Br — J = 4
	I. Li — Na = 2	Li — Na = — 3	Li — Na = 12			
	II. Li — K = 10	Li — K = 10	Li — K = 9			
	III. Na — K = 8	Na — K = 13	Na — K = — 3			

Tab. VIII.

Specifická hmota solných roztoků $s = \frac{g}{cm^3}$.

LiCl 1/1 n.	20°	s = 1·02195	LiBr 1/1 n.	20°	s = 1·05681	LiJ 1/1 n.	20°	s = 1·06798
	30	1·01908		30	1·05373		30	1·06486
	40	1·01582		40	1·05039		40	1·06086
	50	1·01219		50	1·04629		50	1·05598
1/2 n.	20°	1·01007	1/2 n.	20°	1·02741	1/2 n.	20°	1·03438
	30	1·00749		30	1·02477		30	1·02978
	40	1·00435		40	1·02147		40	1·02630
	50	1·00066		50	1·01751		50	1·02194
1/4 n.	20°	1·00421	1/4 n.	20°	1·01280	1/4 n.	20°	1·01532
	30	1·00172		30	1·01021		30	1·01276
	40	0·99845		40	1·00699		40	1·00950
	50	0·99439		50	1·00314		50	1·00555
NaCl 1/1 n.	20°	s = 1·03878	NaBr 1/1 n.	20°	s = 1·07594	NaJ 1/1 n.	20°	s = 1·11242
	30	1·03556		30	1·07272		30	1·10832
	40	1·03162		40	1·06878		40	1·10368
	50	1·02696		50	1·06402		50	1·09850
1/2 n.	20°	1·01925	1/2 n.	20°	1·03661	1/2 n.	20°	1·05500
	30	1·01635		30	1·03371		30	1·05197
	40	1·01263		40	1·03005		40	1·04884
	50	1·00803		50	1·02562		50	1·04409
1/4 n.	20°	1·00870	1/4 n.	20°	1·01752	1/4 n.	20°	1·02785
	30	1·00611		30	1·01474		30	1·02490
	40	1·00276		40	1·01143		40	1·02130
	50	0·99865		50	1·00757		50	1·01660

Tab. VIII.

Specifická hmota solných roztoků $s = \frac{g}{cm^3}$.

KCl 1/1 n.	20°	s = 1·04435	KBr 1/1 n.	20°	s = 1·08164	KJ 1/1 n.	20°	s = 1·11774
	30	1·04115		30	1·07843		30	1·11430
	40	1·03741		40	1·07450		40	1·10988
	50	1·03303		50	1·06983		50	1·10448
1/2 n.	20°	1·02177	1/2 n.	20°	1·04009	1/2 n.	20°	1·05863
	30	1·01888		30	1·03718		30	1·05514
	40	1·01535		40	1·03373		40	1·05127
	50	1·01116		50	1·02974		50	1·04702
1/4 n.	20°	1·01026	1/4 n.	20°	1·02010	1/4 n.	20°	1·02872
	30	1·00754		30	1·01760		30	1·02549
	40	1·00420		40	1·01430		40	1·02179
	50	1·00024		50	1·01020		50	1·01762
NaCl+KCl 1/1 n.	20°	s = 1·04180	NaBr+KBr 1/1 n.	20°	s = 1·07866	NaJ+KJ 1/1 n.	20°	s = 1·11689
	30	1·03825		30	1·07524		30	1·11333
	40	1·03430		40	1·07126		40	1·10937
	50	1·02945		50	1·06667		50	1·10501
1/2 n.	20°	1·02040	1/2 n.	20°	1·03834	1/2 n.	20°	1·05759
	30	1·01759		30	1·03562		30	1·05413
	40	1·01405		40	1·03218		40	1·05085
	50	1·00960		50	1·02802		50	1·04775
1/4 n.	20°	1·00905	1/4 n.	20°	1·01830	1/4 n.	20°	1·02803
	30	1·00675		30	1·01563		30	1·02512
	40	1·00347		40	1·01221		40	1·02190
	50	0·99904		50	1·00805		50	1·01838

VI.

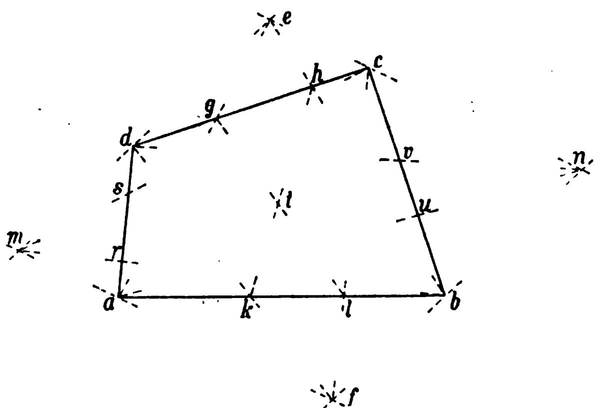
Nový způsob sestrojení těžiště čtyřúhelníku.

Podává V. Řehořovský v Brně.

(Se třemi vyobrazeními v textu.)

Předloženo v sezení dne 12. dubna 1907.

Pro sestrojení těžiště čtyřúhelníku obecného jest známo několik více méně jednoduchých způsobů; při všech jest však třeba užiti kružidla buď k přenášení úseček aneb k dělení těchto na dva neb na tři díly. Postup, který v následujícím podávám, nevyžaduje kru-



Obr. 1.

židla; třeba jen vésti několik rovnoběžek a spojnic a i tu postačí vyznačiti si krátkými ryskami pouze jejich průsečíky.

Popíšu nejprve konstrukci samu, na to pak podám odůvodnění.

Budiž (obr. 1.) *abcd* obecný čtyřúhelník; k úhlopříčce *ac* veďme rovnoběžky vrcholy *b* a *d*, k úhlopříčce *bd* rovnoběžky vrcholy *a* a

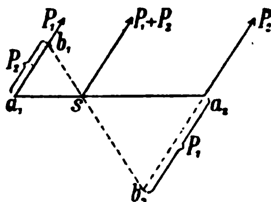
c. Rovnoběžky protnou se ve čtyřech bodech, z nichž zatím pro další konstrukci užijeme jen bodů e a f. Spojnice ae a be určují na straně cd body g a h, spojnice fd a fc na straně ab body k a l. V průsečíku dalších spojnic gl a hk jest těžiště t čtyřúhelníku.

Jak patrno, má konstrukce mimo to, že netřeba kružidla vzíti ani do ruky, tu další výhodu, že obrazec zůstává prost všech konstruktivních přímek.

Odůvodnění postupu zakládá se

1. na známé větě, že těžiště plochy trojúhelníku sjednocuje se s těžištěm tří hmotných bodů stejné váhy umístěných ve vrcholech trojúhelníku, a

2. na známé konstrukci těžiště (středu) dvou hmotných bodů o vahách P_1 a P_2. Jsou-li totiž (obr. 2.) a_1 a a_2 dva hmotné body



Obr. 2.

o vahách P_1 a P_2, jest těžiště s bodů a_1 a a_2 na spojnici a_1a_2 v takové poloze, že platí

$$a_1s : sa_2 = P_2 : P_1\,;$$

tomuto poměru se nejjednodušeji vyhoví, nanese-li se $a_1b_1 = P_2$, $a_2b_2 = P_1$, načež b_1b_2 protíná a_1a_2 v hledaném bodu s. Místo přímek silových samých lze užiti kterýchkoli dvou rovnoběžek body a_1 a a_2 vedených a nanésti libovolné násobky nP_1 a nP_2, aniž by se hořejší úměra a tedy i poloha bodu s změnila.

Přistupme nyní k důkazu samému. Budiž opět (obr. 3.) $abcd$ obecný čtyřúhelník a postupujme při vyhledávání jeho těžiště obyčejnou elementární cestou, totiž rozkladem v trojúhelníky.

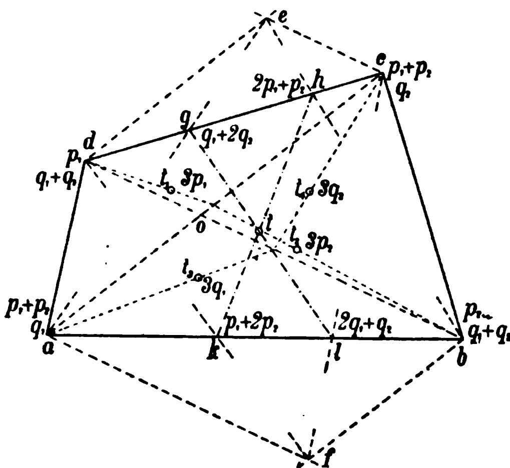
Úhlopříčka ac rozděluje čtyřúhelník ve dva trojúhelníky acd a abc, jejichž plochy buďtež velikostí $3p_1$, resp. $3p_2$ a těžiště t_1, resp. t_2; úloha, vyhledati těžiště čtyřúhelníku, převedena tím na úlohu vyhledati těžiště dvou hmotných bodů t_1 a t_2 o vahách $3p_1$ a $3p_2$; avšak bod t_1 o váze $3p_1$ můžeme dle 1. nahraditi třemi hmotnými

body ve vrcholech a, c a d o stejných vahách p_1; z téhož důvodu můžeme bod t_2 o váze $3p_2$ nahraditi třemi hmotnými body ve vrcholech a, b a c o stejných vahách p_2. Těžiště čtyřúhelníku jest pak identické s těžištěm čtyř hmotných bodů umístěných ve vrcholech čtyřúhelníku o vahách

v a jakož i v c .... $p_1 + p_2$,
„ b .... p_2,
„ d .... p_1.

Aby tyto váhy mohly býti skládány, třeba znáti poměr velikostí p_1 a p_2. Jest

$$3p_1 : 3p_2 = \text{pl.} \triangle\, acd : \text{pl.} \triangle\, abc;$$



Obr. 3.

oba trojúhelníky mají společnou základnu ac a proto plochy jich jsou k sobě v poměru příslušných výšek a tyto opět v poměru úseků do a ob; lze tedy psáti

$$p_1 : p_2 = do : ob$$

a z toho dále

$$p_1 : p_2 : (p_1 + p_2) = do : ob : db,$$

takže lze vzíti za poměrné míry vah p_1, p_2 a $p_1 + p_2$ délky do, ob a db.

Složme nejprve váhu p_1 v d a váhu $p_1 + p_2$ v c působící. K tomu konci jest dle 2. vésti body d a c dvě rovnoběžky, k čemuž užijeme úhlopříčky db a přímky ce s ní rovnoběžné; vedeme-li pak

$de \parallel ac$, jest $ce = do = p_1$ a poněvadž $db = p_1 + p_2$, určuje spojnice eb na cd bod h, který jest těžištěm bodů c a d o vahách $p_1 + p_2$ a p_1; bodu h náleží pak váha $2p_1 + p_2$.

Podobně složíme váhu $p_1 + p_2$ v a a váhu p_2 v b působící, užívajíce opět úhlopříčky bd a přímky af s ní rovnoběžné a vedouce ještě $bf \parallel ac$; jest pak $af = ob = p_2$ a $bd = p_1 + p_2$ a spojnice df určuje na ab bod k, který jest těžištěm bodů a a b o vahách $p_1 + p_2$ a p_2; bodu k náleží váha $p_1 + 2p_2$.

Soustava čtyř bodů a, b, c a d nahrazena tak soustavou dvou bodů h a k a proto *spojnice hk jest jednou tížnicí celé plochy.*

Podobným postupem dostane se též druhá tížnice gl. Rozložme čtyřúhelník úhlopříčkou bd v trojúhelníky abd a bcd, jejichž plochy buďtež velikostí $3q_1$ a $3q_2$ a těžiště t_3 a t_4. Těžiště t_3 o váze $3q_1$ nahradíme dle 1. třemi hmotnými body a, b a d o stejných vahách q_1 a těžiště t_4 o vaze $3q_2$ třemi hmotnými body b, c a d o stejných vahách q_2. Jest pak nalézti těžiště čtyř hmotných bodů umístěných ve vrcholech čtyřúhelníku o vahách

v b jakož i v d .... $q_1 + q_2$,
„ a .... q_1,
„ c .... q_2.

Pokud se týče poměru velikostí q_1 a q_2, dostaneme podobně jako dříve, že

$$q_1 : q_2 : (q_1 + q_2) = ao : oc : ac,$$

a lze tedy vzíti za poměrné míry vah q_1, q_2 a $q_1 + q_2$ délky ao, oc a ac.

Poněvadž jest $de = oc = q_2$ a $ca = q_1 + q_2$, určuje spojnice ea na straně cd bod g jakožto těžiště bodů c a d o vahách q_2 a $q_1 + q_2$; bodu g přísluší váha $q_1 + 2q_2$; podobně, poněvadž $bf = ao = q_1$ a $ac = q_1 + q_2$, určuje spojnice koncových bodů cf na straně ab bod l jakožto těžiště bodů a a b o vahách q_1 a $q_1 + q_2$; bodu l přísluší váha $2q_1 + q_2$.

Tím opět nahrazena soustava čtyř bodů a, b, c a d soustavou dvou bodů g a l a proto *spojnice gl jest druhou tížnicí celé plochy.*

V průsečíku obou tížnic hk a gl jest hledané těžiště t plochy čtyřúhelníku.

Podobným způsobem, užije-li se průsečíků m a n (obr. 1.), dostanou se na stranách ad a bc průsečíky r, s, u a v a *spojnice rv a su jakožto třetí a čtvrtá tížnice plochy* procházejí též těžištěm t.

Résumé des böhm. Textes.

Neue Konstruktion des Schwerpunktes eines Vierecks.

Bei den bisher bekannten Konstruktionen des Schwerpunktes eines beliebigen Vierecks ist die Verwendung des Zirkels erforderlich entweder zur Übertragung von Strecken oder zur Zwei- bezw. Dreitheilung derselben. Die im Folgenden angegebene Konstruktion macht die Benützung des Zirkels entbehrlich; es genügt die Führung einiger Parallelen und Verbindungsgeraden und dies nur insoweit, um die Schnittpunkte derselben zu erhalten, so dass die Zeichnung von allen Konstruktionslinien frei bleibt.

Es sei (Fig. 1) *abcd* ein beliebiges Viereck; zur Diagonale *ac* führen wir Parallelen durch die Eckpunkte *b* und *d*, zur Diagonale *bd* Parallelen durch die Eckpunkte *a* und *c*. Die Parallelen schneiden sich in vier Punkten, von denen zur weiteren Konstruktion nur zwei derselben *e* und *f* genügen. Die Verbindungsgeraden *ae* und *be* bestimmen auf der Seite *dc* die Punkte *g* und *h*, die Geraden *fd* und *fc* auf der Seite *ab* die Punkte *k* und *l*; im Schnittpunkte der weiteren Verbindungsgeraden *gl* und *hk* liegt der Schwerpunkt *t* des Vierecks.

Die Begründung des Verfahrens beruht auf

1. dem bekannten Satze, dass der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche identisch ist mit dem Schwerpunkte dreier gleichen in den Eckpunkten des Dreieckes situierten Massenpunkte, und

2. der bekannten Konstruktion des Schwerpunktes zweier Massenpunkte von den Gewichten P_1 und P_2, wie dieselbe aus Fig. 2 erkenntlich ist.

Man zerlege das Viereck (Fig. 3) durch die Diagonale *ac* in zwei Dreiecke, dessen Flächen $3p_1$, resp. $3p_2$ und Schwerpunkte t_1, resp. t_2 seien; alsdann kann der Punkt t_1 nach 1. ersetzt werden durch drei Massenpunkte von gleichen Gewichten p_1 in den Eckpunkten *a*, *c* und *d* und ebenso der Punkt t_2 durch drei Massenpunkte von gleichen Gewichten p_2 in den Eckpunkten *a*, *b* und *c*. Der Schwerpunkt des Vierecks ist dann identisch mit dem Schwerpunkte von vier in den Eckpunkten *a*, *b*, *c* und *d* des Vierecks angebrachten Massenpunkten von den Gewichten resp. $p_1 + p_2$, p_2, $p_1 + p_2$ und p_1. Wie aus der Bedeutung der Werte von p_1 und p_2 leicht folgt, ist das Grössenverhältnis der Gewichte p_1, p_2 und $p_1 + p_2$ gegeben durch die Strecken *do*, *ob* und *db*.

Wir bestimmen nun den Schwerpunkt der Eckpunkte *d* und *c* von den Gewichten p_1, resp. $p_1 + p_2$; weil $ce \parallel db$, $ce = do = p_1$ und $db = p_1 + p_2$, liegt dieser Schwerpunkt nach Fig. 2 im Schnittpunkte *h* der Geraden *eb* mit *dc* und kommt ihm das Gewicht $2p_1 + p_2$ zu, Aehnlich bestimmen wir den Schwerpunkt der andern zwei Eckpunkte *a* und *b* von den Gewichten $p_1 + p_2$, resp. p_2; derselbe ergibt sich im Durchschnittspunkte *k* der Geraden *df* mit *ab* und entspricht ihm das Gewicht $p_1 + 2p_2$. Das System der vier Punkte *a*, *b*, *c* und *d* ist hiemit ersetzt durch das System der zwei Punkte *h* und *k* und *die Verbindungsgerade hk gibt daher eine Schwerlinie der ganzen Fläche.*

Nun zerlege man das Viereck durch die Diagonale *bd* in die Dreiecke *abd* und *bcd*, deren Gewichte $3q_1$, resp. $3q_2$ und Schwerpunkte t_3 und t_4 seien. Das Grössenverhältnis der Gewichte q_1, q_2 und $q_1 + q_2$ ist jetzt gegeben durch die Strecken *ao*, *oc* und *ac*. Geht man auf dieselbe Weise vor wie bei der ersten Zerlegung, bekommt man in *gl eine zweite Schwerlinie der ganzen Fläche* und daher in *t* den Schwerpunkt des Vierecks.

Benützt man (Fig. 1) die anderen zwei Schnittpunkte *m* und *n* der Parallelen zur weiteren Konstruktion, ergeben sich auf demselben Wege *in den Geraden rv und su eine dritte und vierte Schwerlinie des Vierecks.*

VII.

Vorläufiger Bericht über einen neuen Planeten in der Nähe Jupiters.

Von Vladimir Heinrich.

Vorgelegt in der Sitzung am 26. April 1907.

Ende Jänner dieses Jahres habe ich den berühmten Wiener Astronomen Herrn Regierungsrat PhDr. JOHANN PALISA um ein, die Asteroidenwelt betreffendes Beobachtungsmaterial ersucht. Derselbe hat mir die Beobachtungspositionen des Planeten *VY* mit der Bemerkung freundlichst zugesandt, dass er an diesem Planeten, welcher voriges Jahr von KOPFF in Heidelberg entdeckt wurde, die mittlere tägliche Bewegung 400″—450″ vermute.

In seinem Briefe „Jänner 1907" schreibt er mir:

„Es ist dies wahrscheinlich ein Planet, der zur Hildagruppe gehört oder gar ein Seitenstück zu Thule ist."

Da ich damals durch andere Arbeiten überhäuft wurde, konnte ich kaum die Entfernung annähernd abschätzen und musste die betreffenden Details den weiteren Untersuchungen überlassen.

Nach einer ungefähr einen Monat dauernden Frist erhielt ich nun aus Italien vom Herrn MILLOSEWICH die Position desselben Planeten: Dez. 7. 1906.

Vermittelst der Kataloge, die mir zur Verfügung standen, habe ich die Vergleichsterne kontrolliert und durch Einführung des „locus fictus" alles für die erste Bahnbestimmung notwendige zusammengestellt.

Die „provisorische" Rechnung ergab (Okt. 21, 28, Nov. 15, Dez. 7.):

Planet *VY*.

Epoche 1006 Oktober 21·454 107 mittl. Berl. Zeit.

M 41° 31′ 40″ 8
ω 297° 28′ 37″ 4 ⎫
Ω 43° 21′ 38″ 8 ⎬ Mittl. Aequinoctium 1906,0
i 22° 16′ 46″ 6 ⎭
φ 8° 42′ 41″ 4
μ 300° 145
$\log a$ 0·715 117.

Die definitive Bahnbestimmung dieses interessanten Objektes werde ich wohl in kürzester Zeit publizieren. — Erst jetzt habe ich nämlich die Wolfschen Beobachtungen erhalten (Heidelberg) — (welche bei geringer Anzahl der bekannten Positionen von grösster Wichtigkeit sind) — und die erste provisorische Ephemeride berechnen können.

Herr Prof. Wolf hat den betreffenden Beobachtungen früher keine Aufmerksamkeit — wahrscheinlich wegen anderer Arbeiten — gewidmet, indem man von der wahren Entfernung dieses Planeten keine Ahnung hätte.

Die Veröffentlichung meines vorläufigen Berichtes lässt sich dadurch erklären, dass der interessante neue Planet *VY* der zweite ist, welcher nicht in die „gewöhnliche“ Zone angehört, sondern in einer *von den übrigen Asteroiden ganz verschiedenen Laufbahn sich bewegt.*

VIII.

Ergebnisse der Untersuchungen über die Genauigkeit planimetrischer Constructionen.

Von **Franz Rogel**,

Corresp. Mitglied d. königl. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften und d. Société Nationale des Sciences nat. et math. de Cherbourg.

(Mit 31. Abbildungen im Text.)

Vorgelegt in der Sitzung am 26. April 1907.

Erklärung der Abkürzungen: $\mathfrak{F}(A)$: „Fählerfläche des Punktes A." — l: „resultierende Strecke." — $C(r)$: Kreis mit Halbmesser r um C beschrieben." — A — B: „A mit B verbunden." — $C(r) \times g = M, N$: „Kreis $C(r)$ schneidet Gerade g in M, N." — $r \pm$: „r ist *möglichst* $\begin{Bmatrix}\text{gross}\\ \text{klein}\end{Bmatrix}$ zu machen".

Bezüglich der Grundlagen wird auf des Verfassers Abhandlung in diesen Sitzungsberichten: „*Über die Genauigkeit planimetrischer Constructionen*", 1906, hingewiesen.

Bei der Berechnung von φ^{min} wurde $\delta = 0{,}01$ *cm* und h bezw. $r = 10$ *cm* angenommen.

A. Hilfsconstructionen.[1])

I. Auf der Geraden g im Punkte A die Senkrechte zu errichten.

1. *Lösung.* Abb. 1.

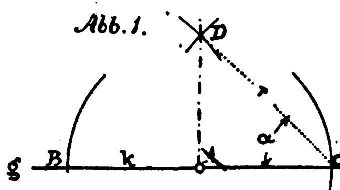
$A(k) \times g = B, C$; $B(r) \times C(r) = D, r > k$; $D - A$; $DA \perp g$. $E = 9$; 3 Kreise, 1 Gerade; $\sphericalangle DBA = \alpha$, $h = r \sin \alpha$, $k = r \cos \alpha$,

[1]) Siehe Reusch, „Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung". B. G. Teubner, 1904.

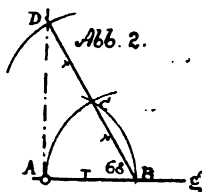
$$\Gamma = \frac{1}{3}\,\frac{hk}{h+5k+2r} = \frac{1}{3}\,\frac{\cos\alpha}{2+\sin\alpha+5\cos\alpha}\,h,$$

$\alpha =$	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
$\frac{1}{h}\Gamma =$	0,0476	0,0463	0,0445	0,0423	0,0395	0,0358	0,0310	0,0245	0,0150	0

Es ist $k+$ und $\frac{r}{k}+$ zu machen.



Bei vorgegebener Constructionshöhe h ist α — zu wählen. — Die Sicherheit, mit der sich ein Punkt zwischen A und D bestimmt, schwankt zwischen $1:3\,\delta$ und $1:(h+5k+2r)\frac{\delta}{k}$.



2. *Lösung.* Abb. 2.

$$A(r) \times g = B,\ B(r) \times A(r) = C,\ C(r) \times BC = D,$$
$$DA \perp g. - E = 12;\ 3\ \text{Kreise},\ 2\ \text{Gerade}.$$

$$\Gamma = \frac{11\sqrt{3}-5}{513}\,r \sim 0{,}0271\,r,\ \frac{1}{l}\,\Gamma \sim 0{,}0157.$$

Es ist $r+$ zu machen.

3. *Lösung.* Abb. 3.

$$B(r) \times g = C,\ BA = r,\ CB \times B(r) = D,\ D - A.$$
$$E = 8;\ 1\ \text{Kreis},\ 2\ \text{Gerade}.$$

a) A ist ein Kreispunkt.

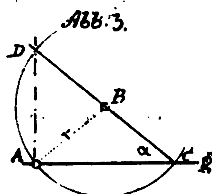
$$\Gamma_3 = \frac{1}{3} \frac{\cos \alpha}{3 + \sin \alpha + 3 \sin 2\alpha + 2 \cos \alpha} 2h =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\sin 2\alpha}{3 + \sin \alpha + 3 \sin 2\alpha + 2 \cos \alpha} r,$$

$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{1}{2h}\Gamma$	0,0667	0,0532	0,0438	0,0368	0,0314	0,0268	0,0223	0,0174	0,0108	0
$\frac{1}{r}\Gamma$	0	0,0185	0,0300	0,0368	0,0404	0,0411	0,0386	0,0327	0,0213	0

$$\frac{1}{2h}\Gamma_{max} = \frac{1}{15} \text{ bei } \alpha = 0; \quad \frac{1}{r}\Gamma_{max} = 0{,}041113 \text{ bei } \alpha = 47^\circ 20'.$$

$$\frac{1}{2h}\Gamma_{min} = \frac{1}{r}\Gamma_{min} = 0 \text{ bei } \alpha = 90^\circ.$$



Bei vorgegebener Constructionshöhe $2h = l$ ist α —; bei vorgegebenem Radius ist $\alpha = 47^\circ 20'$ anzunehmen.

b) A ist ein Punkt, dessen $\mathfrak{F} = 5\,\delta \times \delta$;

$$\Gamma = \frac{1}{5} \frac{\cos \alpha}{2 + 3 \sin \alpha + 7 \cos \alpha + 2 \sin 2\alpha} 2h.$$

Vergleich.

a) Bei gleichem $l = 2h$:

$$\Gamma_1 \gtreqless \Gamma_3 \quad \alpha \gtreqless 18^\circ 53' \quad \text{oder} \quad 2k \lesseqgtr 5{,}848\,h.$$

$\Gamma_2 < \Gamma_1$, $\Gamma_2 < \Gamma_3$; dies stimmt mit der Tatsache überein, dass I_2 2 überflüssige Kreise enthält.

b) Bei gleicher Constructionsbreite $2k = 2r \cos \alpha$:

$$\Gamma_1 < \Gamma_3 \text{ bei jedem } \alpha.$$

Für $\alpha = 60^0$ ist

$$\Gamma_1 = 0{,}0538\, k,\ \Gamma_2 = 0{,}0542\, k,\ \Gamma_3 = 0{,}07735\, k.$$

Bei beschränkter Constructionsbreite ist I_3 allen andern vorzuziehen.

I_3 ist auch im Gegensatz zu I_1 in dem Falle verwendbar, wo A am Rande des Zeichenblattes liegt.

c) Bei gleichem Radins r:

$$\Gamma_1 < \Gamma_3.$$

Bei $\alpha = 60^0$:

$$\Gamma_1 = 0{,}0269\, r,\ \Gamma_2 = 0{,}0271\, r,\ \Gamma_3 = 0{,}0387\, r,$$

daher

$$\Gamma_1 < \Gamma_2 < \Gamma_3.$$

I_1 beansprucht eine doppelt so grosse Breite als I_3.

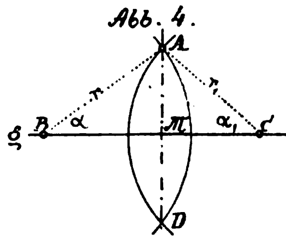
d) Bei gleichem r und α: $\Gamma_1 < \Gamma_3$. Bei derselben Raumbeanspruchung liefert I_3 ein genaueres Ergebnis als I_1.

Dort, wo bei beschränkter Höhe grösstmöglichste Länge erzielt werden soll, ist, wenn die Breite $2k < 5{,}84k$, I_1 als die genaueste anzuwenden. In jedem andern Falle verdient jedoch I_3 den Vorzug.

Unter allen Umständen ist I_3 der minder einfachen I_2 vorzuziehen.

Bei unbeschränktem Constructionsraum lässt sich mittels I_3 das genaueste Resultat erzielen.

II. Vom Punkte A ausserhalb der Geraden G auf diese das Lot zu fällen.



1. Lösung. Abb. 4.

B, C auf g beliebig, $BA = r$, $CA = r_1$, $B(r) \times C(r) = D$, $D - A$, $DA \perp g$. — $E = 9$; 2 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma = \frac{2}{3} \frac{1}{2 + 3 \dfrac{r_1 + r_2}{r_1 \cos \alpha_1 + r_2 \cos \alpha_2}} h.$$

Bei constanter Breite $k_1 + k_2$ ist Γ am grössten bei $k_1 = k_2$ oder $r_1 = r_2$, wofür

$$\Gamma = \frac{2}{3} \frac{\cos\alpha}{3 + 2\cos\alpha} h.$$

$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{1}{h}\Gamma$	0,1333	0,1321	0,1284	0,1220	0,1126	0,1000	0,0833	0,0619	0,0345	0

$$\Gamma_{max} = \frac{2}{15} h \text{ bei } \alpha = 0,\ \Gamma_{min} = 0 \text{ bei } \alpha = 90^0.$$

Die Punkte B, C sind in möglichst grossen und gleichen Abständen von A anzunehmen.

Es bleibt unbenommen die Gleichheit von k_1, k_2 durch eine Zirkeloperation herbeizuführen. Mit zunehmendem E würde also hier auch Γ zunehmen!

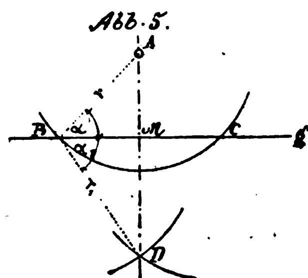
Mangelhaft ist die begrenzte Genauigkeit und Unveränderlichkeit der Lotlänge.

Die Genauigkeit des Fusspunktes M ist

$$\gamma = \frac{2\cos\alpha}{3 + 5\cos a};$$

sie ist um so grösser, je kleiner α ist.

$$\gamma_{max} = \frac{1}{4} \text{ bei } \alpha = 0,\ \gamma_{min} = 0 \text{ bei } \alpha = 90^0.$$



2. *Lösung.* Abb. 5.

$A(r) \times g = B, C,\ r > h,\ B(r) \times C(r) = D,\ D - A;$

$DA \perp g$. $E = 9$; 3 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma = \frac{2}{3} \frac{\cos\alpha}{5 + 2\sin\alpha + 2\cos\alpha} h, \text{ daher } r + \text{ oder } \alpha - .$$

$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{1}{h}\Gamma =$	0,0952	0,0897	0,0828	0,0788	0,0653	0,0548	0,0431	0,0301	0,0158	0
$\frac{1}{l}\Gamma =$	0,0476	0,0448	0,0424	0,0394	0,0326	0,0274	0,0215	0,0150	0,0079	0

$$\frac{1}{h}\Gamma_{max} = \frac{2}{21} \text{ bei } \alpha = 0, \ \Gamma_{min} = 0 \text{ bei } \alpha = 90^\circ.$$

Bei constanter Höhe wächst Γ mit α. Als ein Mangel ist die Unveränderlichkeit des Lotes ($2h$) zu bezeichnen.

$$\varphi = 0^\circ 20',5 \text{ bei } \alpha = 30^\circ.$$

Für den Fusspunkt M ist

$$\gamma = \frac{2 \cos \alpha}{5 + 2 \sin \alpha + 5 \cos \alpha}.$$

$$\gamma_{max} = \frac{1}{5} \text{ bei } \alpha = 0, \ \gamma_{min} = 0 \text{ bei } \alpha = 90^\circ.$$

3. *Lösung.* Abb. 5.

$A(r) \times g = B, C, \ B(r_1) \times C(r_1) = D, \ r_1 > r.$

$D - A, \ DA \perp g. \ E = 9$; 3 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma_3 = \frac{1}{3} \frac{\cot \alpha \sin(\alpha + \alpha_1)}{2 \cos \alpha + 3 \cos \alpha_1 + 2 \cos \alpha_1 (\sin \alpha + \cos \alpha)} h.$$

Es ist $r +$ *und* $r_1 : r +$ *anzunehmen.*

Bei vorgegebenem $l = \frac{\sin(\alpha + \alpha_1)}{\sin \alpha \cos \alpha_1} h$ *ist die Breite* $k +$ *oder* $a -$ *und* $a_1 -$ *zu wählen.*

Für $a_1 = 60^\circ$ ist $l = 2 \frac{\sin(\alpha + 60^\circ)}{\sin \alpha} h$ und

$$\Gamma_3' = \frac{1}{3} \frac{\cos 30^\circ + \cos(2\alpha - 30^\circ)}{1 + 3 \sin \alpha + 3 \sin 2\alpha - \cos 2\alpha} h, \ \alpha \geqq 60^\circ.$$

$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{1}{h}\Gamma' =$	∞	0,3870	0,1935	0,1256	0,0881	0,0627	0,0431	0,0269	0,0125	0

Für $\alpha = 30, \ \alpha_1 = 60'$ ist $\varphi = 3,116 \frac{\delta}{h} = 0^\circ 10',7.$

Für den Fusspunkt M ist

$$\gamma = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha_1}{6\tan\alpha + 3\tan\alpha_1 + \sin\alpha\,(1 + 2\tan\alpha)} .$$

Speciell für $\alpha_1 = 60^0$

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{3} + \tan\alpha}{3\sqrt{3} + 6\tan\alpha + \sin\alpha\,(1 + 2\tan\alpha)} ;$$

$$\gamma_{max} = {}^1/_3 \text{ bei } \alpha = 0,\ \gamma_{min} = {}^1/_8 \text{ bei } \alpha = 90^0.$$

Je grösser α, desto kleiner γ.

Vergleich:

Bei gleichem α: $\Gamma_1 > \Gamma_2$; $\Gamma_1 > \Gamma_3$ bei $\alpha > 32^1/_2{}^0$, $\alpha_1 = 60^0$; $\Gamma_2 > \Gamma_3$, $\alpha > 57^1/_2{}^0$.

α_1 lässt sich immer so bestimmen, dass für jedes α $\Gamma_3 > \Gamma_1 > \Gamma_2$ ist. —

Bei unbeschränkter Zeichenfläche lässt sich nur mittels II_3 jeder beliebig hohe Grad von Genauigkeit erreichen.

Ist der oberhalb und unterhalb von g zur Verfügung stehende Raum von gleicher Ausdehnung, so ist II_1 $(r_1 = r_2)$, wenn nicht, so ist II_3 zu verwenden.

II. *a*) Zum Punkte A den zu ihm bezüglich der Geraden g symmetrisch liegenden Punkt D zu bestimmen.

1. Lösung mittels II_1. Abb. 4. $E = 9$; 2 Kreise. $r_1 = r_2$.

$$\gamma_2 = \frac{1}{9}\sin 2\alpha$$

$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\gamma =$	0	0,0336	0,0714	0,0962	0,1094	0,1094	0,0962	0,0714	0,0386	0

$$\gamma_{max} = \frac{1}{9} \text{ bei } \alpha = 45^0,\ \gamma_{min} = 0 \text{ bei } \alpha = 0^0 \text{ und } 90^0.$$

2. Lösung mittels II_2; Abb. 5. $E = 9$; 3 Kreise.

$$\gamma_2 = \frac{\sin 2\alpha}{5\,(5 + 2\sin\alpha)}$$

$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\gamma =$	0	0,0113	0,0229	0,0289	0,0313	0,0302	0,0257	0,0187	0,0087	0

$\gamma_{max} = 0{,}03139$ bei $\alpha \sim 41^\circ 40'$, $\gamma_{min} = 0$ bei $\alpha = 0^\circ$ und 90°. Es ist $\gamma_1 > \gamma_2$ bei jedem α; die Maxima differieren um 0,07972.

Der Gegenpunkt wird am genauesten mittels II_1 mit $\alpha = 45^\circ$ oder mit $r \sim \frac{7}{5} h$ construiert.

III. Mittelsenkrechte und Mittelpunkt einer Strecke *AB*.

$$A(r) \times B(r) = C, C'; \; r \geqq \frac{BB}{2}; \; C - C'.$$

Abb. 5 $(r = r_1)$. $AB = d$. $E = 4$; 2 Kreise, 1 Gerade.

a) A und B sind Kreispunkte.

Mittelsenkrechte (nach *IIb*):

$$\Gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{11 + 12 \cos \alpha + 2 \cos 2\alpha} d.$$

$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{1}{d}\Gamma =$	0	0,0069	0,0135	0,0193	0,0242	0,0267	0,0271	0,0237	0,0151	0

$$\Gamma_{max} = \frac{\sqrt{61 + 2\sqrt{19}}}{83 + 16\sqrt{19}} d \sim 0{,}0273\, d \text{ bei } \alpha = 55^\circ 57'.$$

Die grösste Genauigkeit wird mit $r \sim 0{,}8031\, d \sim \frac{8}{9} d$ erzielt.

Mittelpunkt.

$$\gamma = \frac{\cos \alpha}{2 + 2\cos \alpha};$$

$\gamma_{max} = \frac{1}{5}$ bei $\alpha = 0$.

$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
γ	0,2	0,1982	0,1926	0,1830	0,1689	0,1500	0,1249	0,0928	0,0517	0

Die Mitte U von AB ergiebt sich daher um so genauer, je kleiner der Halbmesser ist. Beim Construieren ist r nur um Weniges grösser als $AB:2$ zu wählen.

b) Die Fehlerflächen von A, B sind *Rechtecke* $5\delta \times \delta$:

Mittelsenkrechte nach *IIb*:

$$\Gamma = \frac{\sin 2\alpha}{2 + \sin\alpha + 5\cos\alpha)^2} \frac{d}{2},$$

$$\Gamma_{max} = 0{,}0152\, d \text{ für } \alpha = 64^0 26',8 \text{ oder } r \sim 1{,}154\, d.$$

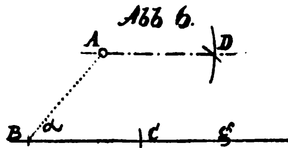
Mittelpunkt M:

$$\gamma = \frac{\cos\alpha}{2 + \sin\alpha + 5\cos\alpha};$$

$\gamma_{max} = \frac{1}{7}$ bei $\alpha = 0$.

Mittelsenkrechte und *Mittelpunkt* können nicht zugleich möglichst genau erhalten werden.

IV. Durch den Punkt A ausserhalb der Geraden g zu dieser die Parallele zu ziehen.



1. Lösung. Abb. 6. B auf g beliebig, $BC = BA = r$, $\sphericalangle ABC = \alpha$. $C(r) \times A(r) = D$, $D - A$, $DA \parallel g$. $E = 10$; 3 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma = \frac{1}{3} \frac{1}{4 + 5\sin\alpha + 6\cos\alpha + \sin 2\alpha} h.$$

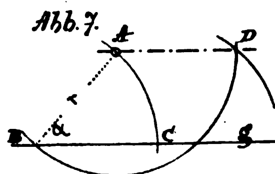
$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{1}{h}\Gamma =$	0,0333	0,0300	0,0278	0,0265	0,0260	0,0263	0,0273	0,0292	0,0323	0,0370
$\frac{1}{l}\Gamma =$	0	0,0052	0,0095	0,0132	0,0168	0,0201	0,0236	0,0275	0,0318	0,0370

$$\Gamma_{max} = \begin{cases} \frac{h}{30}, & \alpha = 0 \\ \frac{h}{27}, & \alpha = 90^0 \end{cases}$$

Für $82^0 29{,}6' < \alpha \leqq 90^0$ ergiebt sich ein Γ, das grösser ist als jedes andere, einem kleineren α entsprechende Γ. Das allein in Betracht kommende Maximum bei $\alpha = 90^0$ beansprucht unter allen Lösungen den geringsten Raum, ergiebt aber die geringste Länge (h) der Parallelstrecke.

Beim Construieren ist daher B lotrecht unter A anzunehmen.

$$\varphi_{min} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 12 \end{Bmatrix} \frac{\delta}{h} \text{ bei } \alpha = \begin{Bmatrix} 0 \\ 90^0 \end{Bmatrix} (17' \div 25{,}5').$$



2. *Lösung.* Abb. 7. $A(r) \times g = B$, $r > h$, $B(r) \times g = C$, $C(r) \times A(r) = D$; $D - A$; $DA \parallel g$. $E = 9$. 3 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma = \frac{1}{3} \frac{1}{5 + 4 \sin \alpha + 5 \cos a} h.$$

Der *ungünstigste* Winkel ist $\alpha = 38^0 39{,}6'$. $\frac{1}{2} \varphi_{max} = \pm 6 \frac{\delta}{h} (0^0 20{,}5')$ = Abweichung von der wahren Lage im ungünstigsten Falle.

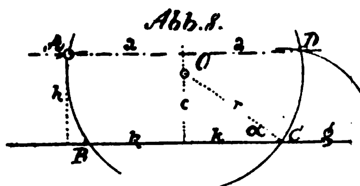
$$\Gamma_{max} = \begin{cases} \frac{h}{30}, & \alpha = 0 \\ \frac{h}{27}, & \alpha = 90^0 \end{cases}$$

3. *Lösung.* Abb. 8. $B(r) \times g = C, D$, $BA = r$, $DE = CA$, $E - A$. $EA \parallel g$. $E = 9$; 2 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma = \frac{2}{3} \frac{ak[hk + c(a-k)]}{(a-k)[2c(a+k) + 3r(2a+k)] + 2hk(a+k) + 5adk},$$

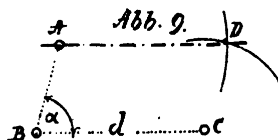
$\Gamma_{max} = \frac{2a}{27} = \frac{1}{27} \operatorname{cotg} \alpha \,.\, h$ bei $a = k$, d. h. der günstigste Mittelpunkt

liegt in halber Höhe des Punktes A über g und möglichst entfernt von A.



$\Gamma_{min} = 0$, $k = 0$, d. h. wenn der Hilfskreis g berührt.

$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{1}{h}\Gamma =$	∞	0,2100	0,1018	0,0641	0,0411	0,0311	0,0214	0,0135	0,0065	0



4. *Die Gerade g ist nicht wirklich gezogen, sondern durch zwei Punkte B, C bestimmt.* Abb. 9. $A(BC) \times C(AB) = D$; $D - A$; $DA \parallel g$, $BC = d$.

$$\Gamma = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin\alpha}{1 + 2\sin\alpha + 7\cos\alpha} d.$$

$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{1}{d}\Gamma =$	0	0,0404	0,0403	0,0413	0,0436	0,0474	0,0584	0,0682	0,0796	0,1111

$$\Gamma_{max} = \frac{1}{9} d \text{ für } \alpha = 90^\circ; \quad \Gamma_{min} = 0, \quad \alpha = 0^\circ.$$

Bei $\alpha = 90^\circ$ ist der Schnitt bei D rechtwinklig; AD hat in diesem Falle wie bereits bewiesen die günstigste Stellung, indem sie mit der Richtung eines Seitenpaares von $F(D)$ übereinstimmt.

Vergleich.

Jeder beliebig hohe Grad von Genauigkeit kann nur mittels IV_3 unter der Voraussetzung, dass der Kreismittelpunkt in halber Höhe des Punktes A angenommen wird, erreicht werden.

IV	E	$\frac{1}{h}\Gamma_{max}$	α	$\frac{1}{h}\Gamma_{min}$	α
1	10	$\frac{1}{30}$	0	0,0260	41°33′,8
		$\frac{1}{27}$	90°		
2	9	$\frac{1}{30}$	0	0,0292	38°39′,6
		$\frac{1}{27}$	90°		
3	9	∞	0	0	90°

a) Bei gleichem $l\,(\geqq h)$ ist für $\alpha < 90^0$

$$\Gamma_3 > \Gamma_2 > \Gamma_1;$$

somit ergiebt IV_3 das genaueste Resultat für $0 < \alpha < 90^0$. Bei $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$ sind alle gleichwertig.

Werden vom Kreis bei IV_3 nur jene Teile gezogen, welche geschnitten werden, so ist die Constructionsbreite bei IV_1 und IV_2 gleich $l + \sqrt{l^2 - h^2}$, bei IV_3 aber nur $= \sqrt{l^2 - h^2}$; es beansprucht demnach IV_3 unter Allen den geringsten Raum.

Ist $l < h$, so sind IV_1 und IV_2 überhaupt nicht verwendbar.

b) Bei gleichen α ist

$$\Gamma_1 \leqq \Gamma_3, \quad \alpha \leqq 68^0 40'; \quad \Gamma_2 \leqq \Gamma_3, \quad \alpha \leqq 51^0 20';$$
$$\Gamma_1 \leqq \Gamma_2, \quad 0 \leqq \alpha \leqq 90^0.$$

Während aber bei 1. und 2. gleich grosse $l = h\cos\alpha$ entsprechen, ist bei 3) $l = h\cot\alpha$, also kleiner.

c) Bei gleichem r ist wieder die grösste Genauigkeit bei IV_3 anzutreffen.

Soll $l \gtrless h$ *sein, so ist demnach* IV_3 *zu wählen; genügt* $l = h$, *so kann* IV_1 *oder* IV_2 *verwendet werden.*

Die Lösung 1) kann als völlig entbehrlich bezeichnet werden.

V. Zur Geraden g die zu ihr bezüglich des Punktes A symmetrisch liegende Parallele zu construieren.

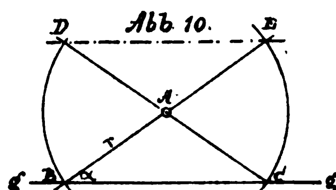


Abb. 10. $A(r) \times g = B, C,$ r beliebig, $B - A$, $C - A$, $BA \times A(r) = D$, $CA \times A(r) = E$, $D - E$, $DE \parallel g$. $E = 11$; 1 Kreis, 3 Gerade.

$$\Gamma = \frac{2}{9} \frac{\cos\alpha}{5 + 4(\sin\alpha + \cos\alpha + \sin 2\alpha)} r;$$

$\Gamma_{max} = \frac{2}{81} r$ bei $\alpha = 0^0$.

Es ist $r +$ anzunehmen.

$\alpha =$	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
$\frac{1}{r}\Gamma$	0,0247	0,0199	0,0164	0,0138	0,0101	0,0098	0,0079	0,0059	0,0035	0

VI. Halbierung eines Winkels μ.

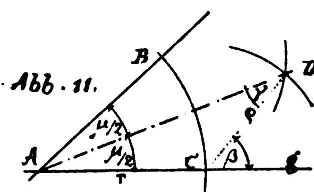


Abb. 11. $A(r) \times$ Schenkel $= B, C$; $B(\varrho) \times C(\varrho) = D$; ϱ be- liebig, $D - A$. $DAB = DAC = \frac{\mu}{2}$. $E = 9$; 3 Kreise, 1 Gerade.

$\sphericalangle DBB' = \beta$, $\gamma = \beta - \frac{\mu}{2}$,

$$\Gamma = \frac{1}{2} \frac{\sin\beta \cos\frac{\mu}{2}}{N\left(1 + 2\cos\frac{\mu}{2}\right)} r,$$

$$N = \begin{cases} 1 + \sin\gamma\left(1 - \sin\frac{\mu}{2}\right) + \cos\gamma \dfrac{1 + \sin\mu}{2\sin\frac{\mu}{2}} \equiv N_1, \ \beta \leqq 90^0, \\ 1 + \sin\gamma\left(1 + \sin\frac{\mu}{2} + \cos\frac{\mu}{2}\right) - \cos\gamma \dfrac{\sin\mu + \cos\mu}{2\sin\frac{\mu}{2}} \equiv N_2, \ \beta \geqq 90^0. \end{cases}$$

a) Ist r constant, so liegt

$$\Gamma_{max} = \frac{\cos\frac{\mu}{2}}{5 + 8\cos\frac{\mu}{2} + 2\cos\mu} r \quad \text{bei } \beta = 90^0 \text{ oder bei } \varrho = r\tan\frac{\mu}{2}.$$

Dieser Wert ist bei $\mu = 60^0$ am grössten $= \frac{2 - \sqrt{3}}{4} r \sim 0{,}066987\, r$ und am kleinsten $= \frac{r}{15} \sim 0{,}0\dot{6}\, r$ bei $\mu = 0^0$ und $= 0$ bei $\mu = 180^0$.

b) $AD = l$ constant. Für das grösste l, das bei beschränkter Zeichenfläche erhalten werden kann, ergeben sich die günstigsten Hilfsparameter bei

μ	$\gamma =$	$\beta =$	$\varrho : r =$
$0^0 \div 90^0$	$90 - \frac{\mu}{2}$	90^0	$\tan\frac{\mu}{2}$
$90^0 \div 135^0$	$\cos\gamma = \frac{1}{2}(\sin\mu + \cos\mu)\,\text{cosec}\,\frac{\mu}{2}$		
$135^0 \div 180^0$	90^0	$90^0 + \frac{\mu}{2}$	$\sin\frac{\mu}{2}$

	$\mu =$	90^0	100^0	110^0	120^0	130^0	135^0
günstigste Werte	$\gamma_0 =$	45^0	$58^0 1',8$	$68^0 36'$	$77^0 28'$	$86^0 6'$	90^0
	$\beta =$	90^0	$108^0 2'$	$123^0 36'$	$137^0 28'$	$151^0 6'$	$157^0 30'$
	$\varrho : =$	1,0	0,9030	0,8798	0,8718	0,9084	0,9239

Bei $\mu \geqq 135^0$ soll demnach ϱ so klein als möglich, d. h. gleich der halben Sehne BC gemacht werden, eine Forderung, die G. Müller, „Lehrbuch der zeichnenden Geometrie", 6. Aufl. Stuttgart 1901, für jedes $\mu < 90^0$ stellt.

$$\frac{1}{l}\,\Gamma_{max} = \frac{1}{2}\,\frac{1+\cos\mu}{5+2\cos\mu+8\cos\frac{\mu}{2}}\,,\ \beta = 90^0,$$

$$\frac{1}{l}\,\Gamma_{max} = \frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{\mu}{2}}{3+\sin\frac{\mu}{2}+5\cos\frac{\mu}{2}+\sin\mu+\cos\mu}\,,\ \beta = 90^0 = \frac{\mu}{2},$$

μ	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
$\frac{1}{r}\Gamma_{max}$	0,0667	0,0667	0,0668	0,0668	0,0669	0,0669	0,0670	0,0669	0,0667	0,0663
$\frac{1}{l}\Gamma_{max}$	0,0667	0,0664	0,0658	0,0645	0,0629	0,0606	0,0582	0,0549	0,0512	0,0469

μ	100^0	110^0	120^0	130^0	140^0	150^0	160^0	170^0	180^0
$\frac{1}{r}\Gamma_{max}$	0,0656	0,0644	0,0625	0,0597	0,0551	0,0485	0,0385	0,0234	0
$\frac{1}{l}\Gamma_{max}$	0,0432	0,0402	0,0374	0,0346	0,0309	0,0264	0,0204	0,0121	0

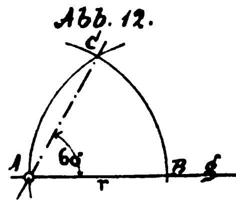
Während $\frac{1}{r}\Gamma_{max}$ bis $\mu = 60^0$ steigt und dann bis 180^0 fällt, nimmt $\frac{1}{l}\Gamma_{max}$ fortwährend ab.

Die Abweichung der ermittelten Halbierenden von der wahren Lage liegt zwischen $0^0 7'$ ($\mu = 0$) und $0^0 5',8$ ($\mu = 122^0 35'$).

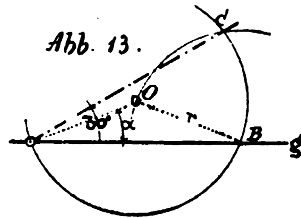
VII. An die Gerade g im Punkte A einen Winkel von *a*) 60^0, *b*) 30^0, *c*) 45^0 anzulegen.

a) Abb. 12. $A(r) \times g = B$, $B(r) \times A(r) = C$, $C - A$, $\sphericalangle CAB = 60^0$. $E = 7$, 2 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma = \frac{10\sqrt{3}-9}{219}\,r = 0{,}0380\,r\,.$$



Fehlerwinkel $\varphi = (18 + 10\sqrt{3})\,\frac{\delta}{r} = 35{,}3205\,\frac{\delta}{r}$.



b) (30°). Abb. 13. $O(r) \times g = A, B$, O beliebig; $B(r) \times O(r) = C$, $\sphericalangle\, CAB = 30^0$. $E = 7$. 2 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\cos 30^0 + \cos(2\alpha - 30)}{N}\,r,$$

$$N = \begin{cases} \sqrt{3}\,[1 + 2\cos\alpha + \sin(\alpha + 60^0)] + 3\cos(2\alpha + 30^0) + 3\sin 2\alpha + \\ \qquad + 2\sin(2\alpha + 60^0); \quad \alpha \leqq 30^0. \\ (1 + 2\sqrt{3}) + 2\sin(\alpha + 30^0) + 5\sin 2\alpha + \sin(3\alpha + 30^0) - \\ \qquad - 3\cos(2\alpha + 30^0); \quad \alpha \geqq 30 \end{cases}$$

$\frac{1}{r}\,\Gamma_{max}$ bei $\alpha = 30^0$.

Die günstigste Lage von O ist die auf dem ermittelten Schenkel.

$\alpha =$	90°	50°	30°	0°	− 10°	− 20°	− 45°	− 90°
$\frac{1}{r}\Gamma =$	0	0,0670	0,0926	0,0901	0,0900	0,0892	0,0330	0

Behufs Erzielung maximaler Genauigkeit wird man O nach dem Augenmasse so annehmen, dass der Abstand von g gleich $\frac{r}{2}$ ist, auf dem ermittelten Schenkel ein zweites O_1 annehmen und die Construction hiefür wiederholen.

$\varphi = 0^0 17',5$ bei $\alpha = 30^0$.

c) (45°). Abb. 14. B auf A beliebig, $BA = r +$, $B(r) \times c = C$, $A(r') \times C(r') = M$, $MB \times B(r) = D$, $D - A$, $DAB = 45^0$, $E = 13$; 3 Kreise, 2 Gerade.

$$\Gamma = \frac{4}{3} \frac{\sin\alpha}{5 + \cos\alpha + (17 + 4\sqrt{2})\sin\alpha} r, \quad \alpha \gtreqqless 45^0;$$

$\alpha =$	45°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{1}{r}\Gamma =$	0,0434	0,0444	0,0460	0,0470	0,0478	0,0482

Es ist $r +$ *und* $r_1 : r +$ *anzunehmen.*

$$\Gamma_{max} = \frac{2}{33 + 6\sqrt{2}} r = 0{,}04821\, r, \quad \alpha = 90^0; \quad \Gamma_{min} = 0, \quad \alpha = 0.$$

$$\varphi_{min} = 5{,}2248 \frac{\delta}{r} = 0^0 10' \; (\alpha = 90^0).$$

Vergleich.

		E	l	$\frac{1}{r}\Gamma$
a)	60°	7	r	0,03799
b)	30°	7	$2r\cos(30^0 - \alpha)$	$\alpha = -20^0$ $\alpha = 50^0$ 0,0892 ÷ 0,0670
c)	45°	13	$r\sqrt{2}$	$\alpha = 45^0$ $\alpha = 90^0$ 0,0434 ÷ 0,04821

Der Winkel 30° lässt sich am genauesten, 45° minder genau und 60° am wenigsten genau bei demselben r construieren.

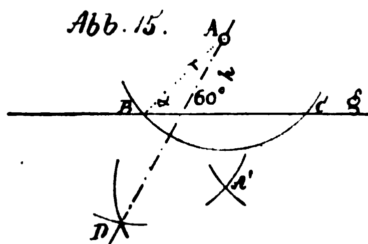
Die Überlegenheit von VII. *b*) hat ihren Grund in dem, dass die Zirkelöffnung besser ausgenützt wird wie bei *a*) und *c*). Der

grösseren Länge l entspricht bei allen dreien eine grössere Genauigkeit. Übereinstimmung mit E ist nicht vorhanden.

VIII. Durch den Punkt A ausserhalb der Geraden g eine Gerade g' zu ziehen, die mit g einen Winkel von

a) 60°, *b*) 30°, *c*) 45°

einschliesst.



a) (60°) Abb. 15. $A(r) \times g = B, C$; $B(r), C(r) = A'$; $A'(r) \times B(r) = D$; $D - A$; $\sphericalangle ADG = 60°$. $\sphericalangle ABC = \alpha$. $E = 11$; 4 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\cot\alpha \sin(\alpha + 30^0)}{K} h$$

$$K = \frac{13}{4} + 2\cos(\alpha - 30^0) + \cos(\alpha + 30^0) + \cos 2\alpha +$$
$$+ 4\sin(2\alpha - 30^0) + \sin(2\alpha + 30^0) + \cos(3\alpha - 30^0):$$

$$\Gamma_{max} = \infty, \alpha = 0; \quad \Gamma_{min} = 0, \alpha = 90^0.$$

$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90
$\frac{1}{h}\Gamma$	∞	0,2662	0,1331	0,0888	0,0664	0,0521	0,0411	0,0305	0,0170	0

Es ist r + anzunehmen.

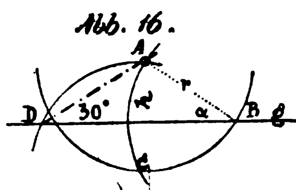
$$\varphi_{min} = 0, \alpha = 0; \quad \varphi_{max} = \infty, \alpha = 90^0. \quad \varphi = 4{,}620 \frac{\delta}{h}, \alpha = 30^0.$$

Für die Genauigkeit des Schnittes S von AD mit g:

$$\gamma = \frac{3}{2}\sqrt{3} \frac{\sin(\alpha + 30^0)}{2K\tan\alpha + 3\sqrt{3}\sin\alpha + 9\sin(\alpha + 30^0)}$$

$$\gamma_{max} = \frac{1}{6}\sqrt{3} \sim 0{,}2887, \alpha = 0; \quad \gamma_{min} = 0, \alpha = 90^0.$$

Die extremen Werte von Γ und γ stimmen überein.



VIII. *b*, (30°), Abb. 16. $A(r) \times g = B$, $B(r) \times A(r) = C$, $C(r) \times g = D$. $D - A$, $\sphericalangle ADB = 30°$. $E = 90°$; 3 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma = \frac{1}{3} \frac{\sin(\alpha + 30^0)}{\frac{5}{4} + 2\cos 15^0 \sin(\alpha + 15^0) + \frac{5}{6}\sqrt{3}\sin 2\alpha} h,$$

$$\frac{1}{h}\Gamma_{max} \begin{cases} = 2/21, & \alpha = 0^0 \\ = 0{,}092642, & \alpha = 90^0 \end{cases}$$

$$\Gamma_{min} = 0{,}07362, \quad \alpha \sim 41^0.$$

Der günstigste Winkel α ist $\leqq 1^0 40'$; in Wirklichkeit kann jedoch nur das zweite Maximum in Betracht kommen. *Es ist daher r nur um weniges grösser als h anzunehmen.*

α —	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{1}{h}\Gamma$	0,0952	0,0837	0,0777	0,0747	0,0736	0,0742	0,0763	0,0800	0,0871	0,0926

Ein Mangel ist die Unveränderlichkeit von $AD = l = 2h$.

$$\varphi_{min} = 5{,}38675 \frac{\delta}{h}, \quad \alpha = 90^0. \quad (0^0 18',5).$$

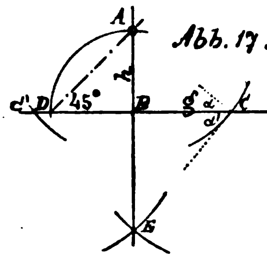
Schnitt D von l mit g:

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}\sin(\alpha + 30^0)}{M},$$

$$M = 6\cos 30 - 4\sqrt{3}\sin 15^0 \cos(\alpha + 15^0) + 4\sin 2\alpha - 6\cos(2\alpha + 30^0) -$$
$$- 3\sqrt{3}\sin(2\alpha + 60^0)\sin(\alpha + 30^0) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2\alpha + 60^0),$$

γ wächst zugleich mit α, $\gamma_{max} = 0{,}0379$, $\alpha = 90^0$.

VIII. *c*) (45°). Abb. 17. Von A wird das Lot AE mittels II_3 gefällt; $BD = AB$; $D - A$, $\sphericalangle ABD = 45°$. $E = 15$; 3 Kreise, 2 Gerade.



$$\Gamma = \frac{2}{3}\frac{h}{N}, \quad N = 5 + 2\sqrt{2} + \frac{2 \sec \alpha_1 + 3 \sec \alpha - 1}{1 + \operatorname{cctg} \alpha \tan \alpha_1}.$$

$$\alpha_1 = 60^0, \; N_1 = 5 + 2\sqrt{2} + 3 \tan \alpha \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin(\alpha + 60^0)}.$$

$$\Gamma_{max} = \frac{2}{51}(5 - 2\sqrt{2})\, h = 0{,}08516, \quad \alpha = 0, \quad \alpha_1 \text{ beliebig.}$$

$\alpha_1 = 60^0$, $\alpha =$	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
$\frac{1}{h}\Gamma =$	0,0852	0,0795	0,0749	0,0706	0,0661	0,0609	0,0548	0,0443	0,0285	0

$\varphi = 0^0 18',8$ bei $\alpha = 30^0$.

Schnitt D von l mit g:

$$\gamma = \frac{1}{5 + \frac{2 \sec \alpha_1 + 3 \sec \alpha}{1 + \cot \alpha \,.\, \cot \alpha_1}},$$

$$\gamma = \frac{1 + \sqrt{3} \cot \alpha}{9 + 5\sqrt{3} \cot \alpha + 3 \sec \alpha}, \quad \alpha_1 = 60^0$$

γ wächst mit abnehmendem α und zunehmendem α_1; $\gamma_{max} = \frac{1}{5}$, α_1 beliebig, $\alpha = 0$. Für $\alpha = 30^0$, $\alpha_1 = 60^0$ ist $\gamma = 0{,}1456$.

Vergleich:

		E	l	$\frac{1}{h}\Gamma_{max}$	$\frac{1}{h}\Gamma_{min}$
a)	60^0	11	$2\frac{\sin(\alpha + 30)}{\sin \alpha}$	∞, $\alpha = 0$	0, $\alpha = 90^0$
b)	30^0	9	$2h$	0,0952; 0,0926 $\alpha = 0$ $\alpha = 90^0$	0,07362 $\alpha = 41^0$
c)	45^0	15	$\sqrt{3}\,h$	0,0852 $\alpha = 0$	0, $\alpha = 90^0$

Bei gleichem α und h ist daher

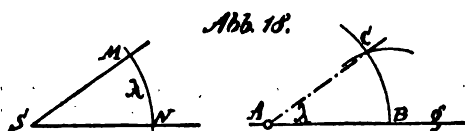
$\Gamma_a > \Gamma_c$, $\alpha < 40^0$; $\Gamma_a > \Gamma_b$, $\alpha < 35^0$; $\Gamma_c < \Gamma_b$ für jedes α.

Beliebig hoher Grad von Genauigkeit kann nur bei a) erreicht werden. Übereinstimmung mit E herrscht nur bei b) und c). Die Maxima von Γ und γ liegen bei Allen bei denselben α.

IX. An die Gerade g im Punkte A einen Winkel

$$a) = \lambda,\ b) = 2\lambda,\ c) = \frac{\lambda}{2},\ d) = 90^0 - \lambda$$

anzulegen.



a) Abb. 18. $S(r)$ schneidet die Schenkel in M, N; $A(r) \times \times B(MN) = C$; $\sphericalangle CAB = \lambda$. $E = 11$; 3 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma = \frac{1}{3} \frac{\cos\frac{\lambda}{2}}{4 + 10\sin\frac{\lambda}{2} + 7\cos\frac{\lambda}{2}} r, \quad A \text{ Kreispunkt.}$$

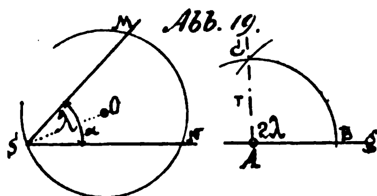
$\Gamma_{max} = \frac{1}{33} r$, $\lambda = 0$, Γ nimmt ab, wenn λ zunimmt.

Bei $\lambda > 90^0$ ist daher nicht direct λ, sondern $180^0 - \lambda$ zu übertragen. $\Gamma_{min} = 0{,}0147\, r$, $\lambda = 90^0$.

$\lambda =$	180^0 0^0	170^0 10^0	160^0 20^0	150^0 30^0	140^0 40^0	130^0 50^0	120^0 60^0	110^0 70^0	100^0 80^0	90^0
$\frac{1}{r}\Gamma$	0,0303	0,0280	0,0260	0,0241	0,0224	0,0207	0,0191	0,0176	0,0162	0,0147

Die Abnahme der Genauigkeit bei wachsendem λ erklärt sich leicht, wenn man bedenkt, dass die sich in C schneidenden Bogen den Winkel $90^0 - \frac{\lambda}{2}$ einschliessen, der mit zunehmendem λ abnimmt.

$$\varphi_{min} = 14\frac{\delta}{r},\ \lambda = 0^0;\quad \varphi_{max} = 25{,}657\frac{\delta}{r},\ \lambda = 90^0.$$



IX. b) 2λ. Abb. 19. $A(r) \times g = B$; $O(r) \times$ Schenkel $= M, N$; $B(MN) \times A(r) = C$, $C = A$, $\sphericalangle CAB = 2\lambda$. $E = 11$; 3 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma = \frac{1}{3} \frac{\cos\frac{3}{2}\lambda + \cos\frac{\lambda}{2}}{N} r,$$

$$N = 2\sin\frac{3}{2}\lambda + 3\cos\frac{3}{2}\lambda + 8\cos\lambda + 2\sin\frac{\lambda}{2} + 11\cos\frac{\lambda}{2}.$$

Bei $\lambda > 90^0$ ist die Construction auf $180^0 - \lambda$ anzuwenden.

$\lambda =$	180⁰ 0⁰	170⁰ 10⁰	160⁰ 20⁰	150⁰ 30⁰	140⁰ 40⁰	130⁰ 50⁰	120⁰ 60⁰	110⁰ 70⁰	100⁰ 80⁰	90⁰
$\frac{1}{r}\Gamma =$	0,0303	0,0292	0,0277	0,0261	0,0236	0,0208	0,0174	0,0133	0,0078	0

Je mehr sich λ dem rechten Winkel nähert, desto kleiner wird Γ.

$$\varphi_{min} = 14\frac{\delta}{r}, \quad \lambda = 0 \; (0^0 48',1).$$

IX. c) $\left(\frac{1}{2}\lambda\right)$.

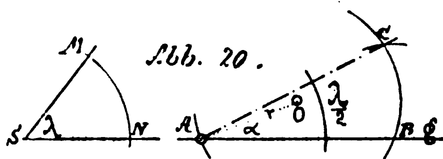


Abb. 20. $S(r) \times$ Schenkel $= M, N$; $O(r) \times g = B$, $OA = r$, $BC = MN$, $C - A$; $\sphericalangle CAB = \frac{\lambda}{2}$. Die günstigste Lage von O ist die auf der Halbierenden von λ.

$$\Gamma_c = \frac{1}{6} \frac{\cos\frac{3}{4}\lambda + \cos\frac{\lambda}{4}}{V},$$

$$V = \sin\frac{3}{4}\lambda + \cos\frac{3}{4}\lambda + \frac{3}{2}\cos\frac{\lambda}{2} + 4\cos\frac{\lambda}{4} + 3\cos\frac{\lambda}{4}.$$

$\lambda =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{1}{r}\Gamma =$	0,0606	0,0573	0,0540	0,0516	0,0481	0,0449	0,0421	0,0389	0,0357	0,0327
$\frac{1}{l}\Gamma =$	0,0303	0,0286	0,0272	0,0260	0,0244	0,0230	0,0218	0,0203	0,0190	0,0177

$\lambda =$	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
$\frac{1}{r}\Gamma =$	0,0294	0,0261	0,0227	0,0192	0,0159	0,0117	0,0081	0,0041	0
$\frac{1}{l}\Gamma =$	0,0162	0,0147	0,0131	0,0114	0,0097	0,0074	0,0053	0,0028	0

Je kleiner der Winkel, desto grösser die Genauigkeit.

$$\Gamma_{max} = \frac{2}{33} r, \ \lambda = 0; \quad \Gamma_{min} = 0, \ \lambda = 180^0; \quad \frac{1}{l}\Gamma_{max} = \frac{1}{33}, \ \lambda = 0.$$

$$\frac{1}{l}\Gamma_{min} = 0, \ \lambda = 180^0.$$

Denn je kleiner λ, desto weniger ist der Winkel, unter welchem sich $O(r)$ und $B(MN)$ schneiden, von einem rechten verschieden.

$$\varphi_{min} = 8{,}5\frac{\delta}{r}, \ \lambda = 0^0 \ (0^0 14').$$

IX. *d*) (90°—λ).

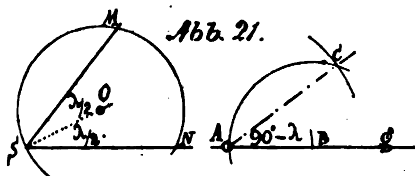


Abb. 21. $O(r) \times$ Schenkel $= M, N$; $OS = r$, $B(r) \times A(MN) = C$ $AB = r$, B auf g liegend, $C - A$, $\sphericalangle CAB = 90^0 - \lambda$. $E = 13$, 4 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma_d = \frac{1}{6} \frac{\sin 2\lambda}{P} r,$$

$$P = 3 + 2 \sin \frac{\lambda}{2} - \cos \lambda + \frac{5}{2} \sin \lambda + 2 \sin \frac{3}{2} \lambda + \sin 2\lambda + \\ + \frac{1}{2} \cos 2\lambda.$$

Γ nimmt mit wachsendem λ zu bis $\lambda = 35^0$, wo das Maximum $\Gamma_{max} = 0{,}02265\, r$ liegt, um von da an beständig abzunehmen.

$\lambda =$	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
$\frac{1}{r}\Gamma =$	0	0,0144	0,0203	0,0224	0,0224	0,0206	0,0174	0,0128	0,0070	0
$\frac{1}{l}\Gamma =$	$0{,}0\dot{6}$	0,0415	0,0297	0,0224	0,0174	0,0135	0,0100	0,0068	0,0036	0

$$\frac{1}{l} \Gamma_{max} = \frac{1}{15}, \ \lambda = 0. \quad \frac{1}{l} \Gamma_{min} = 0, \ \lambda = 90^0.$$

$$\varphi_{min} = 32{,}5 \frac{\delta}{r}, \quad (1^0 51'), \quad \lambda = 35^0.$$

Ist $\mathfrak{F}(A) = 5\delta \times \delta$, so hat man

$$\Gamma = \frac{2 \sin \lambda}{ab}, \quad a = 2 + \sin \lambda + 5 \cos \lambda.$$

$$b = -2 + 5 \sin \lambda + 5 \cos \lambda + 2 \tan \lambda + 4 \sec \lambda + 4 \tan \lambda \cos \frac{\lambda}{2}.$$

Vergleich.

		E	l	$\frac{1}{r}\Gamma_{max}$	$\frac{1}{r}\Gamma_{min}$
a)	λ	11	r	$\frac{1}{33}$, $\lambda = 0^0$, 180^0	0,0147 $\lambda = 90^0$
b)	2λ	11	r	$\frac{1}{33}$, $\lambda = 0^0$, 180^0	0 $\lambda = 90^0$
c)	$\frac{\lambda}{2}$	12	$2r \cos \frac{\lambda}{4}$	$\frac{1}{15}$, $\lambda = 0$	0 $\lambda = 180^0$
d)	$90^0 - \lambda$	13	$2r \sin \lambda$	0,0226 $\lambda = 35^0$	0 $\lambda = 0$, 90^0

Bei demselben r ist

$$\Gamma_a > \Gamma_b,\ 50^0 33' < \lambda < 129^0 27';\ \Gamma_a < \Gamma_c,\ \lambda < 127^0 3'.$$

$$\Gamma_a > \Gamma_d,\ 0 \leqq \lambda < 40^0 \text{ und } 48^0 < \lambda \leqq 90^0.$$

$$\Gamma_b < \Gamma_c,\ \lambda < 127^0 41',$$

$\Gamma_b < \Gamma_d$ bei allen λ mit Ausnahme von $\lambda = 60^0$, wo $\Gamma_b = \Gamma_d$.

$$\Gamma_c > \Gamma_d \text{ bei allen } \lambda.$$

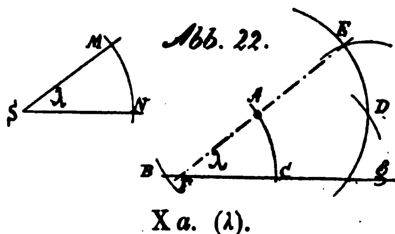
Demnach liefert d) das mindest genaue Resultat; etwas genauer ist b). In dem grossen Bereich $0 \leqq \lambda < 127^0$ ist ferner c) der b), a) und d) überlegen. Endlich ist b) in zwei Gebieten von zusammen $\sim 101^0$ genauer als a. Hingegen sinkt bei a) die Genauigkeit nicht unter 0,0147. Während bei a) und b) die Länge l constant $= r$ ist, hängt dieselbe bei c) und d) von λ ab. Die Zirkelöffnung wird daher bei letzteren besser ausgenutzt. Übereinstimmung mit E besteht nur bei d).

X. Durch den Punkt A ausserhalb der Geraden g eine Gerade g' zu ziehen, die mit g einen Winkel

$$a) = \lambda,\quad b) = 2\lambda,\quad c) = \frac{\lambda}{2},\quad d)\ 90^0 - \lambda$$

bildet.

Man construire nach IV_2 oder IV_3 einen Punkt D, so dass $AD \parallel g$ ist und lege in A an AD nach IX den verlangten Winkel an. — Für c) und d) bestehen besondere geometrographische Lösungen.



X a. (λ).

Abb. 22; Verbindung von IV_2 mit IX a. $E = 15$; 5 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma = \frac{1}{3}\frac{\cos\frac{\lambda}{2}}{A}h,$$

$$= \left(4 + 10\sin\frac{\lambda}{2} + 8\cos\frac{\lambda}{2}\right)\sin\alpha + 5\cos\frac{\lambda}{2}\cos\alpha + 5\cos\frac{\lambda}{2}.$$

Der ungünstigste Winkel α_0 ist bestimmt durch

$$\tan \alpha_0 = \frac{2}{5} \frac{2 + 5 \sin \frac{\lambda}{2} + 4 \cos \frac{\lambda}{2}}{\cos \frac{\lambda}{2}}.$$

$\lambda =$	0°	20°	40°	60°	90°	120°	140°	160°	180°
$\alpha =$	67°23′	70°7′	72°32′	74°47′	75°0′	78°32′	87°30′	85°10′	90°

$$\frac{1}{h} \Gamma_{max} = \begin{cases} \frac{1}{30}, & \alpha = 0, \\ \frac{1}{3} \frac{\cos \frac{\lambda}{2}}{3 + 10 \sin \frac{\lambda}{2} + 13 \cos \frac{\lambda}{2}} < \frac{1}{51}, & \alpha = 90^0. \end{cases}$$

Der Hilfswinkel α ist demnach möglichst klein, jedenfalls $< 67^0 23'$ oder $r > \frac{13}{12} h$ anzunehmen.

Bei constantem α ist

$$\Gamma_{max} = \frac{1}{3} \frac{1}{5 + 12 \sin \alpha + 5 \cos \alpha} h$$

bei $\lambda = 0$; mit zunehmendem λ nimmt Γ ab und wird ein Minimum $= 0$ bei $\lambda = 180^0$.

Bei $\lambda > 90^0$ ist demzufolge die Construction auf $180^0 - \lambda$ anzuwenden.

Für $\alpha = 30^0$ ist $l = r = 2h$ und

$$\Gamma = \frac{1}{3} \frac{\cos \frac{\lambda}{2}}{2 + 5 \sin \frac{\lambda}{2} + 13{,}330127 \cos \frac{\lambda}{2}} h;$$

$\lambda =$	180° 0°	170° 10°	160° 20°	150° 30°	140° 40°	130° 50°	120° 60°	110° 70°	100° 80°	90°
$\frac{1}{h} \Gamma =$	0,0217	0,0211	0,0205	0,0199	0,0190	0,0180	0,0180	0,0173	0,0165	0,0158
$\frac{1}{l} \Gamma =$	0,0108	0,0105	0,0102	0,0099	0,0095	0,0090	0,0090	0,0086	0,0082	0,0079

$$\varphi_{min} = 16{,}83 \frac{\delta}{r} (0^\circ 58').$$

Für den Schnitt F von l mit g ist bei $\alpha = 30^\circ$

$$\gamma = \frac{\sin^2 \lambda \cos \frac{\lambda}{2}}{2 + 5 \sin \frac{\lambda}{2} + 14{,}830127 \cos \frac{\lambda}{2} + 3 \sin \lambda \cos \frac{\lambda}{2}}.$$

$\lambda =$	180° / 0°	170° / 10°	160° / 20°	150° / 30°	140° / 40°	130° / 50°	120° / 60°	110° / 70°	100° / 80°	90°
γ	0	0,0017	0,0062	0,0126	0,0197	0,0263	0,0332	0,0374	0,0393	0,0391

$$\gamma_{max} = \frac{\sin \lambda}{\frac{1}{90} + 3 \sin \lambda}$$

bei $\alpha = 0^\circ$ nimmt bis $\lambda = 90^\circ$ zu, wofür

$$\gamma_{max} = \frac{90}{271} = 0{,}3321 \ldots,$$

und von da an ab.

Abb. 23.

X a_2. (λ).

Verbindung von IV$_3$ mit IX a. Abb. 23. $E = 18$; 5 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma = \frac{1}{3} \frac{\operatorname{cotg} \alpha \cos \frac{\lambda}{2}}{6 + 2u \sin \frac{\lambda}{2} + 11 \cos \frac{\lambda}{2}} h,$$

$$u = \frac{6 + 14 \sin \alpha + 6 \cos \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$\frac{1}{h} \Gamma_{max} = \infty, \quad \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad r = \infty.$$

Es ist daher r + anzunehmen.

$$\frac{1}{l}\Gamma_{max} = \frac{\cos\frac{\lambda}{2}}{6 + 24\sin\frac{\lambda}{2} + 11\cos\frac{\lambda}{2}}.$$

Die Genauigkeit ist um so grösser, je kleiner λ ist; für $\lambda = 0^0$ ist $\Gamma_{max} = \frac{\cos\alpha}{25,5}r$. Bei stumpfem λ ist $180^0 - \lambda$ zu übertragen.

Bei $\alpha = 30^0$ ist

$$\Gamma = \frac{\cos\frac{\lambda}{2}}{52\sin\frac{\lambda}{2} + \sqrt{3}\left(6 + 12\sin\frac{\lambda}{2} + 11\cos\frac{\lambda}{2}\right)}h.$$

$\lambda =$	180° / 0°	170° / 10°	160° / 20°	150° / 30°	140° / 40°	130° / 50°	120° / 60°	110° / 70°	100° / 80°	90°
$\frac{1}{h}\Gamma =$	0,0339	0,0279	0,0235	0,0199	0,0177	0,0155	0,0137	0,0121	0,0107	0,0094
$\frac{1}{l}\Gamma =$	0,0195	0,0155	0,0131	0,0111	0,0099	0,0086	0,0076	0,0067	0,0060	0,0052

$$\varphi_{min} = \frac{20}{\sqrt{3}}\frac{\delta}{h}, \quad \lambda = 0^0\ (0^0 40').$$

Für den Schnitt F von l mit g ist

$$\gamma = \frac{2\cos\frac{\lambda}{2} - \cos\frac{3\lambda}{2} - \cos\frac{5\lambda}{2}}{9\sin\frac{3\lambda}{2} + 113\sin\frac{\lambda}{2} + 4\sqrt{3}\left(3 + 6\sin\frac{\lambda}{2} + 7\cos\frac{\lambda}{2}\right)}.$$

λ	180° / 0	170° / 10°	160° / 20°	150° / 30°	140° / 40°	130° / 50°	120° / 60°	110° / 70°	100° / 80°	90°
γ	0	0,0021	0,0069	0,0127	0,0189	0,0230	0,0261	0,0274	0,0270	0,0248

$$\gamma_{max} = 0,03025, \quad \lambda \sim 58^0.$$

Verwendet man unmittelbar $A(r)$ statt $A(2a)$ und beschreibt $C(r)$ durch S, so wird das Ergebnis trotz dieser Vereinfachung erheblich ungenauer.

Vergleich: Es ist $\Gamma a_1 < \Gamma a_2$, wenn $30°0' < \lambda < 150°0'$ bei Verwendung des Supplements für $\lambda > 90°$.

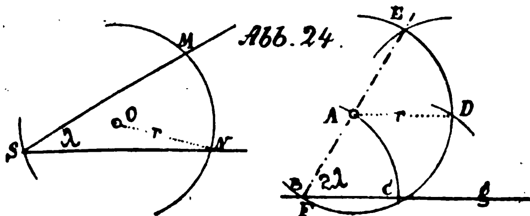
Es ist daher Xa_1 *bei* $\lambda \leqq 30°$ *und* $\lambda \geqq 150°$, Xa_2 *bei* $30° \leqq \lambda < 150°$ *anzuwenden*.

Ferner ist $\frac{1}{l}\Gamma a_1 > \frac{1}{l}\Gamma a_2$ für jedes λ.

Bezüglich des Schnittes F von l mit g gilt

$$\gamma a_2 > \gamma a_1, \quad \lambda < 30°40' \quad \text{und} \quad \lambda > 149°20'.$$

Das Gebiet der Überlegenheit der *einen* Construction bezüglich l ist zugleich jenes der grösseren Genauigkeit der anderen Construction. Ähnliches fand sich bei *Mittelsenkrechte* und *Mittelpunkt*. Ein grösseres l mit einer grösseren Genauigkeit trifft g unter einem kleineren Winkel, dem ein kleineres γ entspricht.



Xb_1. (2λ).

Abb. 24. Verbindung von IV_2 mit IXb. $E = 15$; 5 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma = \frac{1}{15}\frac{h}{N}, \quad N = 1 + a\sin\alpha + \cos\alpha,$$

$$a = \frac{2}{5}\left(2 + \operatorname{cotg}\lambda + 2\sec\frac{\lambda}{2}\right).$$

Der ungünstigste Winkel α_0 ergiebt sich aus

$$\tan\alpha_0 = a,$$

wofür

$$\Gamma_{\min} = \frac{1}{15}\frac{\cos\alpha_0}{1+\cos\alpha_0}h, \quad 68°39' \leqq \alpha_0 \leqq 90°.$$

$$\Gamma_{\max} = \begin{cases} \frac{1}{30}h, & \alpha = 0, \\ < \frac{h}{44}, & \alpha = 90°. \end{cases}$$

Zweien Hilfswinkeln α_1, α_2, welche der Bedingung $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \alpha^0$ genügen, entsprechen gleiche Γ. Wählt man $\alpha < 47^0 18'$ oder $r > \frac{7}{4} h$, so erhält man Γ, die grösser sind als alle Γ, die grösseren α entsprechen.

Für $\alpha = 30^0$ ist

$$\Gamma = \frac{1}{3} \frac{\cos\frac{3\lambda}{2} + \cos\frac{\lambda}{2}}{N_1} h,$$

$$N_1 = 4 \cos\lambda + \sin\frac{3\lambda}{2} + \sin\frac{\lambda}{2} + 11{,}330127 \left(\cos\frac{3\lambda}{2} + \cos\frac{\lambda}{2}\right),$$

Γ und $\Gamma : l$ nehmen mit wachsendem λ zuerst bis 10^0 zu, um dann fortwährend abzunehmen. Die Schnitte bei M, N und E werden immer ungünstiger. Für stumpfe λ ist diese Lösung völlig unbrauchbar, man wird sie auf $180^0 - \lambda$ anwenden und $360^0 - 2\lambda$ erhalten.

λ —	180^0 0^0	170^0 10^0	160^0 20^0	150^0 30^0	140^0 40^0	130^0 50^0	120^0 60^0	110^0 70^0	100^0 80^0	90^0
$\frac{1}{h}\Gamma =$	0,0250	0,0257	0,0243	0,0238	0,0233	0,0226	0,0217	0,0202	0,0170	0
$\frac{1}{l}\Gamma =$	0,0125	0,0128	0,0121	0,0119	0,0116	0,0113	0,0108	0,0101	0,0085	0

$$\varphi_{min} = 29{,}7 \cdot \frac{\delta}{r}, \; \lambda = 10^0 \, (170^0) \, (1^0 42'{,}1).$$

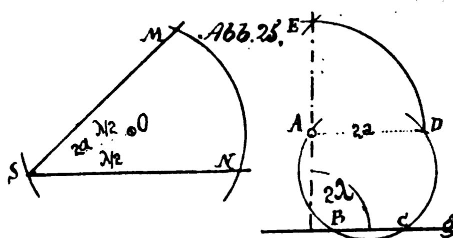
Für den Schnitt F von l mit g ist bei $\alpha = 30^0$

$$\gamma = \frac{\sin^2 2\lambda \cos\frac{\lambda}{2}}{L},$$

$$L = (3 \sin 2\lambda + 2 \sin\lambda) \cos\frac{\lambda}{2} + \left(4 + 25{,}660254 \cos\frac{\lambda}{2}\right) \cos\lambda.$$

$\lambda =$	180^0 0^0	170^0 10^0	160^0 20^0	150^0 30^0	140^0 40^0	130^0 50^0	120^0 60^0	110^0 70^0	100^0 80^0	90^0
$\gamma =$	0	0,0040	0,0144	0,0255	0,0357	0,0107	0,0385	0,0290	0,0160	0

Ein *Maximum* ist γ bei $\sim 50^0$ und ein *Minimum* bei $0^0, 90^0, 180^0$.



X b_2.

Abb. 25. Verbindung von IV_3 mit IXb. $SO = AD$. $E = 18$; 5 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma = \frac{1}{3} \frac{\cot\alpha \cos\lambda}{P} h.$$

$$P = 4 + 10\sin\lambda + 9\cos\lambda + 4\cos\lambda \,.\, \sec\frac{\lambda}{2} + 4\sin\lambda\sec\alpha\,(3 + 7\sin\alpha)$$

Γ ist bei $\alpha = 0$ am grössten (∞), nimmt mit wachsendem α stetig ab und verschwindet bei $\alpha = 90^0$.

Es ist daher r + zu machen.

Ferner ist Γ um so grösser, je kleiner λ; $\Gamma_{max} = \frac{1}{51} \cot\alpha \,.\, h$, $\lambda = 0$; $\Gamma_{min} = 0$, $\lambda = 90^0$. Bei stumpfem λ ist die Construction auf $180^0 - \lambda$ anzuwenden, wofür $360^0 - 2\lambda$ erhalten wird.

Für $\alpha = 30^0$ ist $l = h\sqrt{3}$ und

$$\Gamma = \frac{\cos\lambda}{P'} h;$$

$$P' = 52\sin\lambda + \sqrt{3}\left(4 + 10\sin\lambda + 9\cos\lambda + 4\cos\lambda\sec\frac{\lambda}{2}\right).$$

$\lambda =$	180^0 0^0	170^0 10^0	160^0 20^0	150^0 30^0	140^0 40^0	130^0 50^0	120^0 60^0	110^0 70^0	100^0 80^0	90^0
$\frac{1}{h}\Gamma$	0,0340	0,0230	0,0181	0,0141	0,0111	0,0085	0,0064	0,0042	0,0022	0
$\frac{1}{l}\Gamma =$	0,0196	0,0138	0,0105	0,0081	0,0064	0,0050	0,0037	0,0024	0,0013	0

$$\varphi_{min} \frac{20}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\delta}{h}, \quad \lambda = 0^0\ (0^0 43').$$

Für F ist bei $\alpha = 30^0$

$$\gamma = \frac{3 \sin^2 2\lambda}{Q},$$

$$Q = 9 \sin 2\lambda + 104 \sin \lambda + 4\sqrt{3} \left(2 + 5 \sin \lambda + 6 \cos \lambda + 2 \cos \lambda \sec \frac{\lambda}{2}\right)$$

$\lambda =$	180^0 0^0	170^0 10^0	160^0 20^0	150^0 30^0	140^0 40^0	130^0 50^0	120^0 60^0	110^0 70^0	100^0 80^0	90^0
$\gamma =$	0	0,0070	0,0187	0,0268	0,0280	0,0224	0,0132	0,0049	0,0008	0

γ ist ein *Maximum* bei $\sim 40^0$ (140^0), ein *Minimum* bei $\gamma = 0$, 90^0 und 180^0. Unter den extremen Werten von Γ und γ besteht somit nur bei $\lambda = 90^0$ Übereinstimmung; bei $\lambda = 0$ hingegen ist Γ ein Maximum, γ ein Minimum.

Vergleich: Es ist

$$\Gamma_1 > \Gamma_2 \quad 8^0 20' < \lambda < 171^0 40',$$

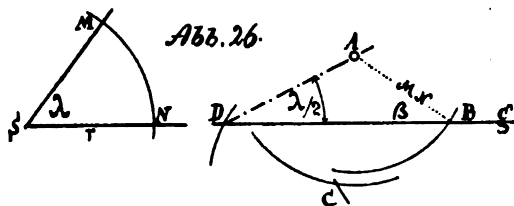
$$\frac{1}{l}\Gamma_1 > \frac{1}{l}\Gamma_2 \quad 31^0 36' < \lambda < 140^0 24'.$$

Demnach ist bei $8^0 20 < \lambda < 171^0 40'$ Xb_1, *bei* $\lambda < 8^0 20'$ *und bei* $\lambda > 171^0 40'$ Xb_2 *anzuwenden.*

Ferner ist $\gamma_2 > \gamma_1$, $\lambda < 31^0 42'$ und $\lambda > 148^0 18'$.

Die Überlegenheitsgebiete von Γ und γ decken sich nicht. Bemerkenswert ist, dass b_2 um drei Elementaroperationen (C) mehr erfordert als b_1. Ist die Ordinate von O des Hilfskreises nicht $\frac{h}{2}$, so vergrössert sich das Anwendungsgebiet von b_1.

Abweichungen um $\pm \delta$ haben keinen Einfluss.



$$X c_1. \left(\frac{1}{2}\lambda\right).$$

Abb. 26. $S(r) \times$ Schenkel $= M$, N, A $(MN) \times g = B$,

$B(r) \times A(r) = C,\ C(r) \times g = D;\ D - A,\ ADB = \frac{\lambda}{2}.\ E = 16;$

5 Kreise, 1 Gerade. $\sphericalangle ABD = \beta$.

$$\Gamma = \frac{2}{3} \frac{\cot g \frac{\lambda}{2} \sin\left(\frac{\lambda}{2} + \beta\right)}{S} h,\quad 0 < \beta \leqq 90^0.$$

$$S = 2 + 2\sin\lambda + 2\cos\lambda + 5\cos\frac{\lambda}{2} + \sin(\lambda + 2\beta) - 2\cos(\lambda + 2\beta) -$$
$$- 5\cos\left(\frac{\lambda}{2} + 2\beta\right) + 2\sin(\lambda + \beta) + 4\cos\frac{\lambda}{2}\sin\beta + 4\sin 2\beta -$$
$$- 2\cos 2\beta + 2\sin\beta.$$

Γ ist bei $\beta = 0$ ein Maximum

$$\Gamma_{max} = \frac{1}{15} \operatorname{cosec} \frac{\lambda}{2} h.$$

Es ist daher $r +$ anzunehmen und zwar um so grösser, je kleiner λ ist. Je kleiner λ, desto grösser die Genauigkeit.

Diese Lösung versagt, wenn bei kleinem λ und grossem h D ausserhalb der Zeichengrenzen fällt.

Wählt man $\beta = 30^0$, so ist $r = l_0 = h : \sin\frac{\lambda}{2}$ und der Schnitt bei B erfolgt unter 60^0, wofür

$$\Gamma = \frac{2}{3} \frac{\cot \frac{\lambda}{2} \sin\left(\frac{\lambda}{2} + 30^0\right)}{T} h,$$

$$T = 2 + 2\sqrt{3} + 2\sin\lambda + 2\cos\lambda + 7\cos\frac{\lambda}{2} + \sin(\lambda + 60^0) -$$
$$- 2\cos(\lambda + 60^0) + 2\sin(\lambda + 30^0) - 5\cos\left(\frac{\lambda}{2} + 60^0\right).$$

$\lambda =$	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
$\frac{1}{h}\Gamma =$	∞	0,3082	0,1580	0,1073	0,0816	0,0659	0,0552	0,0473	0,0413	0,0364
$\frac{1}{h}\Gamma_{max} =$	∞	0,7649	0,3839	0,2576	0,1949	0,1577	0,1333	0,1162	0,1037	0,0943
$\frac{1}{l}\Gamma =$	0,0259	0,0269	0,0274	0,0278	0,0279	0,0278	0,0276	0,0271	0,0265	0,0257

$\lambda =$	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
$\frac{1}{h}\Gamma =$	0,0323	0,0288	0,0253	0,0221	0,0187	0,0152	0,0112	0,0063	0
$\frac{1}{h}\Gamma_{max} =$	0,0870	0,0814	0,0770	0,0735	0,0710	0,0690	0,0677	0,0669	0,0667
$\frac{1}{l}\Gamma =$	0,0237	0,0236	0,0219	0,0200	0,0176	0,0147	0,0110	0,0063	0

Der Überschuss $\Gamma_{max} - \Gamma$, am grössten ($= \infty$) bei $\lambda = 0^0$, nimmt mit wachsendem λ ab und erreicht bei $\sim 130^0$ sein Minimum (0,0514) und sein secundäres Maximum (0,0667) bei $\lambda = 180^0$.

$\Gamma : l$ ist ein Maximum bei $\sim 45^0$, nimmt von da an stetig ab und verschwindet bei 180^0.

$$\varphi_{min} = 0, \quad \lambda = 0.$$

Für D ist

$$\gamma = \frac{\sin\lambda \sin\left(\frac{\lambda}{2} + \beta\right)}{-M},$$

$$M = -3\sin(\lambda + 2\beta) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\lambda}{2} + \beta\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\lambda}{2} - \beta\right)$$

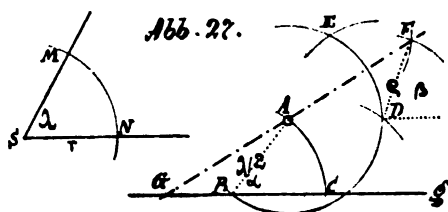
$$-\sin 2\beta\left[2 + \cos\left(\frac{\lambda}{2} + \beta\right)\right] - 2(n + \sin\beta)\sin\beta\sin\left(\frac{\lambda}{2} - \beta\right),$$

$$n = 5 + 4\sin\frac{\lambda}{2} + 4\cos\frac{\lambda}{2}.$$

$\lambda =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\gamma =$	0	0,0048	0,0098	0,0148	0,0202	0,0247	0,0292	0,0334	0,0372	0,0403

$\lambda =$	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
$\gamma =$	0,0428	0,0443	0,0444	0,0435	0,0407	0,0360	0,0288	0,0172	0

$$\gamma_{max} = 0{,}0408, \quad \lambda = 120^0; \quad \gamma_{min} = 0, \quad \lambda = 0,\ 180^0.$$



X c. $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$. 2. *Lösung*. Verbindung von IX. mit VI. Abb. 27. $E = 19$; 7 Kreise, 1 Gerade.

$$\sphericalangle FDD' = \beta, \quad \sphericalangle ABC = \alpha.$$

$$\Gamma = \frac{2}{3} \frac{\cos\frac{\lambda}{2} \sin\beta}{\sin\alpha\ V} h.$$

Sind λ und α unveränderlich, so ist

$$\Gamma_{\max} = \frac{1}{15} \frac{1}{\mathfrak{A}\sin\alpha + \cos\alpha + 1} h,$$

$$\mathfrak{A} = \frac{2}{5} + \tan\frac{\lambda}{2} + \frac{4}{5}\cos\frac{\lambda}{2} + \frac{2}{5}\sec\frac{\lambda}{2}, \quad \varrho = \sin\frac{\lambda}{2}\sec\lambda\,.\,r$$

$$l = \cos\frac{\lambda}{2}\cos\lambda\,.\,r, \quad \lambda \leqq 90^0, \quad \beta = 90^0 - \frac{\lambda}{2}.$$

$$\mathfrak{A} = \frac{2}{5} + \tan\frac{\lambda}{2} + \frac{2}{5}\sec\frac{\lambda}{2} + \frac{2}{5}\operatorname{cosec}\frac{\lambda}{2}, \quad \varrho = \infty, \quad l = \infty,$$

$$\lambda \geqq 90^0, \quad \beta = \frac{\lambda}{2}.$$

Der ungünstigste Wert α_0 von α bestimmt sich aus

$$\tan\alpha_0 = \mathfrak{A}.$$

Zweien Winkeln α_1, α_2, für die $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \alpha_0$ besteht, entsprechen gleich grosse Γ.

Wird das günstigste β vorausgesetzt, so geht bei $\alpha < 25^0 59',4$, $\lambda \leqq 90^0$ und $\alpha < 47^0 0',6$, $\lambda \geqq 90^0$ ein Γ hervor, das grösser ist als jedes einem grösseren α entsprechendes Γ. Bei $\lambda > 55^0$ kann woh

das günstigste β nicht mehr angenommen werden, dem entsprechend ist α noch kleiner zu wählen.

Man wähle daher $r+$ und $\beta = 90^0 - \frac{\lambda}{2}$ bei $\lambda < 90^0$; wo dies aber wegen Platzmangel nicht angeht, so wie bei $\lambda > 90$, $\varrho +$.

Für $\alpha = 30^0$, $\varrho = DE = 2r \sin\frac{\lambda}{2}$ oder $\beta = \frac{\lambda}{2} + 30^0$ ist

$$\Gamma = \frac{1}{6}\frac{1+2\sin(\lambda+30^0)}{W}h,$$

$$W = 7{,}83015 + 5\sin\lambda + 2\cos\frac{\lambda}{2} + 7\sin(\lambda+30^0) +$$
$$+ 3\sin\left(\frac{\lambda}{2}+30^0\right) - \sin\left(\frac{\lambda}{2}-30^0\right).$$

Für kleinere $\lambda < 90^0$, wo das günstigste $\beta = 90^0 - \frac{\lambda}{2}$ angenommen werden kann und $\alpha = 30^0$, ist

$$\Gamma'_a = \frac{1}{3}\frac{\cos\frac{\lambda}{2}}{V'}h,$$

$$V' = 2 + \cos\lambda + 7\cos\frac{\lambda}{2} + 5\cos\left(\frac{\lambda}{2}-30^0\right).$$

$\lambda =$	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
$\frac{1}{h}\Gamma'$	0,0233	0,0229	0,0226	0,0222	0,0219	0,0217	0,0213	0,0209	0,0205	0,0200
$\frac{1}{h}\Gamma$	0,0217	0,0219	0,0220	0,0219	0,0219	0,0216	0,0213	0,0209	0,0204	0,0199

λ	100^0	110^0	120^0	130^0	140^0	150^0	160^0	170^0	180^0
$\frac{1}{h}\Gamma$	0,0191	0,0183	0,0174	0,0162	0,0147	0,0127	0,0101	0,0063	0

$\varphi_{\min} = 0$, $\lambda = 0$; bei $\alpha = 30^0$, $\varphi_{\min} = 0^0 58'$, $\lambda = 0$.
$\alpha = 0$

Für den Schnitt G von l mit g ist bei $\alpha = 30^0$ und $\beta = 90^0 - \frac{\lambda}{2}$:

$$\gamma_1 = \frac{\sin\lambda \sin\frac{\lambda}{2}}{K_1}.$$

$$K_1 = 4 - 3\sin\lambda + 5\cos\lambda + 14\cos\frac{\lambda}{2} + 10\cos\left(\frac{\lambda}{2} - 30^0\right);$$

$\beta = \frac{\lambda}{2} + 30^0$,

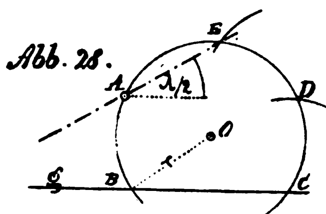
$$\gamma_2 = \frac{\cos\left(\frac{\lambda}{2} - 30^0\right) + \cos\left(3\frac{\lambda}{2} + 30^0\right)}{K_2} \sin\frac{\lambda}{2};$$

$$K_2 = 15{,}66025 + 10\sin\lambda + 14\sin(\lambda + 30^0) + 6\sin\left(\frac{\lambda}{2} + 30^0\right) - 2\sin\left(\frac{\lambda}{2} - 30^0\right) + 7\cos\frac{\lambda}{2} + 3\cos\left(\frac{\lambda}{2} - 30^0\right) - 3\cos\left(\frac{3}{2}\lambda + 30^0\right).$$

$\lambda =$	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
$\gamma =$	0	0,0005	0,0018	0,0039	0,0067	0,0101	0,0138	0,0178	0,0227	0,0254

$\lambda =$	100^0	110^0	120^0	130^0	140^0	150^0	160^0	170^0	180^0
$\gamma =$	0,0287	0,0314	0,0333	0,0342	0,0336	0,0318	0,0240	0,0138	0

$\gamma_{max} = 0{,}0342$, $\lambda \sim 130^0$, $\gamma_{min} = 0$, $\lambda = 0^0$, 180^0.



X*c*. $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$. *3. Lösung.* Abb. 28. Construction von *D* mittels IV_3; $DE = MN$, $\sphericalangle EAD = \frac{\lambda}{2}$. $\sphericalangle OCB = \alpha$. $E = 15$; 4 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma = \frac{1}{3}\,\frac{\pm\cos\frac{\lambda}{2}\cos\left(\frac{\lambda}{2}+\alpha\right)}{\sin\alpha\,P}\,h,$$

$$P = \frac{7}{2} + \sin\alpha + 2\cos\alpha + 2\cos\frac{\lambda}{2} \pm 4\cos\left(\frac{\lambda}{2}+\alpha\right) + 2\sin(\lambda+\alpha)$$
$$+ 2\cos(\lambda+\alpha) + \frac{r}{2}\cos(\lambda+2\alpha) + \left\{\begin{matrix} m \\ -n \end{matrix}\right\}\sin(\lambda+2\alpha),$$

wo das *obere* Zeichen und m — oder das *untere* Zeichen und n gilt, jenachdem

$$\frac{\lambda}{2} + \alpha \gtrless 90^{\circ}.$$

Bei $\frac{\lambda}{2} + \alpha = 90^{\circ}$ geht l in die Tangente an $O(r)$ in A über, wobei $\Gamma = 0$ ist; Γ verschwindet noch bei $\lambda = 180^{\circ}$.

Es ist α — oder r + zu machen.

Für $\alpha = 30^{\circ}$ ist $l = \pm 2\cos\left(\frac{\lambda}{2} + 30^{\circ}\right)$ und

$$\Gamma = \frac{1}{6}\,\frac{\cos 30^{\circ} + \cos(\lambda + 30^{\circ})}{U}\,h,$$

$$U = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \cos\frac{\lambda}{2} + \frac{13}{12}\cos\lambda + 2\cos\left(\frac{\lambda}{2} + 30^{\circ}\right) +$$
$$+ \frac{25}{12}\sin(\lambda + 30^{\circ}) + \cos(\lambda + 30^{\circ}) + \frac{7}{4}\cos(\lambda + 60^{\circ}),$$
$$\lambda \leqq 120^{\circ}$$
$$= -\left\{2 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \cos\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{12}\cos\lambda - 2\cos\left(\frac{\lambda}{2} + 30^{\circ}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{13}{12}\sin(\lambda + 30^{\circ}) + \cos(\lambda + 30^{\circ}) + \frac{7}{4}\cos(\lambda + 60^{\circ})\right\},$$
$$\lambda \geqq 120^{\circ}.$$

λ —	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{1}{h}\Gamma =$	∞	0,0289	0,0281	0,0268	0,0254	0,0241	0,0223	0,0206	0,0183	0,0157
$\frac{1}{l}\Gamma =$	0,0175	0,0176	0,0183	0,0190	0,0198	0,0210	0,0223	0,0244	0,0268	0,0303

$\lambda =$	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
$\frac{1}{h}\Gamma =$	0,0125	0,0079	0	0,0110	0,0189	0,0212	0,0175	0,0096	0
$\frac{1}{l}\Gamma =$	0,0360	0,0454	0,06	0,0631	0,0544	0,0410	0,0256	0,0114	0

Je kleiner $\pm(\lambda - 120^0)$, desto geringer die Genauigkeit.

Maxima bestehen für $\frac{1}{h}\Gamma$ bei $\lambda = 0$, 150^0 und für $\frac{1}{l}\Gamma$ bei $\lambda = 120^0$. In dem besonderen Falle $\lambda = 120^0$, wo diese Lösung versagt, empfiehlt sich VIII *a* ($\lambda = 60^0$).

$$\varphi_{\min} = 1{,}5\frac{\delta}{h}, \quad \lambda = 0, \quad (\alpha = 30^0)\ (0^0 5',2).$$

Für den Schnitt F von l mit g ist bei $\alpha = 30^0$

$$\gamma = \frac{1}{4}\,\frac{\cos 30^0 - \sin\lambda - \cos(2\lambda + 30^0)}{2\,U \pm 3\cos\frac{\lambda}{2} + 3\sin\lambda\cos\left(\frac{\lambda}{2} + 30^0\right)},$$

wo das *obere* Zeichen bei $\lambda \leqq 120^0$, das *untere* bei $\lambda \geqq 120^0$ gilt.

$\lambda =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\gamma =$	0	0,0005	0,0021	0,0044	0,0071	0,0101	0,0129	0,0153	0,0169	0,0171

$\lambda =$	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
$\gamma =$	0,0154	0,0108	0	0,0163	0,0303	0,0382	0,0367	0,0240	0

Maxima liegen bei $\sim 90^0$ und 150^0. Bemerkenswert ist, dass bei $\lambda = 0$ Γ ein *Maximum* und γ ein *Minimum* ist!

Vergleich: Es ist $\Gamma_1 > \Gamma_2$, $\lambda < 167^0 47'$; $\Gamma_1 > \Gamma_3$, $\lambda < 139^0 50'$ $\Gamma_2 > \Gamma_3$, $67^0 41' < \lambda < 136' 10'$.

Unbrauchbar wird X_1, wenn D bei kleinem λ und grossem h ausserhalb der Zeichengrenzen fällt und X_2, wenn λ nur um Weniges vom Supplement σ des doppelten Hilfswinkels α differiert. Ist $\lambda - 139^\circ 50'$ Null oder sehr klein, so ist auch l sehr klein, was besonders dann misslich ist, wenn α wegen Raummangel nicht $< 30^\circ$ gemacht werden kann. Demnach gilt:

Für $\lambda < 139^\circ 50'$, wo der Schnitt D von l mit g noch innerhalb der Zeichengrenzen fällt, so wie für grössere λ, wo die nach X_3 ermittelte Strecke l zu kurz ausfällt, ist X_1, in allen anderen Fällen X_3 anzuwenden.

Ausserdem ist:

$$\frac{1}{l}\Gamma_1 > \frac{1}{l}\Gamma_2; \quad \lambda < 140^\circ 37'; \quad \frac{1}{l}\Gamma_1 > \frac{1}{l}\Gamma_3, \quad \lambda < 79^\circ 0',$$

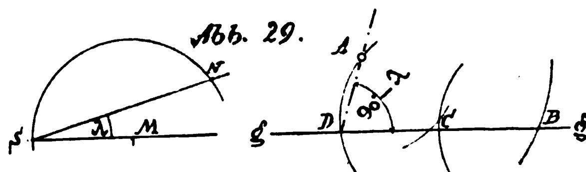
$$\frac{1}{l}\Gamma_2 < \frac{1}{l}\Gamma_3, \quad \lambda < 161^\circ 0'.$$

Schnitt von l mit g:

$$\gamma_1 > \gamma_2, \quad \lambda < 180^\circ; \quad \gamma_1 > \gamma_3, \quad \lambda < 148^\circ 15';$$

$$\gamma_2 > \gamma_3, \quad 50^\circ < \lambda < 143^\circ 10'.$$

Die Gegenüberstellung der Ergebnisse der Vergleichung der Γ und γ ergiebt eine Übereinstimmung in den Grenzen bis auf einige zehn Grade.



X*d*. $(90^\circ - \lambda)$. *1. Lösung.* Abb. 29. $A(s) \times g = B$, $s = NS$, $B(r) \times A(r) = C$, $C(r) \times g = D$, $D - A$, $\sphericalangle ADB = 90^\circ - \lambda$. $E = 17$; 5 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma = \frac{1}{3}\,\frac{\cos(\lambda-\beta)}{\cos\lambda\,.\,R}\,h,\quad 0^\circ < \beta < 90^\circ,\quad 0 \leqq \lambda \leqq 90^\circ,$$

$$R = -\cos\lambda + 2\sin\beta + 2\cos(\lambda-\beta) + 4\cos(\lambda-2\beta)$$
$$+ 2\operatorname{cotg}\frac{\lambda}{2}\sin\beta\sin(\lambda-\beta) + \frac{2n+5}{\sin\lambda}\sin\beta\cos(\lambda-\beta),$$

$$2n = \frac{-\cos\frac{5\lambda}{2} + 2\sin\frac{\lambda}{2} + 3\cos\lambda\cos\frac{\lambda}{2}}{\sin\frac{\lambda}{2}\cos\lambda}.$$

($2n$ ist $=\infty$ bei $\lambda = 0$, 90° und ein Minimum $= 8{,}25$ bei $\lambda = 45^\circ$.)

$$\Gamma_{max} = \frac{1}{15}\sec\lambda\,.\,h,\quad \beta = 0;\quad \Gamma_{min} = 0,\quad \lambda = 0;$$
$$\Gamma_{max} \text{ bei } \lambda = 90^\circ.$$

Es ist daher β — oder r + anzunehmen und zwar um so grösser, je kleiner λ ist.

Ein Mangel dieser Lösung ist die Unveränderlichkeit von $l = h\sec\lambda$. Sie kann ferner unbrauchbar werden, wenn bei grösserem λ und h D ausserhalb der Zeichengrenzen fällt.

Für $\beta = 30^\circ$ ist

$$\Gamma = \frac{1}{3}\,\frac{\cos(\lambda-30^\circ)}{\cos\lambda\,R'}\,h,$$

$$R' = 1 - \cos\lambda + 2\cos(\lambda-30^\circ) + 4\sin(\lambda+30^\circ)$$
$$+ \operatorname{cotg}\frac{\lambda}{2}\sin(\lambda-30^\circ) + \frac{1}{2}(2n+5)\cos(\lambda-30^\circ)\operatorname{cosec}\lambda.$$

$\lambda =$	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
$\frac{1}{h}\Gamma =$	0	0,0038	0,0125	0,0167	0,0225	0,0285	0,0362	0,0488	0,0795	0,2222
$\frac{1}{l}\Gamma$	0	0,0037	0,0118	0,0145	0,0172	0,0183	0,0180	0,0167	0,0138	0

$$\varphi_{min} = \frac{3}{2}\,\frac{\delta}{h},\quad (0^0 5',2),\quad \lambda = 90^0.$$

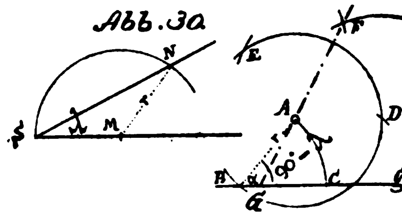
Für den Schnitt D von l mit g ist

$$\gamma = \frac{\sqrt{3} + 2\cos(2\lambda + 30^0)}{2\sin(2\lambda + 30^0) + 8\cos(\lambda + 30^0) - 4R' - 1},$$

$\lambda =$	0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
$\gamma =$	0	0,0105	0,0290	0,0318	0,0321	0,0280	0,0211	0,0136	0,0067	0

$$\gamma_{max} = 0{,}0351,\ \lambda = 40^0;\quad \gamma_{min} = 0,\ \lambda = 0^0,\ 90^0.$$

Bei letzterem Winkel ist γ ein *Maximum*, bei 0^0 ebenfalls ein *Minimum*.



Xd. $(90 - \lambda)$. 2. *Lösung* mittels IXd, IV_2 und VI. Abb. 30. $MS = AB = r$, $DE = NS$, Halbierung von DE durch AF. $\sphericalangle FGC = 90^0 - \lambda$. $E = 19$; 7 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma = \frac{1}{3\sin\alpha}\frac{\sin\beta\sin\lambda}{V}h,\quad V = 2\sin\lambda\,[1 - \cos(\lambda + \beta)]$$

$$+ \sin\beta\left[2 + \left(3 + 5\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)\sin\lambda + 4\cos\lambda + \operatorname{cotg}\frac{\lambda}{2}\right],$$

$$\Gamma_{max} = \frac{\sin\lambda}{3\sin\alpha\, V}h,$$

$$V = \begin{cases} 4 - 2\cos 2\lambda + 4\cos\lambda + \operatorname{cotg}\frac{\lambda}{2} + \left(5\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + 3\right)\sin\lambda; \\ \qquad \beta = \lambda,\ \lambda \geqq 45^0, \\ 2 + 4\cos\lambda + 2\tan\lambda + \cot\frac{\lambda}{2} + \left(5\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + 3\right)\sin\lambda; \\ \qquad \beta = 90^0 - \lambda \text{ oder } \varrho = \infty,\ \lambda \leqq 45^0. \end{cases}$$

Wird für β der günstigste Wert eingesetzt und α als veränderlich angesehen, so ist

$$\Gamma'_{max} = \frac{1}{3}\,\frac{\sin\lambda}{2\mathfrak{B}}\,h = \frac{h}{30}, \quad \alpha = 0.$$

$$\Gamma''_{max} = \frac{1}{3}\,\frac{\sin\lambda}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}\,h, \qquad \alpha = 90^0,$$

wo

$$\mathfrak{A} = \begin{cases} 2 + 3\sin\lambda + 4\cos\lambda + 2\tan\lambda + \operatorname{cotg}\frac{\lambda}{2}, & \lambda < 45^0, \\ 4 - 2\cos 2\lambda + 3\sin\lambda + 4\cos\lambda + \operatorname{cotg}\frac{\lambda}{2}, & \lambda > 45^0, \end{cases}$$

$$\mathfrak{B} = 5\sin\lambda, \quad \Gamma'_{max} > \Gamma''_{max}.$$

Der *ungünstigste* Wert α_0 von α berechnet sich aus

$$\tan\alpha_0 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}.$$

$$\alpha_{0\,min} = \begin{cases} 72^0 43',9, & \lambda < 45^0, \quad \alpha_{0\,max} = 90^0. \\ 63^0 26',1, & \lambda > 45^0. \end{cases}$$

Zweien Winkeln α_1, α_2 von der Eigenschaft $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = \alpha_0$ entsprechen gleiche Γ. Für alle $\alpha < 55^0 27',8$ bei $\lambda < 45^0$ und $\alpha < 36^0 52',2$ bei $\lambda > 45^0$ ergeben sich Γ, die grösser sind als alle grösseren α entsprechende Γ.

Ist r vorgegeben, so ist bei $\lambda < 45^0$ $\varrho +$ und bei $\lambda \geqq 45^0$ so zu wählen, dass $\lambda - \beta = 0$ oder möglichst klein ausfällt.

Bei vorgegebenem l nehme man $\alpha \sim 92^0,2 - 0,49\lambda^0$ bei $\lambda < 60^0$ und $\beta = \lambda$ bei $\lambda \geqq 60^0$.

Für $\alpha = 30^0$ und $\varrho = 2r\cos\lambda = DE$ ist $\beta = 120^0 - \lambda$, $l = 4h\sin(\lambda + 60^0)$ und

$$\Gamma_1 = \frac{0{,}5 + \sin(2\lambda - 30^0)}{3\,V_1}\,h,$$

$$V_1 = 7{,}14712 + 3\sin\lambda + 2\cos(2\lambda - 30^0) + \\ + \cos(\lambda - 30^0)\left(2 + \operatorname{cotg}\frac{\lambda}{2}\right) + 10{,}83013\sin(2\lambda - 30^0)$$

und bei $\lambda \geqq 45^0$, $\beta = \lambda$, wofür

$$\varrho = -2h \cos\lambda : \cos 2\lambda, \quad l = -2h \sin\lambda : \cos 2\lambda.$$

$$\Gamma''_2 = \frac{\sin\lambda}{3 V_2} h,$$

$$V_2 = 2 - \cos 2\lambda + 10{,}83013 \sin\lambda + 2 \cos\lambda + 0{,}5 \operatorname{cotg} \frac{\lambda}{2}.$$

Letztere Annahme gilt, wenn ϱ nicht zu gross ausfällt.

$\lambda =$	0	10⁰	20⁰	30⁰	40⁰	45⁰	50⁰	60⁰	70⁰	80⁰	90⁰
$\frac{1}{h}\Gamma' =$	0	0,0053	0,0115	0,0155	0,0181	0,0190	0,0198	0,0210	0,0217	0,0220	0,0214
$\frac{1}{h}\Gamma'' =$	.	.	.	.	.	0,0192	0,0199	0,0210	0,0218	0,0226	0,0232
$\frac{1}{l}\Gamma' =$	.	0,0014	0,0029	0,0039	0,0046	0,0049	0,0053	0,0061	0,0071	0,0080	0,0107

Für den Schnitt G von l mit g ist bei $\alpha = 30^0$, $\beta = 120^0 - \lambda$.

$$\gamma = \frac{{}^1/_2 + \cos 2\lambda - 2\cos(2\lambda + 60^0) - \cos(4\lambda + 60^0)}{2 V_1 + 6 \sin\lambda + 3\cos(\lambda - 60^0) - 3\cos(3\lambda + 60^0)},$$

$\lambda =$	0⁰	10⁰	20⁰	30⁰	40⁰	50⁰	60⁰	70⁰	80⁰	90⁰
$\gamma =$	0	0,0146	0,0271	0,0301	0,0273	0,0130	0,0137	0,0067	0,0018	0

Das Maximum liegt bei $\sim 30^0$.

Abb. 31.

X d. ($90^0 - \lambda$) 3. *Lösung.* Abb. 31. Construction von D mittels IV_3; $DE = NS$; $\measuredangle EFC = 90^0 - \lambda$. $E = 18$; 4 Kreise, 1 Gerade.

$$\Gamma = \frac{2}{3} \operatorname{cotg} \alpha \, \frac{\sin \lambda \sin (\lambda - \alpha)}{T},$$

$$T = \pm (3 \sin 2\alpha + 14 \sin \lambda \sin (\lambda - \alpha) + 4 \sin \lambda \cos \alpha + 3 \sin (2\lambda - 2\alpha). \\ + 4 \cos \alpha \sin (\lambda - \alpha)(g + 2),$$

$$2 \sin 2\lambda \, g = 2 + \sin \lambda + 5 \cos \lambda + 4 \sin 2\lambda + 5 \cos 2\lambda - \cos 3\lambda + \\ + \sin 3\lambda;$$

das *obere* Zeichen gilt bei $\lambda > \alpha$, das *untere* bei $\lambda < \alpha$; $\Gamma = 0$ bei $\lambda = \alpha$.

$$\Gamma_{\max} = \infty, \ \alpha = 0; \ \Gamma_{\min} = 0, \ \alpha = 90^0.$$

Es ist daher r + oder α — und verschieden von λ anzunehmen.

Für $\alpha = 30^0$ ist

$$\Gamma = \frac{\cos 30^0 - \cos (2\lambda - 30^0)}{U} h, \ \lambda \gtrless 30^0,$$

$$\frac{1}{6} U = \sin \lambda + \sin (\lambda - 30^0)(g + 2) \pm (2{,}5 - 2{,}5 \cos 2\lambda \\ - \frac{1}{V_3} \sin 2\lambda),$$

wo sich das *obere* Vorzeichen auf $\lambda > 30^0$ und das *untere* auf $\lambda > 30^0$ bezieht.

$\lambda =$	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
$\frac{1}{h}\Gamma =$	0	0,0036	0,0111	0	0,0046	0,0153	0,0188	0,0089	0,0011	0
$\frac{1}{l}\Gamma =$	0	0,0058	0,0032	0	0,0186	0,0224	0,0188	0,0069	0,0007	0

Minima liegen bei $\sim 15^0$ und 60^0.

$$\varphi_{\min} = 20{,}75 \frac{\delta}{h} (1^0 \, 11{,}4'), \ \lambda \sim 60^0.$$

Für den Schnitt F von l mit g ist bei $\alpha = 30^0$

$$\gamma = \frac{1}{3} \frac{[\cos (\lambda + 30^0) - \cos (3\lambda - 30^0)] \cos \lambda}{\frac{2}{9} U + 2 \sin \lambda + \cos (\lambda + 30^0) - \cos (3\lambda - 30^0)}, \ \lambda \gtrless 30^0,$$

$\lambda =$	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
$r =$	0	0,0107	0,0867	0	0,0187	0,0146	0,0112	0,0060	0,0016	0

Maxima bestehen bei $\sim 20^0$ und 45^0, also nicht dort, wo $\frac{1}{h}\Gamma$ ein Maximum ist.

Vergleich:

Es ist $\Gamma_1 > \Gamma_2$, $\lambda > 17^0$; $\Gamma_1 > \Gamma_3$, bei jedem λ nnd $\Gamma_2 > \Gamma_3$ bei jedem λ.

Für alle $\lambda > 17^0$, wo der Schnitt D von l mit g noch zugänglich, ist Xd_1 in allen andern Fällen Xd_2 zu verwenden.

Dass $\Gamma_2 > \Gamma_3$ bei *jedem* λ ist auffallend, da die bei Xd_3 angewendete Parallelen-Construction IV_3 genauer ist als die bei Xd_2 benutzte IV_2.

Schnitt von l mit g.

$\gamma_2 > \gamma_1$, $0 < \lambda < 19^0 20'$ und $26^0 < \lambda < 30^0 40'$;
$\gamma_3 > \gamma_1$, $0 < \lambda < 22^0 20'$;
$\gamma_2 > \gamma_3$, $0 < \lambda < 12^0 54'$, $22^0 25' < \lambda < 49^0 15'$,
$54^0 < \lambda < 90^0$.

Übereinstimmung mit Γ herrscht bei d_1 und d_2 bei

$$19^0 < \lambda < 26^0,\ 30^0 40' < \lambda < 90^0;$$

bei d_1 und d_3 bei $\lambda > 22^0 20'$ und bei d_2 und d_3 bei $0 < \lambda < 12^0 54'$, $22^0 25' < \lambda < 49^0 15'$, $54^0 < \lambda < 90^0$.

Demnach ist d_3 gegenüber d_1 und d_2 auch bezüglich γ als minderwertig zu bezeichnen.

Vergleicht man noch jene Lösungen, die das grösste Anwendungsgebiet haben — es sind die Xa_1, Xb_1, Xc_1, Xd_1, so findet sich, dass c_1 bei $\lambda < 70^0 22'$, und d_1 bei $70^0 22' < \lambda < 90^0$ allen andern überlegen ist; ferner ist c_1 bei $\lambda < 128^0 48'$ genauer als a_1 und b_1 was mit Hinblick auf die Einfachheitsziffer E bemerkenswert ist.

Bezüglich γ des Schnittes von l mit g nimmt c_1 und d_1 dieselbe hervorragende Stelle ein wie bei Γ, auch ist b_1 in meinem Gebiet von $\sim 128^0$ dem a_1 überlegen.

B. Dreiecks-Constructionen.

Allgemeines.

Sind f_1, f_2, f_3 die Inhalte der Fehlerflächen der Ecken A, B, C eines Dreiecks und $AB = c$, $BC = A$, $CA = b$ die Seiten, denen die Winkel γ, α, β gegenüberliegen. so ist die Menge aller idealen Seiten, deren Grenzpunkte in $\mathfrak{F}(C)$ und $\mathfrak{F}(B)$ liegen

$$\mathfrak{M}a = f_2 f_3 : a.$$

Alle möglichen Dreiecke deren Ecken in $\mathfrak{F}(A)$, $\mathfrak{F}(B)$ und $\mathfrak{F}(C)$ liegen, entstehen durch Verbinden jedes Punktes von $\mathfrak{F}(A)$ mit den Endpunkten aller a. Ihre Menge $\mathfrak{M}$ ist proportional dem Inhalt f_1 und indirekt proportional den Seiten b, c und kann daher mit

$$\mathfrak{M} = \frac{f_1 f_2 f_3}{abc}$$

angenommen werden. Demnach ist die *Genauigkeit*, wenn noch mit δ^6 multipliciert wird

$$\mathfrak{G} = \frac{abc\ \delta^6}{f_1 f_2 f_3}.$$

Derselbe Ausdruck entsteht, wenn von b oder c ausgegangen wird.

Es wird vorausgesetzt, dass eine Seite a in eine gegebene Gerade g und eine Ecke auf einen Punkt von g fällt.

Durch das Abtragen der Seite a auf g entsteht eine Strecke CB, deren Endpunkte die *Kreisförmige* $\mathfrak{F}(C)$ (Kreispunkt) und die rechteckige $\mathfrak{F}(B) = 5\delta \times \delta$ (Rechteckpunkt) sind.

Wird an diese Punkte das Lineal angelegt um sie mit A zu verbinden, so liegen Abweichungen von den Grenzen der $\mathfrak{F}(C)$ und $\mathfrak{F}(C)$ bis zu δ im Bereich der Möglichkeit. Alle in Betracht kommenden idealen Eckpunkte erfüllen neue, grössere Fehlerflächen f'_3, f'_2, die von den Kurven u_3, u_2 begrenzt sind. Da aber die Grenzen von $\mathfrak{F}(CB)$ durch jene von $\mathfrak{F}(g)$ (Breite δ) bestimmt sind, so sind nur die innerhalb $\mathfrak{F}(g)$ fallenden Teile von u_2, u_3 zu berücksichtigen, so dass

$$f'_2 = 7\,\delta^2,\ f_3 = 2{,}94345\,\delta^2;$$

demnach

$$\mathfrak{G} = 0{,}04853 \frac{abc}{\mathfrak{f}'_1} = \frac{k}{\mathfrak{f}'_1}, \quad k = 0{,}04853\, abc,$$

also *direct* proportional den Seiten, *indirect* proportional der $\mathfrak{F}$ der durch Construction ermittelten dritten Ecke A.

Nun ist die Genauigkeit des Kreispunktes C mehr als doppelt so gross als jene des Rechteckpunktes B, daher nicht gleichgiltig, ob ein Winkel oder ob der grössere oder kleinere von zwei gegebenen Winkeln oder ob die grössere oder kleinere von zwei gegebenen Seiten in B oder C angelegt wird.

Die Feststellung des Einflusses der Hilfsgrössen und die jenes Constructionsvorganges, der die Erzielung grösster Genauigkeit verbürgt, sowie der Vergleich der Constructionsarten bezüglich ihrer Genauigkeit war der Zweck der Untersuchung.

A. *Schiefwinkliges Dreieck.*

Gegeben

1. *Zwei Seiten $a > b$ und der von ihnen eingeschlossenen Winkel* γ. Es wird nach *IXa* γ im Kreispunkt C an g angelegt und hierauf $CA = b$ gemacht, wofür

$$\mathfrak{G} = \frac{k}{\pi + 17 + 14 \frac{b}{r} \mathfrak{C}},$$

$$\mathfrak{C} = 2 + 5 \tan \frac{\gamma}{2} + 2 \sec \frac{\gamma}{2}.$$

Je kleiner $\frac{b}{r}$ desto grösser $\mathfrak{G}$. *Es ist daher $r +$ und um so grösser, je grösser b ist anzunehmen.*

Bei constantem a und b ist $\mathfrak{G}$ um so grösser, je kleiner b und γ sind.

$$\mathfrak{G}_{max} = \frac{k}{17 + \pi}, \quad r + \infty$$

$$\mathfrak{G}_{min} = \frac{k}{14} \frac{1}{1{,}438685 + \mathfrak{C}}, \quad r = b.$$

Bei constantem a und b ist $\mathfrak{G}$ bei $\gamma = 0$ ein Maximum.

Je kleiner γ, desto genauer das Resultat.

Es ergiebt sich ferner, dass

1. bei $r = \infty$ es gleichgiltig ist, ob man CB gleich der grösseren oder kleineren Seite macht;

2. bei $r = b$ desgleichen;

3. bei endlichem $r > b$, $CB = a$ und $CA = b < a$ gemacht werden soll.

Man beginne daher mit der grösseren Seite.

Wären sämtliche Seiten $a > b > c$ und Winkel gegeben, so wären jene zwei Seiten a, b zur Construction heranzuziehen, die den kleinsten Winkel γ einschliessen und mit der grösseren von beiden (a) hätte man zu beginnen.

Die *Fehlerwinkel* der Seiten sind

$$\varphi_b = 2\left(5 + 5\tan\frac{\beta}{2} + 2\sec\frac{\beta}{2}\right)\frac{\delta}{r},$$

$$\varphi_c = \left[7\sin\alpha + \left(7 + 10\tan\frac{\gamma}{2} + 4\sec\frac{\gamma}{2}\right)\cos\alpha \right.$$
$$\left. + 2 + 5\sin\beta + \cos\beta\right]\frac{\delta}{c},$$

somit die Maximal fehler der Winkel α, β, γ:

$$\mp(\varphi_b + \varphi_c),\ \pm\varphi_c,\ \pm\varphi_b.$$

2. *Eine Seite a und die anliegenden Winkel* β, γ.

In den Endpunkten C, B werden nach IXa mittels r, r, die Winkel γ, β angelegt, wofür

$$\mathfrak{G} = \frac{k\sin\alpha}{\left(\mathfrak{B}_1 + 2\frac{c}{r_1}\mathfrak{B}_2\right)\left(3 + 2\frac{b}{r}\mathfrak{C}\right)}.$$

Es ist $r +$ und $r_1 +$ anzunehmen und zwar um so grösser, je grösser b bezw. c ist.

$$\mathfrak{G}_{max} = \frac{k}{3}\frac{\sin\alpha}{\mathfrak{B}_1},$$

$$\mathfrak{G}_{min} = k\frac{\sin\alpha}{\mathfrak{B}_0\,\mathfrak{C}_0},$$

$$\mathfrak{B}_0 = 5 \sin\beta - \cos\beta + 4 \sec\frac{\beta}{2},$$

$$\mathfrak{C}_0 = 7 + 10 \tan\frac{\gamma}{2} + 4 \sec\frac{\gamma}{2}.$$

	180° 0°	170° 10°	160° 20°	150° 30°	140° 40°	130° 50°
$\mathfrak{B}_0$	3	3,8932	4,8321	5,7751	6,7046	7,6009
$\mathfrak{C}^0$	11	13,7146	14,5032	15,3552	16,2968	17,3507

	120° 60°	110° 70°	100° 80°	90°
$\mathfrak{B}_0$	8,4489	9,2395	9,9720	10,6568
$\mathfrak{C}_0$	18,5470	19,9263	21,5152	23,4852

a) Bei $\beta > \gamma$ ist der *kleinere* oder der *grössere* Winkel im *Kreispunkt* C anzulegen, jenachdem bei

$$r = \infty, \quad r_1 = \infty$$

$$5 \sin\beta + \cos\beta \gtreqless 5 \sin\gamma + \cos\gamma$$

$$\beta + \gamma \gtrless 157^{0}22,'8.$$

Bei $\alpha > \beta > \gamma$ ist $\beta + \gamma > 157^{0}22,'8$ daher β zu wählen.

b) Bei $r = b\varrho$, $r_1 = c\varrho$ ist der *kleinere* Winkel γ im *Kreispunkt* C anzulegen, wenn

$$\varrho \leqq \frac{5}{2} - \sqrt{2} \doteq 1,985786.$$

Wären sämtliche Stücke gegeben und $a \geqq b \geqq c$, so kommen nur die beiden grösseren Seiten in Betracht. Bei nachfolgenden Werten

$\gamma =$	1^0	2^0	4^0	6^0	8^0	9^0
$\alpha \geqq$	$178^0 14,'_2$	$176^0 34,'_5$	$171^0 49,'_4$	$164^0 12,'_0$	$147^0 42,'_8$	$125^0 43,'_5$
$\beta \leqq$	$0^0 35,'_8$	$1^0 25,'_5$	$4^0 10,'_6$	$9^0 48,'_0$	$24^0 17,'_2$	$45^0 16,'_5$

$\gamma =$	$9^0 10'$	$9^0 20'$	$9^0 27'$
$\alpha \geqq$	$118^0 28,'_8$	$107^0 38,'_4$	$85^0 16,'_5$
$\beta \leqq$	$52^0 31,'_2$	$63^0 1,'_6$	$85^0 16,'_5$

ist a zu wählen.

$$\varphi_b = \left(2 + 10 \sin \beta - 4 \sec \frac{\beta}{2}\right) \frac{\delta}{b}.$$

$$\varphi_c = \left(10 + 4 \sec \frac{\gamma}{2} + 10 \tan \frac{\gamma}{2}\right) \frac{\delta}{c},$$

somit die *Maximalfehler* der Winkel α, β, γ bezw.

$$\pm (\varphi_b + \varphi_c), \ \pm \varphi_c, \ \pm \varphi_b.$$

3. *Die drei Seiten* $a \geqq b \geqq c$.

$$\alpha \geqq 60, \ \beta \leqq 90^0, \ \gamma \leqq 90^0; \ C(b) \times B(c) = A.$$

$$\mathfrak{G} = k \frac{\sin \alpha}{\pi \sin \alpha + \varphi(\beta)};$$

$$\varphi(\beta) = 38 + 7 \sin \beta + 35 \cos \beta.$$

Bei constantem a und α ist $\mathfrak{G}$ um so grösser, je kleiner $\varphi(\beta)$, folglich $\beta = 90^0$ der *günstigste* Winkel und $c:b = \cos \alpha$ das günstigste Seitenverhältnis. Ist die Reihenfolge „abc" so zu verstehen, dass die erste Seite (a) auf g abgetragen und die an zweiter Stelle stehende im Kreispunkt angeschlossen wird, so sind für nachstehende, *allein* in Betracht kommende Reihenfolgen die Bedingungen, wenn

$$\frac{b}{a} = m, \ \frac{c}{a} = n, \ \left(m + \frac{12}{13} n\right) \ (m + n) = u,$$

$$2 \arctan \frac{1}{5} \sim 22^0 37,'2 = \omega$$

gesetzt wird:

Reihenfolge	Bedingungen
$a\ b\ c$	$u > 1$ oder $\beta + \gamma > \omega$, $\sin\alpha\,\varphi(\alpha) > \sin\beta\,\varphi(\beta)$
$a\ c\ b$	$u < 1$ „ $\beta + \gamma < \omega$, $\sin\alpha\,\varphi(\alpha) > \sin\beta\,\varphi(\beta)$
$b\ a\ c$	$u > 1$ „ $\beta + \gamma > \omega$, $\sin\alpha\,\varphi(\alpha) < \sin\beta\,\varphi(\beta)$
	$u < 1$ „ $\beta + \gamma < \omega$, $\sin\alpha\,\varphi(\alpha) < \sin\beta\,\varphi(\beta)$

Die Bedingung

$$u < 1 \text{ oder} \left(\frac{b}{a} + \frac{12}{13}\frac{c}{a}\right)\frac{b+c}{a} < 1$$

kann ersetzt werden durch

$$1 < \frac{c}{a-b} < \frac{13}{11};$$

ferner

$$\sin\alpha\,\varphi(\alpha) \gtreqless \sin\beta\,\varphi(\beta)$$

durch

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \lesseqgtr \frac{19}{91}\sqrt{26}\,\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(\varepsilon-\gamma)},$$

$$\alpha > \beta,\ \varepsilon \doteq \operatorname{arctg} 5 \doteq 78^\circ 41{,}'4.$$

$$\varphi_a = \frac{6 + 5\cos^2\beta + \sin\beta + 3\sin\alpha + 7\cos\alpha}{b\sin\alpha}\,\delta,$$

$$\varphi_c = \left(7 + 2\sin\alpha + 6\cos\alpha + \sin\gamma + 5\cos(\alpha-\beta)\right)\frac{\delta}{c\sin\alpha}.$$

Maximalfehler von α, β, γ:

$$\mp(\varphi_b + \varphi_c)\ \pm\varphi_c,\ \pm\varphi_b.$$

4. *Zwei Seiten a, c und ein Gegenwinkel γ.*

$$c \geqq a\sin c,\ \text{wenn}\ a > c.$$

Gemäss *IXa* wird γ im Kreispunkt C angelegt und CB gleich der kleineren Seite gemacht.

$$B(c) \times \text{Schenkel} = A.$$

$$\mathfrak{S} = \frac{k \sin \alpha}{\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}},$$

$$\mathfrak{B} = 6 + 5 \mid \cos \beta \mid + \sin \beta,$$

$$\mathfrak{C} = 3 + 2 \frac{b}{r}\left(2 + 5 \tan \frac{\gamma}{2} + 2 \sec \frac{\gamma}{2}\right).$$

Legt man γ im Rechteckpunkt B an, so erhält man $\mathfrak{S}' < \mathfrak{S}$.

Der Winkel γ ist demnach im Kreispunkt C anzulegen.

$$\mathfrak{S}_{max} = \frac{k}{3} \frac{\sin \alpha}{\mathfrak{B}},$$

am kleinsten für

$$\beta = 2 \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{5} = 22^{0}27',5.$$

$$\mathfrak{S}_{min} = \frac{k \sin \alpha}{\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}'}, \quad \mathfrak{C}' = 7 + 10 \tan \frac{\gamma}{2} + 4 \sec \frac{\gamma}{2}.$$

$$(a > b > c).$$

Sind alle Stücke gegeben, so ist mit b oder c beginnen jenachdem

$$\sin \beta\, \psi(\alpha) \gtrless \sin \psi(\gamma) \quad \psi(\beta) = \mathfrak{B}.$$

Im ersteren Falle sind a, b, α, im letzteren b, c, β die Constructionselemente. Die Verwendung des kleinsten Winkels γ liefert somit das mindest genaue Resultat.

B. *Rechtwinkeliges Dreieck.*

Da beim Anlegen eines *rechten* Winkels nicht nach *IXa*, sondern nach I_8 vorgegangen wird, so ergeben sich in jedem Falle grössere $\mathfrak{S}$.

Gegeben:

1. *Die Katheten a, b.*

Das genauere Resultat ergiebt sich durch Errichten der Senkrechten im Kreispunkt C (Hilfswinkel ε),

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{7} \frac{k}{3 + \frac{b}{r} \frac{3 + \sin \varepsilon - \cos \varepsilon + 3 \sin 2\varepsilon}{\cos \varepsilon}}.$$

Es ist die grössere der Katheten auf g abzutragen.

$$\mathfrak{G}_{max} = \frac{k}{21}, \quad r = \infty, \quad \varepsilon < 90^0.$$

Für $r = \frac{b}{2} \operatorname{cosec} \varepsilon$, $\tan \varepsilon = \frac{b}{a}$, wo dann der Hilfkreis durch die Ecken A, B, C geht, ist

$$\mathfrak{G}' = \frac{k}{7} \frac{k}{12 a^2 b^2 - 2 abc + 2 b^2 c + 6 bc^2 + 3 ac^2}.$$

$$\varphi_b = (3 + \sin \varepsilon + 5 \cos \varepsilon + 3 \sin 2\varepsilon) \sec \varepsilon \frac{\partial}{r}.$$

$$\varphi_c = \left[4 + 6 \sin \alpha + 8 \cos \alpha + \frac{b}{r} (3 + \sin \varepsilon + \cos \varepsilon + 3 \sin 2 \varepsilon)\right] \frac{\delta}{c}.$$

2. *Hypotenuse c und eine Kathete a.*

a) Die Senkrechte p im Kreispunkt C errichtet (II_3).

$$\mathrm{B}(c) \times p = A.$$

$$\mathfrak{G}_a = \frac{k \sin \beta \sin 2 \varepsilon}{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}},$$

$$\mathfrak{A} = 3 \sin 2 \varepsilon + \frac{b}{r} (\sin \varepsilon - \cos \varepsilon + 3 \sin 2 \varepsilon + 3),$$

$$\mathfrak{B} = 4 + \sin \beta + 5 \cos \beta.$$

$$\mathfrak{G}_{max} = \frac{k}{3} \frac{\sin \beta}{4 + \sin \beta + 5 \cos \beta}, \quad r = \infty, \quad \varepsilon < 90^0.$$

Das Dreieck lässt sich um so genauer darsteleu, je grösser $c : a$ ist.

$$\mathfrak{G}^a_{min} = \frac{k}{2} \frac{\sin 2 \varepsilon}{(3 + 2 \cos \varepsilon + \sin \varepsilon + 3 \sin 2 \varepsilon)(4 + \sin \varepsilon + 5 \cos \varepsilon)},$$

$$\frac{b}{r} = 2 \sin \varepsilon, \quad \tan \varepsilon = \frac{b}{a}, \quad \varepsilon = \beta.$$

$$\varphi_b = \frac{3 + \sin \varepsilon + 5 \cos \varepsilon + 3 \sin 2 \varepsilon}{\cos \varepsilon} \frac{r}{\delta};$$

$$\varphi_c = \left(4 + 4 \sin \alpha + \frac{8 + 2 \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{b}{r} \frac{3 + \sin \varepsilon - \cos \varepsilon + 3 \sin 2\varepsilon}{\cos \varepsilon \cos \alpha}\right) \frac{\delta}{c};$$

$$\varphi_{c\,max} = 2\left(2 + 2\sin\alpha + \frac{4+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\frac{\delta}{c}.$$

Die Hypotenuse ergiebt sich demzufolge und in Übereinstimmung mit Obigem um so genauer, je kleiner α oder $a:c$.

b) *Die Senkrechte im Rechteckpunkt B errichtet.*

$$\mathfrak{S}_b = \frac{k}{7}\,\frac{\sin\beta\sin 2\varepsilon}{7\sin 2\varepsilon + \frac{b}{r}(2 + 3\sin\varepsilon + 2\sin 2\varepsilon)}.$$

$$\mathfrak{S}^b_{max} = \frac{k}{49}\sin\beta,\ r = \infty,\ \varepsilon < 90^0.$$

$$\mathfrak{S}^b_{min} = \frac{k}{14}\,\frac{\sin 2\varepsilon}{2 + 3\sin\varepsilon + 7\cos\varepsilon + \sin 2\varepsilon}$$

$$= \frac{k}{7}\,\frac{ab}{2c^2 + 2ab + 7ac + 3bc}.$$

$$\frac{b}{r} = 2\sin\varepsilon,\quad \tan\varepsilon = \frac{b}{a},\quad \varepsilon = \beta,$$

oder $$\sin\varepsilon = \sin\beta = \frac{b}{c},\ \cos\varepsilon = \cos\beta = \frac{a}{c}.$$

Der *Vergleich* ergiebt für $r = \infty$, $\varepsilon < 90^0$

$$\mathfrak{S}^a_{max} > \mathfrak{S}^b_{max};$$

für $$b:r = 2\sin\varepsilon,\quad \tan\varepsilon = b:a,\ \varepsilon = \beta$$

$$\mathfrak{S}^a_{min} > \mathfrak{S}^b_{min}$$

und im allgemeinen Fall

$$\mathfrak{S}^a > \mathfrak{S}^b$$

wenn

$$(\triangleq)\ldots\ldots(49 - 3\mathfrak{V})\frac{h}{b}\cos\varepsilon + (21 - \mathfrak{V})\sin\varepsilon > (3\mathfrak{V} - 14)(1 + \sin 2\varepsilon)$$

$$h = 2r\sin\varepsilon,$$

(d. i. die Länge der mittels $C(r)$, bezw. $B(r)$ gefundenen Senkrechten), was für $h \geqq b$ zutrifft.

$\mathfrak{S}^a - \mathfrak{S}^b$ wächst bei $\varepsilon = \beta$ mit $h:b$. Bei $h:b = 1$ ist $(\triangleq)$ erüllt, wenn $\varepsilon < 68^0$, also für Winkel, welche bei I_3 vor allen Andern

in Betracht kommen. Ist $h > b$, so erweitert sich dieses Winkel-Gebiet; überhaupt kann bei $\varepsilon < 90^0$ $h:b$ so bestimmt werden, dass (≏) für jedes β und ε erfüllt ist. Bei $h = 2b$ ist die obere Grenze dieses Gebietes bereits nahe bei 90^0 nämlich 85^0. Je genauer die Senkrechte verzeichnet wird, desto grösser die Überlegenheit der Constructionsweise a); daher gilt:

Die Senkrechte ist im Kreispunkt zu errichten.

3. *Hypotenuse c und ein spitzer Winkel α.*

a) *α im Kreispunkt A an g gelegt.* Auf dem zweiten Schenkel $AB = c$ gemacht, $BC \perp g$, $BC \perp g'$.

$$\mathfrak{G} = \frac{k}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$$

$$\mathfrak{G}_{max} = \frac{1}{3}\frac{k}{\mathfrak{B}'}, \quad r = \infty, \quad \mathfrak{B}' = 2 + 3\sin\alpha + 5\cos\alpha;$$

$$\mathfrak{G}_{min} = \frac{k}{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}''}, \quad r = c, \quad \mathfrak{A}' = 7 + 4\sec\frac{\alpha}{2} + 10\tan\frac{\alpha}{2},$$

$$\mathfrak{B}'' = 6 + 13\sin\alpha + \cos\alpha + 8\sin\frac{\alpha}{2}.$$

$$\varphi_c = 2\left(5 + 5\tan\frac{\beta}{2} + \sec\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\delta}{r},$$

$$\varphi_a = 2\frac{\mathfrak{B}}{a}\delta.$$

b) Auf g $AB = c$ gemacht, um die Mitte O von c $O\left(\frac{c}{2}\right)$ beschrieben und in A α an g gelegt, dessen zweiter Schenkel AC $O\left(\frac{c}{2}\right)$ in der dritten Ecke c schneidet.

$$\mathfrak{G} = \frac{k}{2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}, \quad \mathfrak{A} = \left[3 + 2\frac{b}{r}\left(2 + 2\sec\frac{\alpha}{2} + 5\tan\frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

$$\mathfrak{B} = 1 + 2\sin\alpha + 2\cos\alpha + 4\sec\alpha.$$

$$\mathfrak{G}_{max} = \frac{k}{6}\frac{1}{\mathfrak{B}}, \quad r = \infty.$$

$$\mathfrak{G}_{min} = \frac{k}{2}\frac{1}{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'}, \quad r = b, \quad \mathfrak{A}' = 7 + 4\sec\frac{\alpha}{2} + 10\tan\frac{\alpha}{2}.$$

$$\varphi_a = \left\{ \left[3 + 2\frac{b}{r}\left(2 + 2\sec\frac{\alpha}{2} + 5\tan\frac{\alpha}{2}\right)\right]\tan\alpha \right.$$
$$\left. + 4 + 5\sin\alpha + 9\cos\alpha + 8\sec\alpha \right\}.$$

$$\varphi_b = 2\left(5 + 5\tan\frac{\alpha}{2} + 2\sec\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\partial}{r}.$$

Der Vergleich ergiebt

$$\mathfrak{G}^a_{max} > \mathfrak{G}^b_{max},\ r = \infty,$$
$$\mathfrak{G}^a_{min} > \mathfrak{G}^b_{min}.$$

Hiezu muss jedoch bemerkt werden, dass bei a) $r = c$, bei b) aber $r = b < c$ genommen wird. Setzt man aber in b) $r = c$, so findet sich $\mathfrak{G}^a < \mathfrak{G}^b$, der Unterschied $\mathfrak{G}^b - \mathfrak{G}^a$ jedoch gering. Bestimmt man jenes $c:r$, für das $\mathfrak{G}^a = \mathfrak{G}^b$ wird, so ergiebt sich, dass $c:r$ um so kleiner ist, je kleiner α. z. B. ist $r = 4c$ bei $\alpha = 45^0$, $r = 3c$ bei $\alpha = 60^0$. Daher gilt:

Wenn bei beiden Lösungen beim Anlegen von α dasselbe r gewählt wird, so kann r immer so bestimmt werden, dass die Lösung a) *genauer als* b) *ausfällt. Kann dieser Radius beschränkten Raumes wegen nicht verwendet werden, so ist die Lösung* b) *zu wählen.*

Können jedoch nur die minimalen Radien $r = c$ bei a) *und $r = b$ bei* b) *benützt werden, so ist die Lösung* a) *vorzuziehen.*

4. *Eine Kathete b und der anliegende spitze Winkel α.*

a) *α im Kreispunkt A an g gelegt,* (Radius r) $AC = b$ gemacht und in C $BC \perp AC$ errichtet (Radius r_1).

$$\mathfrak{G} = \frac{k\cos\alpha}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}},\ \mathfrak{A} = 7 + \frac{a}{r_1}\frac{2 + 3\sin\varepsilon + 2\sin 2\varepsilon}{\sin 2\varepsilon},$$

$$\mathfrak{C} = 3 + 4\frac{c}{r}\frac{\cos\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\left(2\cos\frac{\alpha}{4} + 5\sin\frac{\alpha}{4}\right),$$

$$\mathfrak{G}_{max} = \frac{k\cos\alpha}{21},\ r = r_1 = \infty,$$

$$\mathfrak{G}_{\min} = \frac{k \cos \alpha}{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{E}}, \quad r = c, \quad 2 r_1 \sin \varepsilon = a,$$

$$\mathfrak{A}_1 = 7 + 4 \sec \frac{\alpha}{2} + 10 \tan \frac{\alpha}{2},$$

$$\mathfrak{E} = 7 + 2 \sin \varepsilon + \frac{2 + 3 \sin \varepsilon}{\cos \varepsilon}.$$

Sollen die Hilfsconstructionen nicht mehr Raum in Anspruch nehmen als das Dreieck selbst, so wird der Hilfskreis wie in 3 dem Dreieck umschrieben, wofür $\varepsilon = \alpha$ und

$$\mathfrak{G}'_{\min} = \frac{k \cos^2 \alpha}{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2},$$

$$\mathfrak{M}_1 = 2 + 3 \sin \alpha + 7 \cos \alpha + 2 \sin 2\alpha,$$

$$\mathfrak{M}_2 = 7 + 4 \sec \frac{\alpha}{2} + 10 \tan \frac{\alpha}{2}.$$

(Radius r).

b) *α im Rechteckpunkt A von b an g gelegt,* die Senkrechte im Kreispunkt C errichtet (I_3); (Radius r_1).

$$\mathfrak{G} = \frac{k \cos \alpha}{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{E}},$$

$$\mathfrak{B} = 2 + 5 \sin \alpha + \cos \alpha + \frac{c}{r} \left(4 \sec \frac{\alpha}{2} - 2 - 2 \cos \alpha\right),$$

$$\mathfrak{E} = 3 + \frac{3 + \sin \varepsilon - 3 \cos \varepsilon + 3 \sin 2\varepsilon}{\sin 2 \varepsilon} \frac{a}{r_1};$$

$$\mathfrak{G}_{\max} = \frac{k}{3} \frac{\cos \alpha}{2 + 5 \sin \alpha + \cos \alpha},$$

$$\mathfrak{G}_{\min} = \frac{k \cos^2 \alpha}{\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2},$$

$$\mathfrak{N}_1 = 3 + \sin \alpha + 3 \sin 2 \alpha,$$

$$\mathfrak{N}_2 = 5 \sin \alpha - \cos \alpha + 4 \sec \frac{\alpha}{2},$$

$$r = c, \quad 2 r_1 \sin \varepsilon \equiv a, \quad \varepsilon = \alpha.$$

$$\varphi_c = 2\left(1 + 5 \sin\alpha + 2 \sec\right)\frac{\partial}{r},$$

$$\varphi_a = (3 + \sin\varepsilon + 3\cos\varepsilon + 3\sin 2\varepsilon)\,\mathrm{cosec}\, 2\varepsilon \,.\, \frac{\partial}{r_1}.$$

Der Vergleich ergiebt, dass in jedem Falle die zweite Lösung (b) *das genauere Ergebnis liefert. Demnach ist die Senkrechte im Kreispunkte und der Winkel im Rechteckpunkt der Kathete b anzutragen.*

5. *Eine Kathete a und der Gegenwinkel α.*

a) Auf g von Kreispunkt C aus $CB = a$ abgetragen, in C an g $90^0 - \alpha$ nach IXd angelegt (Radius r) und im Rechteckpunkt B die Senkrechte nach I_8 errichtet (Radius r_1), die den verzeichneten Schenkel in der dritten Ecke A schneidet.

$$\mathfrak{G} = \frac{k \sin\alpha}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}},$$

$$\mathfrak{A} = 3 + \frac{b}{r}\sec\alpha\left(3 + \sin 2\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + 2\sin\frac{3}{2}\alpha + \frac{5}{2}\sin\alpha - 4\cos\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$\mathfrak{C} = 7 + \frac{c}{r_1}\,\mathrm{cosec}\; 2\varepsilon\,(2 + 3\sin\varepsilon + 2\sin 2\varepsilon).$$

Für $r = r_1 = \infty$:

$${}_1\mathfrak{G}^a_{\max} = \frac{k \sin\alpha}{21},\ \varepsilon < 90^0,\ 2r_1 \sin\varepsilon = h = \infty;$$

$${}_2\mathfrak{G}^a_{\max} = \frac{k\sin\alpha}{3(7 + 2n)},\ n = \frac{c}{h},\ \varepsilon = 0,\ h \text{ endlich}.$$

$$\mathfrak{G}^a_{\min} = \frac{2k\sin^2\alpha\cos\alpha}{\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{C}_1},$$

$$\mathfrak{A}_1 = 6 + 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 4\sin\frac{3\alpha}{2} + 5\sin\alpha - 2\cos\alpha + 4\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\mathfrak{C}_1 = 2 + 3\cos\alpha + 7\sin\alpha + 2\sin 2\alpha,$$

für

$$r = b, \quad 2\, r_1 \sin \varepsilon = c, \quad \varepsilon = 90^0 - \alpha,$$

wofür der Hilfskreis das Dreieck umschreibt.

$$\varphi_b = \frac{3 + P \sec \alpha}{r} \delta,$$

$$\varphi_e = \frac{2 + 3 \sin \varepsilon + 14 \cos \varepsilon + 2 \sin 2 \varepsilon}{\sin 2 \varepsilon} \frac{\partial}{r_1}.$$

$$P = 3 + \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \cos 2\alpha + 2 \sin \frac{3}{2} \alpha + \frac{5}{2} \sin \alpha - \cos \alpha$$
$$+ 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

b) *α im Rechteckpunkt C angelegt,* Radius r und die Senkrechte im Kreispunkt errichtet (Radius r_1).

$$\mathfrak{G} = \frac{k \sin \alpha}{\mathfrak{D} . \mathfrak{F}},$$

$$\mathfrak{D} = 2 + \cos \alpha + 5 \sin \alpha + 2 \frac{b}{r} \sec \alpha \left(3 + \cos 2\alpha + \sin \frac{3\alpha}{2} \right.$$
$$\left. + \sin \alpha - 2 \cos \alpha + \sin \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$\mathfrak{F} = 3 + \frac{c}{r_1} \frac{3 + \sin \varepsilon - \cos \varepsilon + 3 \sin 2 \varepsilon}{\sin 2 \varepsilon}.$$

$${}_1\mathfrak{G}^b_{max} = \frac{1}{3} \frac{k \sin \alpha}{2 + 5 \sin \alpha + \cos \alpha},$$

$$r = r_1 = \infty, \quad h = 2 r_1 \sin \varepsilon = \infty, \quad \varepsilon < 90^0;$$

$${}_2\mathfrak{G}^b_{max} = \frac{k \sin \alpha}{(3 + 2n)(2 + 5 \sin \alpha + \cos \alpha)},$$

$$r = r_1 = \infty, \quad h \text{ endlich}, \quad \varepsilon = 0.$$

$$\mathfrak{G}_{min} = \frac{2 k \sin^2 \alpha \cos \alpha}{\mathfrak{D}_1 . \mathfrak{E}_1},$$

$$\mathfrak{D}_1 = 13 + 5 \sin 2\alpha + 5 \cos 2\alpha + 4 \sin a - 4 \cos \alpha +$$

$$+ 4 \sin 3\frac{\alpha}{2} + 4 \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$\mathfrak{F}_1 = 3 + 2 \sin \alpha + \cos \alpha + 3 \sin 2\alpha,$$

für

$$r = b, \quad 2 r_1 \sin \varepsilon = c, \quad \varepsilon = 90^0 - \alpha,$$

was einem minimalen, das Dreieck umschreibenden Hilfskreis entspricht.

$$\varphi_b = 2\left(3 \sin \alpha + 5 \cos \alpha + \tan \alpha + 4 \sec \alpha + 4 \tan \alpha \,.\, \cos \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\delta}{r},$$

$$\varphi_c = (3 + \sin \varepsilon + 5 \cos \varepsilon + 3 \sin 2\varepsilon) \operatorname{cosec} 2\alpha \,.\, \frac{\delta}{r_1}.$$

Der *Vergleich* ergiebt Folgendes:

a) $r = r_1 = \infty, \quad h = 2 r_1 \sin \varepsilon = \infty, \quad \varepsilon < 90^0,$

$$_1\mathfrak{S}^a_{max} \lesseqqgtr {}_1\mathfrak{S}^b_{max}, \quad \alpha \lesseqqgtr 67^0 22',8$$

und

$$_1\mathfrak{S}^a_{max} = {}_1\mathfrak{S}^b_{max} \text{ bei } \alpha = 90^0.$$

b) $r = r_1 = \infty$, h endlich, $\varepsilon = 0, \quad \frac{c}{h} = n, \quad n \leqq 1,$

$$_2\mathfrak{S}^a_{max} > {}_2\mathfrak{S}^b_{max},$$

wenn

$$2n > \frac{15 - 3q}{q - 1}, \quad q = \cos \alpha + 5 \sin \alpha,$$

was für *jedes* n erfüllt ist, wenn $\alpha > 67^0 12',8$.

Bei minimalem h ($= c$ oder $n = 1$) lautet die Bedingung $\alpha \geqq 30^0 30',6$.

Wächst h, so wird das Wertgebiet von α, in welchem die Lösung a) der b) überlegen ist immer kleiner.

c) $h = c, \quad 2\,r_1 \sin \varepsilon = a, \quad r = b, \quad \varepsilon = 90^0 - \alpha$;

es sind die kleinsten Hilfsgrössen.

$\alpha =$	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
$\mathfrak{A}\mathfrak{E} =$	12,5	26,198	47,830	78,008	103,912	139,221	187,057	267,681	469	∞
$\mathfrak{D}\mathfrak{F} =$	20,0	46,668	70,941	95,796	120,875	146,091	174,566	218,792	333	∞

$$\mathfrak{S}^a_{\min} \gtreqless \mathfrak{S}^b_{\min} \text{ jenachdem } \alpha \lesseqgtr 54^0 7'.$$

d) $h = 2\,r_1 \sin \varepsilon = a \tan \varepsilon, \quad \tan \varepsilon = \frac{1}{n} \operatorname{cotg} \alpha,$

wofür die Constructionsbreite ein $\min = a$.

$\mathfrak{S}_a \gtreqless \mathfrak{S}_b$, jenachdem bei

$$n = \frac{1}{2}, \quad \alpha \lesseqgtr 57^0, \quad \alpha > 0,$$

$$n = \frac{1}{3}, \quad \alpha \lesseqgtr 60^0, \quad \alpha > 0.$$

Je kleiner n, desto grösser das Überlegenheitsgebiet der Lösung a).

e) Bei $\varepsilon = 30^0$ ist $\mathfrak{S}_a \gtreqless \mathfrak{S}_b$ jenachdem $\alpha \lesseqgtr \alpha_0$.

$\alpha_0 =$	$52^0 11'$	$49^0 45'$	$48^0 3'$	$45^0 57'$	$43^0 28'$	$40^0 12'$	$32^0 11'$
$n =$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4

$$\mathfrak{S}_a < \mathfrak{S}_b \left| \begin{array}{l} \text{bei jedem } \alpha, \text{ wenn } 0{,}00217 < n < 0{,}4, \\ \alpha \gtrless 70^0, \ n = 0{,}00217, \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{S}_a \lesseqgtr \mathfrak{S}_b\,, \quad \text{jenachdem } \alpha \lesseqgtr \alpha_0$$

$\alpha_0 =$	$69^0 59'$	$69^0 56',_8$	$69^0 38'$	$69^0 27'$	$69^0 5'$	$68^0 54'$	$67^0 22',_8$
$n =$	0,00216	0,002	0,0018	0,0016	0,0012	0,001	0



IX.

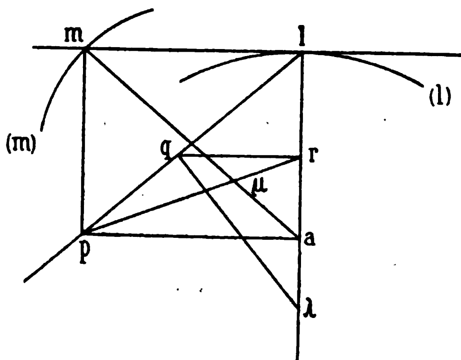
Sur la podaire de l'astéroïde.

Par **Miloslav Pelíšek**, professeur à Prague.

Présenté le 10 Mai 1907.

MANNHEIM a publié dans ses *Principes et Développements de Géométrie cinématique*, Paris 1894 p. 35, une construction remarquable des centres de courbure des podaires qu'il a déduite par ses élégantes méthodes de géométrie cinématique:

Fig. 1.



D'un point fixe p (Fig. 1.) on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes d'une courbe (l); on demande de construire le centre de courbure de la courbe (m), lieu des pieds m de ces perpendiculaires, courbe qu'on appelle podaire de (l).

Du centre de courbure λ de la courbe (l) on abaisse une perpendiculaire λq sur pl. Du pied q de cette perpendiculaire, on abaisse une perpendiculaire sur $l\lambda$, on obtient ainsi r: la droite pr rencontre la normale $m\,a$ de (m) au centre de courbure μ demandé.

On parvient aux résultats intéressants en applicant cette cons'ruction à la podaire de l'astéroïde, courbe engendrée par le mouvement hypocycloïdal.

Si deux points (Fig. 2.) x, y d'une droite sont assujettis à se déplacer sur deux axes rectangulaires pX, pY, la droite xy enve-

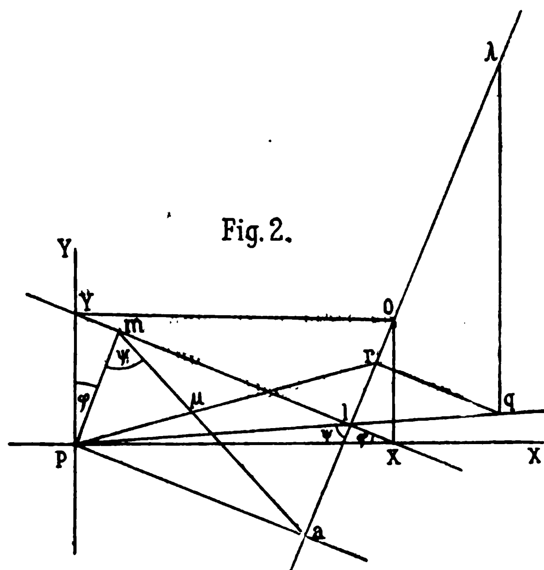


Fig. 2.

loppe, comme on sait, l'hypocycloïde à quatre branches qu'on a aussi appelée l'astéroïde.

Si l'on abaisse du centre instantané de rotation o une perpendiculaire ol à xy, on sait que le pied l est le point de l'astéroïde, dont xy est la tangente.

Le rayon de courbure $l\lambda$ en l s'obtient d'après Lamarle en faisant $o\lambda = 2lo$ ou $l\lambda = 3lo$. Si l'on abaisse du pôle p la perpendiculaire pm à la tangente xy, le pied m est un point de la podaire (m) de l'astéroïde, courbe qu'on a aussi appelée la rhodonée, un cas spécial de la scarabée.*)

*) Voir: Zahradník: Sur une transformation cubique birationale etc. Journal de Math. Prague 1905 p. 111.

Puisque l'angle rectangle pml se déplace de manière que le côté pm enveloppe le pôle p et l'autre côté la courbe (l), on a en ma la normale de la podaire, et l'on voit de la figure (2) que

$$pm = al = lo.$$

Si du point de courbure λ de l'astéroïde (l) on abaisse la perpendiculaire λq à la droite pl et du pied q la perpendiculaire qr à la normale $l\lambda$ de l'astéroïde, la droite pr rencontre la normale ma de la podaire au centre de courbure μ demandé.

Cependant le point d'intersection μ reste, d'après la construction que nous venons d'indiquer, indéterminé, si la normale de (m) passe par le pôle p, c'est-à-dire, si les normales de (l) et (m) s'identifient ce qui arrive pour les sommets de la podaire en question, et la construction ne peut s'appliquer justement en cas où elle est de l'utilité principale pour les tracés.

Pour trouver ces positions limites de μ, désignons par φ l'angle de la droite xy et de l'axe pX, et par ψ l'angle de la normale ma et de la perpendiculaire mp; alors on trouve facilement de la figure (2)

$$px = xy \cos\varphi, \quad py = xy \sin\varphi,$$

$$my = lx = xy \sin^2\varphi, \quad pm = xy \sin\varphi\cos\varphi,$$

$$ml = xy(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi), \qquad am = xy\sqrt{\sin^4\varphi + \cos^4\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi}$$

$$\cos\psi = \frac{pm}{am} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\sin^4\varphi + \cos^4\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi}}$$

ou

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{cotg}^2\varphi - 1}},$$

de laquelle résultent les valeurs correspondantes aux sommets de la podaire:

1. $\varphi = 0$; $\psi = 90$, 2. $\varphi = 45^0$; $\psi = 0$, 3 $\varphi = 90^0$; $\psi = 90^0$.

On trouve aussi de la figure (2.):

Des triangles $alp \sim ql\lambda$:

$$\frac{lq}{la} = \frac{l\lambda}{lp} \quad \text{ou} \quad lp \cdot lq = la \cdot l\lambda = 3\overline{la}^2,$$

enfin:

$$lq = \frac{3\overline{la}^2}{lp}.$$

Des triangles $lpa \sim lrq$:

$$\frac{lr}{la} = \frac{lq}{lp} = \frac{3\overline{la}^2}{\overline{lp}^2},$$

d'où:

$$lr = \frac{3\overline{la}^3}{\overline{lp}^2}$$

et ensuite:

$$ar = al + lr = \frac{al\,(\overline{lp}^2 + 3\overline{la}^2)}{\overline{lp}^2}.$$

Des triangles $pm\mu \sim a\mu r$:

$$\frac{m\mu}{\mu a} = \frac{al}{ar} = \frac{\overline{lp}^2}{\overline{lp}^2 + 3\overline{la}^2},$$

donc:

$$\frac{m\mu}{\mu a} = \frac{\overline{am}^2}{\overline{am}^2 + 3\overline{la}^2} \quad \text{et} \quad \frac{m\mu}{ma} = \frac{\overline{am}^2}{2\overline{am}^2 + 3\overline{la}^2}.$$

On a donc pour le rapport entre le rayon de courbure $m\mu$ et la longueur $m\,a$ sur la normale la relation:

$$\frac{m\mu}{ma} = \frac{1}{2 + 3\cos^2\psi}.$$

Si la droite $x\,y$ s'identifie avec l'axe $p\,X$, on a successivement

$$\varphi = 0,\ px = xy,\ py = 0,\ my = lx = pm = 0,$$

$$ml = ma = xy,\ \psi = 90^0,\ \frac{m\mu}{ma} = \frac{1}{2},$$

ou

$$m\mu = \frac{1}{2} xy$$

L'axe pX est donc un axe de la rhodonée, le sommet sur cet axe est le pôle p et le rayon de courbure est égal à la moitié de la longueur xy, c'est-à-dire à la moitié du rayon de la circonférence circonscrite à l'astéroïde.

On trouve le même résultat pour l'axe pY.

Si la droite xy est également inclinée aux axes pX et pY, on a successivement:

$$\varphi = 45, \quad px = py = xy \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$my = lx = pm = \frac{1}{2} xy, \quad ml = 0,$$

$$am = \frac{1}{2} xy, \quad \psi = 0, \quad \frac{m\mu}{ma} = \frac{1}{5} \text{ et}$$

$$m\mu = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} xy = \frac{1}{10} xy.$$

La bissectrice des axes pX et pY est donc aussi un axe de la rhodonée, le sommet sur cet axe a une distance de p égale à la moitié de xy (ou égale au rayon de courbure de la rhodonée sur les axes pX et pY), et le rayon de courbure en ce point est égal au dixième de la longueur xy ou égal au cinquième du rayon de courbure précédent.

La rhodonée a donc quatre demi-axes coïncidents avec les axes pX et pY et quatre demi-axes coïncidents avec les bissectrices de ces axes.

Faisons encore la remarque suivante:

L'angle rectangle $pa\lambda$ (Fig. 2.) se déplace de manière que son côté ap enveloppe le pôle p, et l'autre côté enveloppe la courbe (λ) lieu des centres de courbure de l'astéroïde donnée ou la développée de l'astéroïde. Or, nous savons, que cette courbe (λ) est encore une astéroïde, dont les axes pX', pY' sont les bissectrices de l'angle

XpY. Les deux astéroïdes (l) et (λ) sont concentriques et inscrites aux circonférences, dont les rayons sont xy et $2xy$, c'est-à-dire en rapport $1:2$. Alors il s'ensuit que le lieu (a) est aussi une rhodonée, et que les deux rhodonées (m) et (a) sont aussi inscrites aux circonférences concentriques, dont les rayons sont en rapport $1:2$, et que les axes de l'une sont les bissectrices de l'autre.

Si l'on continuait, on trouverait une infinité de rhodonées semblables, dont les deux consécutives sont en rapport de $1:2$.

Observons encore:

Chaque point de la droite xy décrit pendant le déplacement — comme on sait — une ellipse aux axes pX et pY, et dont la somme des demi-axes est égale à la longueur xy. Chacune de ces ellipses est tangente à l'astéroïde (l) qui est leur enveloppe; par exemple l'ellipse décrite par le point l est tangente à l'astéroïde en l.

On peut donc interpréter la figure (2.):

Si une ellipse se déforme de manière que les axes et la somme des demi-axes restent invariables, l'ellipse enveloppe une astéroïde (l), et les pieds des perpendiculaires abaissées du centre p sur les tangentes communes des ellipses et de l'astéroïde (l) engendrent la rhodonée (m).

Une autre remarque:

Il est bien connu que l'astéroïde (l) peut être engendrée comme une hypocycloïde à quatre branches; si l'on choisit la circonférence décrite du centre p avec le rayon xy comme base fixe et si l'on fait rouler sans glisser sur sa périphérie intérieure une circonférence, dont le rayon est égal au quatrième de xy, alors le point commun de ces deux circonférences et de l'axe X ou Y décrit l'astéroïde (l).

Il est de même connu que la rhodonée (m) peut être engendrée comme une hypocycloïde à quatre branches. En effet, décrivons (Fig. 2.) du point p comme centre une circonférence fixe, dont le rayon est égal au troisième de la longueur xy, et faisons rouler sans glisser sur la périphérie intérieure de cette circonférence fixe une autre circonférence, dont le rayon est égal au douzième de xy, alors le point p fixé à la circonférence mobile décrira la rhodonée (m), si, au commencent du mouvement, le centre de la circonférence mobile est sur l'axe X ou sur l'axe Y.

On voit donc que la figure 2., quoique bien simple, est susceptible d'une interprétation très-féconde, si l'on se rapporte aux différents résultats connus d'ailleurs.

Je croyais donc, en déterminant les centres de courbure de la rhodonée (m) par la construction de Mannheim, qu'il ne sera pas sans intérêt de faire mention d'autres résultats qui ont été développés sur les différentes pages de la Géométrie, pour faire mieux ressortir les significations intéressantes accumulées dans les tracés de cette figure.



X.

O studených a teplých anticyklonách.

Napsal Dr. Stanislav Hanzlík.

Předloženo v sezení dne 10. května 1907.

Zaznamenáme-li teplotu na Sonnblicku, kdykoliv tento přijde do oboru anticyklony, obdržíme číselná data, jež se liší od průměrné teploty této horské observatoře v uvažované době a to jak ve smyslu kladném tak i záporném, kteréžto záporné úchylky bývají někdy velmi značné. Máme tedy v Evropě anticyklony jež jsou „nahoře" jak teplé tak i studené.

Prof. Hann mi navrhl, abych na základě dat evropských horských observatoří a na základě dat z volné atmosféry studoval meteorologické poměry v těchto studených a teplých anticyklonách a tak abych se pokusil o výklad, proč ony stacionérní jsou nahoře teplé a proč ony anticyklony, jež rychle pomíjejí, jsou studené.

Ujal jsem se práce následujícím způsobem:

Volil jsem tyto horské observatoře:

Sonnblick .	3106 *m*	n. m.	47°	3′	s. š.	12°	57′	v. d. Gr.	Rok:	1887—1905	incl.
Pic du Midi	2859 „	„	42	50	„	0	8	„		1887—1905	„
Säntis . . .	2500 „	„	47	15	„	9	20	„		1887—1905	„
Obir	2147 „	„	46	30	„	14	29	„		1887—1905	„
Bělašnica .	2067 „	„	43	42	„	18	15	„		1895—1903	„
Mt. Ventoux	1900 „	„	44	10	„	5	17	„		1889—1905	„
Sněžka . .	1603 „	„	50	44	„	15	44	„		1887—1905	„
Belchen . .	1394 „	„	47	53	„	7	6	„		1890—1905	„
Ben Nevis .	1343 „	„	56	48	„	5	0	z. d. Gr.		1887—1897	„
Brocken . .	1143 „	„	51	48	„	10	37	v. d. Gr.		1896—1904	„

Data z těchto horských observatoří, jež tvoří podstatnou část celé práce, byla doplněna pro značnější výšky daty získanými výstupy balonů, dračích balonů, draků a ballons sondes, jež byla vyňata z:

1. Wissenschaftliche Luftfahrten (3 svazky), R. Assmann, A. Berson, H. Gross, Braunschweig. 1899.

2. Travaux de la station Franco-Scandinave de sondages aériens à Hald 1902—1903. Viborg, 1904. Backhauzen.

3. R. Assmann, A. Berson: Ergebnisse der Arbeiten am Aeronautischen Observatorium in Jahren 1900—1901, 1901—1902, 1903—1904 (Tegel); 1905 (Lindenberg).

4. H. Hergesell: Veröffentlichungen der Internationalen Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt. Strassburg.

Materiál byl spracován následovně:

Z denních povětrnostních map ústředního meteorologického ústavu vídeňského pro zimní pololetí, říjen až březen včetně od roku 1887—1905 byly zaznamenány ony dny, kdy se Sonnblick nalézal — v době ranního pozorovacího terminu — v oboru anticyklony a to uvnitř isobary 760 *mm* (niveau moře). Pro tyto dny byl zaznamenán směr větru a jeho teplota na Sonnblicku a poloha středu anticyklony. Pro každý měsíc uvažované periody let zanesl jsem tyto teploty proudů vzdušných pod ohlavení označující jich směr. Týž je udán na Sonnblicku na 16 bodů: N, NNE, NE, ENE, E, atd. Tím způsobem možno si udělati představu o tom, jaké extrémy teploty se mohou vyskytnouti v oboru anticyklony ve výši Sonnblicku při jistém směru větru. Uvádím zde k vůli názornosti leden.

Extrémní teploty na Sonnblicku pro rozličné azimuty větru (v anticykloně):

	N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW
Leden	—30·0 —3·6	—24·4 —7·0	—29·4 —5·2	—28·8 —5·8	—16·8 —8·4	—15·6 —6·5	—21·4 —7·8	—14·6 ?	—24·8 —7·0	—17·6 —10·0

	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
Leden	—21·4	—16·8	—13·0	—17·6	—31·5	—24·6
	—5·1	—6·4	—4·8	—3·6	—5·5	—1·8?

Tyto příklady ukazují, že největší extrémy se vyskytují při větrech, všeobecně severních, tedy na přední straně anticyklony.

Číselné rozdíly extrémů pro každý měsíc a každý směr větru byly rozděleny na čtyry stejné intervaly a dle toho označil jsem proud vzduchový, do kterého tepelného stupně náležel, jako studený, mírně studený, mírně teplý a teplý a tedy i anticyklonu samu jako „studenou", „mírně studenou", „mírně teplou" a „teplou". Číselná data obou vnitřních případů anticyklon, t. j. mírně studených a mírně teplých byla z číselného materiálu vyloučena a spracovány pouze extremní případy anticyklon studených a anticyklon teplých.

Tím způsobem se ukázalo, že anticyklony, jež přicházejí do střední Evropy, zde stagnují, aneb táhnou dále, možno klasifikovati, jako: 1. Studené. 2. Teplé. 3. Studené, jež se proměňují v teplé. (Případ opačný, t. j. přeměna teplé v studenou, jest velmi řídký.)

Aby bylo možno studovati, jaké meteorologické poměry jsou v rozličných částech anticyklony pro určité niveau, byla plocha anticyklony, objatá isobarou 760 *mm*, rozdělena se zřetelem ku středu této na 8 sektorů, N, NE, E, SE, S, SW, W a NW.

Každý z těchto sektorů pak na stupně tlakové po 5 *mm*, tedy 760—765, 765—770, 770—775, 775—780 a 780—785 *mm* jak jest běžným v povětrnostních mapách.

Tak pro každý den, kdy Sonnblick se nalézal v oboru anticyklony, bylo možno určiti jeho souřadnice, t. j. sektor a stupeň tlakový se zřetelem ku středu, jakož i každé z uvedených horských observatoří, ku kterýmžto souřadnicím jsem vypsal meteorologická data z publikací uveřejňujících pozorování těchto observatoří.

Data vypsaná udávají tlak vzduchu pro niveau observatoře, teplotu, relativní a absolutní vlhkost, oblačnost, směr a rychlost větru.

Z toho materiálu byly vypočtěny průměrné hodnoty.

Má tedy každá horská observatoř dvě skupiny tabulek pro uvedené meteorologické elementy.

Číselného materiálu pro teplé anticyklony jest téměř dvakráte tolik co pro studené.

Před každou skupinou těchto horských observatoří uvádím tabulky „vah", rozuměje tím počet případů, z nichž byl vypočtěn průměr pro každý stupeň tlakový každého sektoru. Jest přirozeno, že všechny průměry libovolné tabulky kterékoliv observatoře nemohou míti stejnou „váhu", vždyť záleží na tom, jaká je geografická poloha uvažované horské observatoře ku dráze barometrických maxim v Evropě.

Na př.: na Pic du Midi v Pyrenejích jsou zastoupeny pouze jižní a západní sektory, u observatoří německých, Brockenu a Sněžky ponejvíce severní sektory, u Bělašnice jihovýchodní atd. Nejlépe vůči středu jest rozdělen číselný materiál pro Sonnblick a to proto, že stacionární anticyklony se zdržují ponejvíce nad rakouskými Alpami. Dále rozdělení vah pro studenou a teplou anticyklonu vykazuje u každé observatoře rozdíly, z kterých možno si přibližně udělati pojem jakými drahami se ubírají studené a jakými teplé anticyklony, kde studené přecházejí v teplé a j.

Po tabulce vah následuje tabulka rozdělení tlaku barometrického pro hladinu observatoře, po této teplota. Tato jest vesměs udána v úchylkách od průměrné teploty zimního resp. letního pololetí pro ranní termin uvažované řady let. (Tuto průměrnou teplotu přidávám k tabulkám v závorce.) Tím právě vynikne rozdíl studené a teplé anticyklony při vzájemném srovnání. Potom následuje tabulka vlhkosti, relativní a absolutní, u některých stanic chybí, na to oblačnost dle skály (0—10); a konečně směr a rychlost větru se zřetelem k povrchu země. Směr (odkud vítr vane) jest podán v celých stupních azimutu od každého ze 4 kardinálních směrů ve smyslu pohybu ručičky u hodin, rychlost pak v metrech za vteřinu. Poněvadž všechny observatoře užívají Beaufortovy škály, byly údaje pomocí tabulek v Hannově: „Lehrbuch der Meteorologie" převedeny na m. p. s. Pro rakouské stanice, Sonnblick a Obir byla užita desetistupňová skála:

Stupeň	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m. p. s.	2	3·5	5·5	8·0	10·5	13·5	16·5	22·5	28·0	30·0

Pro ostatní stanice, vyjma Pic du Midi a Mt. Ventoux byla užita dvanáctistupňová skála (Curtis):

Stupeň	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m. p. s.	1·7	3·1	4·8	6·7	8·8	10 7	12·9	15·4	18·0	21·0	26·0	40·0—50·0

Pro Pic du Midi a Mt. Ventoux předvedl jsem telegrafickou skálu (0—9), jak se užívá ve francouzských povětrnostních mapách na m. p. s. dle tabulky v Angotových „Instructions meteorologiques", 4. vydání, pp. 101.

Z takto získaných údajů m. p. s. byly vypočteny dle paralelogramu sil výsledné průměrné rychlosti. (Viz Hann, Lehrbuch der Meteorologie, 1. vydání, p. 381 pod čarou.)

Jest přirozeno, že průměrné hodnoty všech meteorologických elementů v hlavních tabulkách — jež uvádím vesměs na konci práce — mají vyjadřovati jakousi kontinuitu a to jak při přechodu od jednoho stupně tlakového k druhému, tak i při přechodu od sektoru ku sektoru. Vskutku však tomu tak není všude, vždyť takováto průměrná hodnota jest tvořena z dat šesti měsíců, z nichž každý není zastoupen v průměru týmž počtem případů, tu má převahu ten, tu onen měsíc, nezřídka některý z měsíců vůbec není zastoupen, což se pak jeví nápadně v průměrech, jež byly vypočtěny z několika málo případů. Proto z těchto hlavních tabulek počítám vedlejší, přehledné, jež vkládám do textu práce. Tvořím průměry jednou pro každý sektor zvláště, po druhé pro každý stupeň tlakový, snaže se tímto způsobem nalézti polohu maxima a minima uvažovaného elementu. Pro právě uvedenou, místy se vyskytující nesouvislost dat v hlavních tabulkách počítám v těchto vedlejších přehledných v jedné rubrice často dvě až tři hodnoty, jež odvozuji tím, že vylučuji nápadně se odlišující hodnotu neb hodnoty v hlavní tabulce z průměru.

Sonnblick.

Největší váha padá na sektory západní, W, NW, SW, a též na E, v studené anticykloně jsou zastoupeny ponejvíce jižní sektory, jsou tedy průměrné polohy studených anticyklon severnější než ony teplých anticyklon.

Tlak. Tlak na Sonnblicku v obou anticyklonách přibývá ku středu. Obor nejvyššího tlaku však není nad nejvyšším tlakem v hladině moře, ale — máme-li zřetel ku váhám jednotlivých průměrů —

nalézá se asi mezi W a NW sektorem a to pro teplou anticyklonu asi ve vzdálenosti 2 stupňů tlakových t. j. 10 *mm* v niveau moře, což potvrzuje i rozdělení proudů větrných. U studené anticyklony, uvažujeme-li poměry tlakové v stejných vzdálenostech od středu, zdá se, že nejnižší tlak se nachází vně NE sektoru. Nápadným jest sice nízký tlak na kraji sektoru S, než týž stojí zde docela ojediněle. Rozdíl průměrných tlaků mezi teplou a studenou anticyklonou pro odpovídající si stupně tlakové jest největší ve středu s druhým maximem blíže samého okraje; na okraji jest nejmenší. Musí tedy při přeměně studené anticyklony v teplou se nejvíce oteplití masy vzduchové ve středu anticyklony.

Rozdíl tlaku mezi teplou a studenou anticyklonou v *mm*:

785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
10·8	8·6	8·1	9·7	6·3

Teplota. Tabulka teploty ukazuje na první pohled tepelné rozdíly obou anticyklon od průměrné teploty na Sonnblicku za ranního pozorovacího terminu v zimním pololetí, jež obnáší —11·2° C. Záporné úchylky jsou značně větší než kladné. Průměrné hodnoty pro tytéž stupně tlakové získané z dat všech sektorů podávají, že pro teplé anticyklony úchylky teploty ve smyslu kladném jsou nejmenší ve středu, rostou ku okraji a opět rychle se zmenšují.

	785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
Teplá anticyklona	+ 3·8	+ 4·0	+ 3·9	+ 5·8	+ 2·1
Studená anticyklona	— 12·3	— 10·1	— 8·5	— 7·6	— 6·0 (— 3·4)

Pro studené anticyklony jsou největší úchylky ve středu a zmenšují se ku okraji. Rozdíl mezi úchylkami studené a teplé anticyklony jest největší ve středu, obnášeje asi 16° C.

Sestavíme-li průměry odchylek teploty pro jednotlivé sektory N, NE, E atd. pro obě anticyklony a béřeme-li patřičný zřetel na nápadné hodnoty ojedinělé [jako u teplé na NE (780—775), SE (785—780), u studené W (780—775) jakož i (785—780) sektoru E, S a SW] obdržíme, že zadní část anticyklon, t. j. sektory NW a N, jest teplejší než přední, což u teplé anticyklony jest slabě vyznačeno, u studené pak patrněji.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Teplá anticyklona	+ 3·7 (+ 4·2)	+ 3·5 (+ 4·7)	+ 4·9 (+ 4·4)	+ 3·8 (+ 2·9)	+ 3·0 (+ 3·9)	+ 3·4 (+ 4·4)	+ 4·8 (+ 5·0)	+ 4·9 (+ 5·0)
Studená anticyklona	(+ 3·8)	— 10·8 (— 13·0) (— 11·8)	— 8·5 (— 10·1)	— 9·1	— 10·0 (— 11·1) (— 12·7)	— 7·9 (— 8·4)	— 3·9 (— 2·6) (— 2·2)	— 6·4

U studené anticyklony zdá se, že obor nejnižší teploty se táhne od přední strany centra NE a E skrze SE do S ku jižním stupňům tlakovým, tedy s proudem vzduchovým. Mohlo by se snad namítati, že data z NE sektoru nemají valné váhy, že i průměrné tlaky tohoto sektoru jsou vůči ostatním neobyčejné nízké; než to právě zdá se mi býti charakteristickou vlastností studené anticyklony na Sonnblicku. Srovnáme-li průměry tlakové sektoru E s oněmi v NE, jeví se následující: Rozdíl mezi postupnými stupni tlakovými sektoru E jest malý, rozdíl mezi odpovídajícími si stupni tlakovými sektoru NE a E jest mnohem značnější. Možno si tedy na základě tohoto přibližné udělati pojem o průběhu isobar v hladině Sonnblicku. Tvar těchto v NE jest asi konvexní vůči středu anticyklony, nikoliv konkavní; což by poukazovalo na blízkost oboru nízkého tlaku vně sektoru NE. Pak by právě uvedený obor největší záporné úchylky teploty byl průsek studeným proudem zádi cyklony, který v sektoru N z vyšších hladin než Sonnblick sestupuje, niveau Sonnblicku protíná v čele anticyklony a stáčeje se v pravo dle směru proudu klesá do nižších hladin. Bude možno tento studený proud i v hladinách nižších observatoří sledovati.

Zajímavo zde poukázati na to, že obor maxima a minima teploty v teplé anticykloně jest posunut ve směru proudů vůči oborům maxima a minima teploty studené anticyklony.

Tak obor nejvyšší teploty teplé anticyklony jest v NW, v studené ve W, obor nejnižší teploty v teplé anticykloně v S, v studené NE až S.

Relativní vlhkost. Při relativní vlhkosti vyniká opět rozdíl typů obou anticyklon patrně, vyšší relativní vlhkost jest v anticykloně studené.

Vypočteme-li průměrné hodnoty pro postupné stupně tlakové obdržíme následující průměrné hodnoty v procentech:

	785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
Teplá anticyklona	49	58	60	67	59
Studená anticyklona	88?	84	83	91	86

Nejnižší relativní vlhkost je pro obě anticyklony kol středu a na okraji.

Průměrné hodnoty se zřetelem k rozličným sektorům jsou tyto:

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Teplá anticyklona	47	49 (78)	69	73	59	49	50	59
Studená anticyklona	—	86	86	90	85	85	89	92

Jsou tedy v obou případech nejnižší procenta v S a SW sektoru, v teplé též v N.

Oblačnost jest v průměru nižší v teplých anticyklonách než v studených a přibývá v obou případech od středu ku okraji.

	785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
Teplá anticyklona	2	2	2	4	5
Studená anticyklona	5	5	5	5	6

Pokud se týče jednotlivých sektorů jest rozdělení následující:

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Teplá anticyklona	3	2	6	3	3	2	2	2
Studená anticyklona	—	5	7	8	6	3	6	0

Maximum oblačnosti připadá na E, minimum na SW, W a NW v teplé anticykloně, v studené maximum jest v SE, minimum v SW sektoru. Jest tedy v obou případech anticyklon oblačnost a relativní vlhkost na přední, studenější straně anticyklony větší než na zadní, teplejší.

Směr a rychlost větru. Pokud se týče poměrů větrných na Sonnblicku, jsou tyto v obou anticyklonách pro jižní sektory stejné, totiž převládají zde proudy z anticyklon vytékající, se složkou od severu. Proudy v západních sektorech jsou stejné až na nejvyšší dva stupně tlakové; jsou zde vtékající proudy se složkou na sever, v teplé anticykloně pak pro uvedené nejvyšší stupně tlakové větry od severu. Rozdíl obou anticyklon jeví se ve větrných poměrech severních sektorů: V studené anticykloně převládají zde proudy od severu, vtékající *do* oboru anticyklony [v N sektoru stupně tlakové 760—765 *mm*, 765—770 byly doplněny z dat Zugspitze*)].

Představuje tedy celá N, E a S část studené anticyklony jediný, neobyčejně studený proud, který na N do anticyklony vtékaje, plyne na jih, rozvětvuje se slabě se stáčeje v pravo a vytéká v E, SE a S sektorech z anticyklony. Onen pramen proudu, jenž z pravé jeho strany (ve směru proudu) se odvětvuje do SW sektoru, setkává a z části mísí se v tomto s teplými proudy od jihu (viz neurčitost směrů proudů v SW sektoru) a klesá pod tyto. Odtud snad nízká oblačnost sektoru SW. V studené anticykloně jsou tedy v sektorech W, NW, N a NE proudy vtékající, v ostatních proudy vytékající.

V teplé anticykloně — máme-li zřetel ku oboru nejvyššího tlaku v niveau Sonnblicku, který, jak jsem ukázal, leží asi mezi W a NW sektorem mezi stupni tlakovými 770—775 *mm* a 775—780 *mm* — představují větry sektoru NW a jmenovitě N větry anticyklonálně vytékající; se zřetelem ku středu anticyklony (v hladině moře) jsou větry sektoru NW vtékající. Znázorňuje tedy celá soustava větrů na Sonnblicku v tomto případě anticyklonální systém větrů vytékajících, vyjma sektory W a NW, kde převládají proudy vtékající do anticyklony. Stojí tedy mírně teplý, severní proud E až S sektorů přední strany teplé anticyklony naproti neobyčejně studenému severnímu proudu anticyklony studené: Zde studený proud zádi cyklony, tam klesající, oteplující se, anticyklonálně vytékající proud ze středu anticyklony.

---

*) Zugspitze, 2964 *m* n. m., 47° 25′ s. š., 11° 59′ v. d. Gr.

Pic du Midi.

Poněvadž Pic du Midi leží na jih od průměrné dráhy barometrických maxim v Evropě, jsou zde zastoupeny pouze sektory jižní a západní.

Tlak. Rozdíl tlaku v *mm* mezi oběma anticyklonami pro zastoupené stupně tlakové jest analogického průběhu jako na Sonnblicku, než jest asi o polovinu menší.

780—775	775—770	770—765	765—760
4·1	3·5	5·4	1·4

Teplota. Průměrná teplota na Pic du Midi v zimních měsících a pro ranní termin pozorování obnáší — 6·8° C.

Průměrné hodnoty úchylek od středu ku okraji probíhají podobným způsobem jako na Sonnblicku, jak z přiložené tabulky patrno, než jsou nepoměrně menší, jmenovitě záporné úchylky, jež přecházejí [na okraji sektorů SW a W] v kladné.

	785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
Teplá anticyklona	—	+ 2·5	+ 3·0	+ 5·2	+ 0·8 (+ 3·9)
Studená anticyklona	— 3·4	— 1·6	— 1·2	— 2·5 (— 3·5)	+ 0·5 (+ 2·4)

Rozdělení dle sektorů podává pro obě anticyklony, že sektor W jest teplejší než ostatní zastoupené.

	SE	S	SW	W
Teplá anticyklona	—	+ 0·4	+ 3·9	+ 4·2
Studená anticyklona	— 5·6	— 1·3	+ 1·2 (+ 0·6)	+ 1·2 (— 1·2)

Relativní vlhkost. Rozdělení relativní vlhkosti jest podobné jako na Sonnblicku, v průměru však mnohem nižší, v obou případech přibývá relativní vlhkost ku okraji anticyklony a jest nejnižší v zastoupených sektorech v SW v teplé a v SE u studené anticyklony.

	780—775	775—770	770—765	765—760
Teplá anticyklona	38	37	41	67 (64)
Studená anticyklona	69 (49)	46	55	74

[Váha průměrů relativní vlhkosti v SE a S sektoru pro 780—775 *mm*, jest poloviční, tedy 1 a 2 resp., a ne jak v tabulkách vah uvedeno.]

	SE	S	SW	W	NW
Teplá anticyklona	—	51	39	46	54
Studená anticyklona	48	56	60	60	—

Oblačnost. Jak na první pohled vysvítá, vzrůstá oblačnost v obou případech ku kraji anticyklony; jest nejmenší v sektoru SW pro teplou a v sektoru SE pro studenou anticyklonu.

Poměry větrné. V teplé anticykloně v zastoupených sektorech jsou poměry větrné zcela analogické oněm na Sonnblicku, pouze s tím rozdílem, že průměrná rychlost větru jest nepoměrně slabší. Převládají zde slabé, v jižních sektorech vytékající, v západních pak vtékající větry.

Studená anticyklona na Pic du Midi ukazuje markantní rozdíl proti studené anticykloně na Sonnblicku: v SE, S a SW jsou poměry větrné sice téměř stejné, ale W sektor obou studených anticyklon jest rozdílný. Na Sonnblicku vtékající chladné větry se složkou od jihu, na Pic du Midi vesměs severní větry mírně teplé. Představují tedy zastoupené sektory v hladině Pic du Midi v studené anticykloně proud od severu, v SE a S studený, v SW a W mírně teplý, buď klesající z vyššího niveau a tak se oteplující, anebo přijímající vně W a NW sektoru teplejší proudy od jihu, s nimiž se mísí.

Není tedy na Pic du Midi v studené anticykloně o nějakém anticyklonálním systému větrů — jako na Sonnblicku — žádné stopy; zdá se tedy, že studená anticyklona, přicházející na kontinent od západu přes Biskayský záliv, jest tak mělkou, že nesahá ještě ku vrcholu Pic du Midi.

Säntis.

Rozdělení vah na Säntisu ukazuje, že tento se nalézá v převážné většině případů v sektoru W teplé anticyklony, u studené anticyklony jest rozdělení rovnoměrnější, též s největší vahou na W, než i zde vyniká, že průměrná dráha studené anticyklony jest severnější než ona teplé.

Tlak. Nejvyšší tlak na Säntisu se neshoduje se středem anticyklony v niveau moře, ale jest — podobně jako na Sonnblicku — posunut ku sektorům západním, s čímž souhlasí i rozdělení větrů. Rozdíl průměrů jednotlivých stupňů tlakových mezi oběma anticyklonami jest téměř stálý, ve středu pak větší, jak patrno z následující tabulky, [vymýtíme li z počtu nápadně rozdílné hodnoty, tak S a SW (785—780), E, SE a S (765—760) pro studenou anticyklonu a N (770—765) pro teplou].

785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
6·4 (8·6)	6·0	6·0	6·0	6·0

Teplota. Vymýtíme-li i korespondující hodnoty z tabulek teploty, možno o teplotě v hladině Säntisu říci následující: Tepelné rozdíly mezi paralelními stupni tlakovými teplé a studené anticyklony nejsou — vyjma středu — valně od sebe rozdílné (analogicky jako u tlaku); průběh průměrů pro studenou a teplou anticyklonu zvláště odpovídá průběhu na Sonnblicku: v teplé anticykloně nejmenší úchylka blíže středu vzrůstající ku okraji a klesající opět, u studené největší úchylka ve středu a zmenšuje se ku okraji anticyklony.

	785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
Teplá anticyklona	+ 4·4	+ 4·1	+ 4·9	+ 5·0	+ 3·4
Studená anticyklona	— 11·0	— 5·3 (— 6·3)	— 5·7 (— 6·4)	— 5·7	— 4·2 (— 5·6)

Rozdělení dle sektorů podává pro teplou anticyklonu jako nejlepší sektor NW a S,*) pro studenou pak W, minima teploty v teplé anticykloně padají na E a v studené na NE.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Teplá anticyklona	+ 5·3 (+ 2·9)	—	+ 3·8	+ 3·4	+ 5·4?	+ 4·3	+ 4·7	+ 5·6
Studená anticyklona	—	— 10·1	— 6·5 (— 7·4)	— 3·9 (— 5·9)	— 8·5 (— 6·6)	— 6·3 (— 5·8)	— 2·8	— 7·0

Možno i zde na Säntisu, jako na Sonnblicku v studené anticykloně si konstruovati s jistým přiblížením isothermy nejnižších stupňů teploty objímající čelo studeného severního proudu.

Isotherma úchylky — 10° prochází nejvyšším stupněm tlakovým sektoru E a třetím stupněm tlakovým sektoru NE. Isotherma úchylky asi — 7° zasahuje od E, SE a S až do sektoru SW, tedy ve směru proudů vzduchových. Obor nejmenší kladné úchylky v teplé anticykloně nelze určitě vymeziti následkem rušivého vlivu vysokých hodnot v S sektoru, jež jsou nepravdě podobné.

Relativní vlhkost jest vyšší v studené anticykloně než v teplé a je nejmenší v obou případech ve středu. Při rozdělení dle sektorů jest nejmenší relativní vlhkost pro teplou anticyklonu v S, pro studenou ve W sektoru (nebéřeme li zřetel na nízkou váhu hodnoty v N sektoru v teplé anticykloně).

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Teplá anticyklona	31	—	77	58	41	54	54	52
Studená anticyklona	—	100	80	71	71	60	49	56

Oblačnost jest v zimě v obou anticyklonách téměř stejná, nejmenší uprostřed a přibývá ku okraji.

*) Hodnoty sektoru S jsou, jmenovitě pro nejvyšší stupeň tlakový, příliš vysoké, jak se přesvědčíme sledujeme-li průběh úchylek teploty (i tlaku) od sektoru ku sektoru pro tytéž stupně tlakové.

	785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
Teplá anticyklona	2	2	3	5	4
Studená anticyklona	1	2	4	5	4

Rozdělení dle sektorů podává, že pro teplou anticyklonu sektor S, pro studenou NW má minimum. Největší oblačnost mají sektory východní.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Teplá anticyklona	6	—	6	3	2	3	3	3
Studená anticyklona	—	10	5	4	3	2	3	1

Poměry větrné. Seskupení větrů v oboru anticyklony na Säntisu není valně na vzájem rozdílné, snad by kontrasty vynikly, kdyby u studené anticyklony byl zastoupen N sektor a v teplé sektory NW a NE s větší vahou. V obou případech máme zde system anticyklonální; v případě teplé anticyklony kol oboru nejvyššího tlaku mezi sektorem NW a W ve vzdálenosti dvou stupňů tlakových (= 10 *mm* v hladině moře). V západním sektoru převládají pro oba případy proudy vtékající do anticyklony. Jediným rozdílem obou anticyklonálních systémů proudů větrných jest jejich rozdílná teplota. Nápadnou jest podobnost rozdělení teploty a tlaku v NE a E sektoru s poměry na Sonnblicku.

Obir.

Jak z tabulky vah vysvítá, padá největší váha na SE, pak na W sektor pro teplé anticyklony, v studených na SE. Sektory N a NE jsou v teplé anticykloně velmi slabě zastoupeny, v studené chybí.

Tlak. Rozdíl mezi průměry korespondujících stupňů tlakových probíhá analogicky jako na Sonnblicku, maximum ve středu, druhé vedlejší blíže okraje, jak z následující tabulky patrno:

785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
7·2	4·8	4·9	5·9 (5·6)	2·5

Teplota. Pro teplé anticyklony nejmenší kladná úchylka nepadá při rozdělení dle stupňů tlakových na střed anticyklony, ale na stupeň 780—775 *mm*, a to, jak z druhé tabulky patrno, na sektor SW. Nejteplejším je sektor N. V případě studené anticyklony jsou záporné úchylky největší ve středu, zmenšujíce se ku okraji a dle sektorů padá minimum na S.

Prostírá se tedy v niveau Obiru v teplé anticykloně mírně studený obor v sektoru S a SW (780—775) a SW (775—770). Mají tedy isothermy úchylek teploty podobný tvar jako na Säntisu. V studené anticykloně, nebéřeme-li zřetele na teplotu nejvyššího stupně tlakového v sektoru SW, která, jak tabulka tlaků ukazuje, jest asi příliš nízkou, zaujímá nejstudenější obor stupně tlakové 780—775 v sektoru S. Jest tedy mírně studený obor teplé anticyklony

	785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
Teplá anticyklona . . .	+ 3·4	+ 0·6	+ 1·6 (+ 2·9)	+ 5·4 (+ 4·7)	+ 0·6
Studená anticyklona . .	(— 13·1)	— 9·2	— 7·6	— 7·8	— 6·4

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Teplá anticyklona . .	+ 10·3	+ 9·0 (+4·4)	+ 4·0	+ 1·6	+ 0·9	— 0·2	+ 3·3	+ 4·1 (+6·0)
Studená anticyklona .	—	—	— 7·9	— 8·0	— 9·6	— 8·2 (—9·2)	— 5·7	—

vůči studenému oboru studené anticyklony posunut ve smyslu ručiček u hodin, tedy ve smyslu proudů anticyklonálních v p ř e d, právě tak, jak jsem ukázal na Sonnblicku.

Tlak páry je v oboru studené anticyklony o polovinu menší než v teplé. Rozdělení dle sektorů a stupňů tlakových poučuje, že právě uvedený, mírně studený obor v teplé anticykloně v sektoru S (780—775) jest asi o 30% sušší než bezprostřední okolí, podobně i v studené anticykloně uvedený studený obor jest sušší než okolí.

Relativní vlhkost v obou anticyklonách není valně rozdílná, v teplé jest minimum ve středu, v studené téměř všude stálou.

	785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
Teplá anticyklona . . .	79	86	88	86	91
Studená anticyklona . .	(89)	91	89	89	75 (81)

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Teplá anticyklona . .	80	89	86	87	85	89	87	82
Studená anticyklona .	—	—	84	89	89	85	93	—

Dle sektorů jest v teplé anticykloně minimum v NW a N, kde v studené o tom nelze rozhodnouti.

Oblačnost jest větší v studené než v teplé anticykloně. Rozdělení dle sektorů v teplé anticykloně není valně mezi sebou rozdílné, v studené anticykloně neurčité.

Poměry větrné v teplé anticykloně jsou analogické s poměry na Säntisu a Sonnblicku, i zde ve všech, vyjma W a NW sektorech převládá složka vytékající. V studené anticykloně, kde chybí zastoupení NW, N a NE sektoru, jsou větry v SE kvadrantu silnější než v teplé. E sektor zde patrně naznačuje rozdvojení studeného severního proudu; část východní vytéká z anticyklony, západní se pak stáčí v pravo do S, SW a W sektoru vytékajíc. Na Obiru setkáváme se tedy ve W sektoru studené anticyklony ponejprve s vytékajícími proudy.

Bělašnica.

U Bělašnice, nejvýchodnější z uvažovaných horských observatoří, jsou číselná data v jednotlivých sektorech dosti spoře zastoupena, u teplé anticyklony ponejvíce SE, pak SW, u studené pouze 3 vnější stupně tlakové.

Tlak. Průměrné tlaky v jednotlivých sektorech, jak první pohled poučuje, jsou dosti hrubá čísla, tak že vzájemné srovnání tohoto elementu u obou anticyklon jest naprosto vyloučeno.*)

Teplota. Pro teplé anticyklony jest průběh průměrů pro jednotlivé stupně tlakové analogický na př. Sonnblicku neb Obiru; nejmenší kladná úchylka ve středu a na okraji s maximem uprostřed. O studené anticykloně z dat 3 zastoupených stupňů tlakových nelze mnoho říci pro nepatrnou váhu průměrů.

	785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
Teplá anticyklona . . .	+ 0·3	+ 5·9	+ 6·0	+ 6·7	+ 2·4
Studená anticyklona . .	—	—	— 9·0	— 15·0	— 7·0

V rozdělení dle sektorů jest nejmenší úchylka v E a největší v NW v teplé anticykloně. V studené anticykloně, předpokládáme-li per analogiam

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Teplá anticyklona . .	(+5·2)	(+8·8)	— 0·5	+ 3·2	+ 5·3	+ 3·4	+ 6·8	+ 9·4
Studená anticyklona .	—	—	— 5·5	— 14·0	— 17·0	— 6·5	— 1·4	—

existenci již na Sonnblicku, Säntisu a Obiru zmíněného studeného proudu ve vyšších stupních tlakových nezastoupených sektorů, zdá se, že i zde jeho čelo obepínající isotherma sahá ku nižším stupním do sektorů SE a S.

Nápadným jest, že úchylky teploty v studené anticykloně jsou tak velké, srovnáváme-li je na př. s daty stejně vysokého Obiru, ovšem nesmíme zapomenouti, že váha oněch jest malá. Než možno z toho přece s jistou pravděpodobností usuzovati, že studená anticyklona, která na své dráze na východ až do Uherské nížiny pro-

*) Poukazuji na to, že číselná data elementů meteorologických, z nichž byly průměry odvozovány, nevykazují pro žádnou jinou observatoř tak veliké extrémy jako Bělašnica, čímž se vysvětluje, proč průměrná data hlavních tabulek vykazují dosti hrubou a povrchní souvislost.

nikne, jest velmi studenou v střední části a v jižních sektorech. Srovnejme na př. odpovídající si stupně tlakové zastoupených sektorů obou uvažovaných jižních observatoří extrémních délek: Pic du Midi a Bělašnica! Jaký jest zde rozdíl, ač Pic du Midi jest téměř o 800 metrů vyšší!

Tlak páry. Výpočet poměru $e:b$ (tlak páry dělen tlakem barometrickým, kterýžto poměr jest úměrným specifické vlhkosti) podává nejmenší hodnotu pro nejvyšší stupeň tlakový v sektoru SW. Tato ojedinělá hodnota jest však s největší pravděpodobností nahodilou, jak se dá souditi z tabulek teploty a tlaku. Nejbližší nízké hodnoty vykazuje sektor E, a to nižší než SE pro týtéž stupně tlakové. Možno tedy souditi s jistou pravděpodobností, že obor nejmenší specifické vlhkosti leží asi v E (785—780), tak že by tento obor koincidoval s oborem minimální teploty v teplé anticykloně, jako tomu bylo na př. na Obiru. O studené anticykloně nelze ničeho říci.

Relativní vlhkost jest v teplé anticykloně minimum ve středu a na okraji, v studené se vzdáleností od středu se valně nemění a je větší než teplé. Rozdělení dle sektorů podává nejmenší relativní vlhkost v severních sektorech NW, N a NE pro teplou anticyklonu, pro studenou v jižních SE a S.

	785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
Teplá anticyklona . . .	54	71	83	67	(79)
Studená anticyklona . .	—	—	84	83	86

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Teplá anticyklona . .	(54)	(55)	89	72	84	70	81	52
Studená anticyklona .	—	—	88	81	82	86	92	—

Oblačnost jest nejmenší ve středu v obou případech, v studené anticykloně větší než v teplé. Minimum ve W sektoru pro teplou, maximum v E; v studené anticykloně jest minimum asi v severních sektorech.

	785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
Teplá anticyklona . . .	1	3	4	4	8
Studená anticyklona . .	—	—	5	6	9

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Teplá anticyklona . .	(6)	(3)	8	4	5	3	1	2
Studená anticyklona .	—	—	4	10	9	10	0	—

Poměry větrné. V obou případech převládají na Bělašnice větry anticyklonální, vytékající ve všech sektorech, vyjma západní, tedy podobně jako na všech již uvažovaných observatořích. (Západní vítr ve W sektoru — rozdílný od poměrů na Obiru v studené anticykloně — má malou váhu.)

Mt. Ventoux.

U této jižní stanice jsou v teplé anticykloně zastoupeny výhradně jižní a západní sektory, u studené pak SE a SW dosti rovnoměrně. V této tři vnější stupně tlakové proti čtyrem v teplé anticykloně.

Tlak. Rozdíl tlaků v *mm* mezi studenou a teplou anticyklonou ubývá od středu k

785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
—	7·8	5·4	5·7	1·2

ku okraji.

Teplota. Průměry teploty pro postupné stupně tlakové v teplé anticykloně mají minimum v stupni tlakovém (780—775) a na okraji; v studeném asi ve středu (?) a v stupni (770—765). Rozdělení dle sektorů v teplé anticykloně dává minimum v SW, polohu maxima nelze určiti, asi v severních sektorech. Hodnoty teploty i tlaku v sektoru E jsou velmi nízké. Zdá se, že i zde v hladině Ventoux analogicky jako

	785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
Teplá anticyklona . . .	(+ 6·9)	+ 3·5	+ 4·8	+ 4·5	+ 2·4
Studená anticyklona . .	—	— 4·6	— 2·6	— 4·9 (— 3·3)	— 0·3

	E	SE	S	SW	W	NW
Teplá anticyklona . . .	—	+ 5·8	+ 3·7	+ 3·2	+ 3·5	+ 4·3
Studená anticyklona . .	(— 7·1)	— 3·1	— 1·4 (— 2·6)	— 3·8 (— 4·3)	— 0·5	—

u již uvažovaných observatoří nejnižší teploty se nacházejí v blízkosti středu sektorů E neb SE a zasahují pro nižší stupně tlakové do S a SW směrem anticyklonálních proudů. Západní sektor studené anticyklony je mírně teplý.

Relativní vlhkost jest v obou případech nejmenší ve středu, při rozdělení dle sektorů padá v teplé anticykloně maximum na východní (SE?) sektory, pro studenou nelze polohu určiti.

Oblačnost jest větší v studené než teplé anticykloně, zde vzrůstá od středu ku okraji, tam jest téměř stálá. V teplé anticykloně jest nejmenší v SE sektoru, největší v NW, v studené anticykloně jsou průměrné hodnoty ve všech zastoupených sektorech téměř stejné.

Poměry větrné v obou anticyklonách, studené i teplé, představují vytékající anticyklonální proudy. V niveau Mt. Ventoux nalézáme ponejprvé i ve W sektoru teplé anticyklony vytékající proudy (naproti Obiru). Ve W sektoru studené anticyklony pro vnější stupeň tlakový jsou vtékající proudy.

Sněžka.

Největší váha padá v zimě na severní sektory teplé anticyklony; pro studenou anticyklonu na E, SE, SW a W; jest tedy dráha studených anticyklon a jich polohy severnější nežli ona teplých.

Tlak. Rozdíl průměrných tlaků mezi korespondujícími stupni tlakovými pro studenou a teplou anticyklonu jest největší — nikoliv ve středu jako na Sonnblicku a j. — ale na okraji, ubývaje ku středu, a to v jižních sektorech, jak na to ukazuje tabulka teplot.

785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
1·3	3·8	3·5	5·7	7·4

Teplota. Rozdělení dle stupňů tlakových podává pro teplou anticyklonu nejmenší kladnou úchylku pro střed, v ostatních stupních tlakových jest úchylka značně větší a téměř stejná. Podobně i v studené anticykloně neprodělávají záporné úchylky žádných velkých změn od středu ku okraji (maximum asi v 770—765 *mm*).

	785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
Teplá anticyklona . . .	+ 0·1	+ 2·6	+ 2·6	+ 2·7	+ 2·5
Studená anticyklona . .	— 6·9	— 6·7	— 7·2	— 7·3	— 6·8

Rozdělení dle sektorů podává pro teplou anticyklonu nejmenší hodnotu zápornou pro S sektor a největší pro NW; hodnota v SE jest asi příliš vysoká, což potvrzuje tabulka tlaků. Jest tedy v hladině Sněžky pro teplou anticyklonu mírně studený obor v střední části sektoru S a nejteplejší v NW (770—765 *mm*). Pro studenou anticyklonu jest nejstudenějším sektorem SE, nejteplejším NW, a to pro stupně tlakové 770—765 a 765—760 *mm* resp.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Teplá anticyklona . .	+ 4·9	+ 2·1	— 0·2	+ 3·0?	— 0·7	+ 1·5	+ 1·8	+ 7·0
Studená anticyklona .	— 5·8	— 6·9	— 6·0	— 10·8	— 5·3?	— 9·1	— 7·2	— 4·7

Leží tedy extrémní teploty v studené anticykloně na Sněžce v protiležících sektorech NW a SE, a to blíže jich vnějších okrajů. Nápadnou jest poloha oboru nejnižší teploty, totiž sektor SE. Jak jsme již na třech Alpských observatořích nalezli, stáčí se poloha to-

hoto nejnižšího oboru teploty s proudy anticyklonálními od středu před frontou anticyklony (E) do SE, S až SW. Dalo se tedy předpokládati, že obor nejnižší teploty bude pro každou nižší hladinu posunut dále směrem proudu, na př. ku nižším stupňům tlakovým sektoru SW a W. Zde však vidíme, že onen studený proud vzduchu, který ve vyšších niveau sektorů severních vstupuje do anticyklony, plyne téměř v přímé čáře od NW ku SE. Jak vysvětlíme ostré stáčení studeného proudu nad Alpskými hřebeny a naproti tomu jeho téměř přímý tok na Sněžce?

Absolutní a relativní vlhkost. Tyto tabulky jsem pro zimní pololetí z textu vynechal, jsou v datech Sněžky tak spoře zastoupeny, že průměry naprosto vylučují diskussi.

Oblačnost jest větší v studené než v teplé anticykloně a přibývá v obou případech

	785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
Teplá anticyklona . . .	2	3	4	4	6
Studená anticyklona . .	2	4	5	5	10

ku okraji. Pro teplou anticyklonu jest nejmenší oblačnost v SW, největší v E, pro studenou anticyklonu jest nejmenší v N, největší v SE a E.

Poměry větrné v obou maximech jsou téměř stejné. Vytékající složka větru jest v obou velmi malá, máme zde vířivý pohyb, téměř rovnoběžný s isobarami, jenž je zvláště vyjádřen v teplé anticykloně. Jak soustava větrů kol středu ukazuje, leží střed studeného barometrického maxima v hladině Sněžky o jeden stupeň tlakový (asi 5 *mm* v niveau moře) na západ mezi NW a W sektorem vůči onomu v niveau moře. V případě teplého barometrického maxima souhlasí oba středy v niveau moře a Sněžky, jest tedy „osa“ teplé anticyklony vzpřímenější než „osa“ studené.

Belchen.

Největší váha v zimním pololetí leží v sektorech W a NW pro teplou anticyklonu a W a SW pro studenou.

Tlak. Rozdíl mezi průměry postupných stupňů tlakových v *mm* obou anticyklon jest následující:

785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
(5·2)	1·7	2·9	2·1 (2·8)	3·9 (4·7)

Rozdíl 5·2 *mm* pro středy obou anticyklon jest nepravděpodobný, průměr pro teplou anticyklonu jest vysoký, onen pro studenou nízký, což se jeví i nápadným způsobem v tabulce teplot.

Teplota. Utvoříme-li průměry pro jednotlivé stupně tlakové, padá minimum tepelné úchylky na druhý od středu (780—775), maximum na čtvrtý (770—765) v teplé anticykloně. V studené anticykloně jest maximum na (780—775) a minimum na (765—760) *mm*.

	785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
Teplá anticyklona . . .	+ 3·0	+ 1·5	+ 3·9	+ 4·8	+ 4·3
Studená anticyklona . .	(— 10·3)	— 5·1	— 6·4	— 6·2	— 7·9

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Teplá anticyklona . .	+ 7·9	+ 5·1 (+4·2)	— 1·6 (—3·1)	+ 3·2	+ 3·7	+ 2·5 (+4·2)	+ 5·0	+ 5·2
Studená anticyklona .	—	— 4·1	— 5·6 (—5·9)	— 7·0	— 8·4 (—8·8)	— 7·6 (—8·8)	— 4·4 (—5·5)	— 4·7

Při rozdělení dle sektorů jest maximum v N, minimum — mírně studené — v E sektoru pro teplou anticyklonu; pro studenou anticyklonu padá minimum na S (SW ?) a maximum na NW (N ?). Protíná tedy již vícekráte zmíněný studený severní proud hladinu Belchenem jdoucí ve vnějších (?) stupních tlakových sektoru S.

Tlak páry a relativní vlhkost. Pro tabulku tlaku páry a relativní vlhkosti neplatí tabulka vah, jsou i zde, jako na Sněžce, měření tato v zimních měsících zanedbána. Tabulky tlaku páry podávají všeobecně, že tlak páry jest nižší blíže středu. Obě minima teploty v obou anticyklonách jsou naznačeny i zde minimy tlaku páry.

Relativní vlhkost je v západních sektorech pro obě anticyklony menší než ve východních.

Oblačnost dle jednotlivých stupňů tlakových v obou anticyklonách se valně nemění, dle sektorů jest v obou případech menší v západních sektorech než ve východních.

Poměry větrné na Belchenu v studené a v teplé anticykloně jsou naprosto rozdílné, jak navzájem, tak i od poměrů na Sněžce, ač tato východněji ležící observatoř jest pouze as o 200 metrů vyšší. V studené anticykloně na Belchenu převládají ve všech sektorech větry se složkou od severu, i W sektor podává jako průměrné výslednice — třeba že slabě — větry severní. V tomto ohledu připomíná větrné poměry na Pic du Midi, s tím rozdílem, že na této (Midi) složka od severu určitěji vyniká. Představuje tedy studená anticyklona na Belchenu ve všech částech, i v západním sektoru v nadpočetné většině případů, jediný studený proud od severu.

Teplá anticyklona na Belchenu nepředstavuje tak pěkné seskupení větrů kol středu jako Sněžka, ale připomíná více poměry teplé anticyklony vyššího a východněji ležícího Sonnblicku, zvláště pokud se týká W a NW sektoru. Obor nejvyššího tlaku, od něhož větry anticyklonálně vytékají, nekoinciduje se středem anticyklony v niveau moře, zdá se, že i zde na Belchenu jest tento posunut na západ mezi W a NW sektor. Je tedy „osa“ teplé anticyklony silně nakloněna na zad (západ). V těchto sektorech W a NW převládají vtékající proudy ku oboru nejvyššího tlaku právě jako na Sonnblicku.

Ben Nevis.

Pro Ben Nevis, nejzápadnější a nejsevernější ze všech uvažovaných stanic, jsou k disposici pouze severní sektory, jež jsou dosti spoře zastoupeny.

Tlak. Rozdíl tlaků mezi studenou a teplou anticyklonou není valný, tu kladný, tu záporný.

Teplota jest v teplé anticykloně v průměru asi o 2—3° C vyšší než v studené. V studené anticykloně jsou všechny sektory mírně teplé, vyjma SW a část W sektoru. Jest dosti možno, že tyto negativní úchylky sahají — jako ve všech již uvažovaných observatořích — ku nejvyšším stupňům tlakovým sektorů E, SE a S a že jsou větší.

Oblačnost. Na Ben Nevisu vyskytuje se velmi hojně mlha. Čítaje každé označení mlhy za oblačnost 10 — kde výslovně procento oblačnosti nebylo udáno — vypočetl jsem tabulky. Oblačnost jest ve všech zastoupených sektorech v studené anticykloně značná a větší než v teplé.

Poměry větrné. Rozdíl mezi teplou a studenou anticyklonou v zastoupených sektorech jest patrný. Seskupení větrů v studené anticykloně v NW a N sektorech představuje uzavřený kruhový proud anticyklonální, který v nejvyšších stupních tlakových sektoru NW, N a NE plyne od severu, stáčí se v S a SW sektoru v pravo a v západních sektorech plyne na sever. Jest mírně teplý, v centrální části sektoru NE, E (?), SE (?), SW a z části i W mírně studený. Tento studený obor na přední straně centra studené anticyklony vysvětlíme si podobně sestupem studeného severního proudu z vyššího niveau než Ben Nevis. Seskupení větrů studené anticyklony na Ben Nevisu připomíná ono na Sonnblicku a též ono na Mt. Washingtonu v Spojených Státech severoamerických. (Viz Hann: Lehrbuch der Meteorologie, 1. vydání, p. 522, fig. 63.)

Seskupení větrů v teplé anticykloně na Ben Nevisu (pomíjíme-li nápadný směr v N sektoru) jest anticyklonální, slabě vytékající kol středu, jenž koinciduje přibližně se středem anticyklony v hladině moře a není nepodobným onomu na Sněžce v teplé anticykloně.

Brocken.

Na této poslední a nejnižší ze všech uvažovaných stanic jsou zastoupeny v teplé anticykloně sektory NW a N, v studené jest zastoupení slabé, ale dosti rovnoměrné.

Tlak. Rozdíly tlaků v *mm* mezi studenou a teplou anticyklonou přibývají k okraji.

785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
0·6	2·1	3·4	2·2	4·3

Teplota. Dle stupňů tlakových padá v teplé anticykloně nejmenší kladná úchylka na střed, největší na vnější okraj. V studené anticykloně největší záporná úchylka na (775—770), nejmenší na střed a vnější okraj.

	785—780	780—775	775—770	770—765	765—760
Teplá anticyklona	(+ 0·6)	+ 2·6	+ 3·2	+ 1·9 (+ 3·5)	+ 3·9
Studená anticyklona	(— 4·4)	— 6·3	— 8·7	— 5·5	— 5·5

Při rozdělení dle sektorů padá minimum teploty v obou anticyklonách na sektory jižní, polohu jich následkem slabého zastoupení nelze určitě vymeziti; v teplé anticykloně pravděpodobně na E či SE, v studené anticykloně SE (S?). Maxima teploty padají na severní sektory NW v teplé anticykloně a NE (N?) v studené.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Teplá anticyklona	+ 3·3	+ 3·2	+ 1·3	+ 1·4	+ 1·9	+ 1·5	+ 2·8	+ 3·5
Studená anticyklona	(—3·9)	— 3·0	— 6·3	— 9·8	(—7·4)	— 9·7	— 6·8	— 6 9

Tlak páry a relativní vlhkost. S těmito maximy a minimy teploty hodují se i maxima a minima tlaku páry. Relativní vlhkost přibývá v obou případech anticyklon k okraji a je v západních sektorech menší než ve východních.

Oblačnost je menší v západních než ve východních sektorech pro obě anticyklony.

Poměry větrné přiléhají ku větrným poměrům na Sněžce pro obě anticyklony. Střed studené anticyklony nekoinciduje se středem anticyklony v niveau moře, ale jest, jak větry v NW sektoru naznačují, posunut vůči tomuto na západ. V teplé anticykloně rovněž střed nekoinciduje s oním v niveau moře, jsa asi o jeden stupeň tlakový (5 *mm* v niveau moře) ku NW posunut. Větry v sektoru W probíhají téměř rovnoběžně isobarami, pouze na frontě anticyklony jest silnější vytékající složka.

Vylíčiv takto meteorologické poměry obou anticyklon v rozličných hladinách dle dat horských observatoří, chci zde sestaviti meteorologické poměry v každé anticykloně zvláště, aby rozdíl obou vynikl, chci podati výklad tohoto rozdílu a výklad proměny jedné anticyklony v druhou a pak přejíti ku konci ku výsledkům, jež jsem odvodil z mezinárodních vzduchoplaveb, z Berlínských vzduchoplaveb z výstupů draků a ballons sondes, jež osvětlují tepelné poměry anticyklon — však dosti spoře — od Sonnblicku vzhůru do vyšších hladin atmosféry.

Z právě uvažovaných rozdílů meteorologických poměrů obou anticyklon v rozličných niveau, ty, jež nejnápadněji vynikají, jsou teplota a poměry proudů vzdušných. Začnu s poměry větrnými. Počna

nejnižší observatoří volenou, Brockenem, postupným přechodem od této do vyšších hladin až k Sonnblicku, ukáži, jak větrné poměry v této vrstvě, přibližně o mohutnosti 2 *km* se mění.

Studená anticyklona. Její vystoupení v Evropě možno krátce asi takto popsati: Přichází na evropský kontinent jako anticyklona v zádi cyklony. Den před tím jest střední Evropa obyčejně pod vlivem depresse barometrické, někdy i dosti rozsáhlé. Během 24 hodin vystoupí studená anticyklona jako klín nad západní Evropou a uzavřevši se na západě postupuje na východ se značnější rychlostí a určitějšími pohyby.

Na Brockenu v studené anticykloně vytékají proudy vzdušné ze všech sektorů podobně jako v niveau moře. Osa studené anticyklony — užijeme-li tohoto pojmu pro linii spojující místa nejvyššího tlaku v tělese anticyklony — jest silně nakloněna na zad (západ). Přeskočuji poměry na Ben Nevisu a Belchenu z důvodů, jež později vyložím. Na Sněžce jest osa anticyklony vzpřímenější a i zde vytéká vzduch ze všech sektorů a to na přední straně anticyklony NE, E, SE a S silněji než v západních sektorech. Na Mt. Ventoux vytéká též vzduch ze všech zastoupených sektorů, pouze na vnějším okraji západního sektoru slabá složka vtékajícího vzduchu o malé „váze“. [Výslednice pouze ze 4 případů.] I na Bělašnice — ojedinělý případ — máme v západním sektoru vtékající proudy do anticyklony. Na Obiru však ve všech zastoupených sektorech převládají proudy vytékající. Na Säntisu, v niveau 2500 *m* n. m. ponejprve setkáváme se v západním sektoru s vtékající složkou proudů vzduchových do anticyklony, ač z ostatních zastoupených sektorů vzduch anticyklonálně vytéká. Přeskočíme-li Pic du Midi, jehož poměry větrné v W sektoru na nějaký souvislý přechod stáčení větrů od hladiny Säntisu ku Sonnblicku nepoukazují, přicházíme na Sonnblicku do větrných poměrů, jež se dají vyložiti z oněch na Säntisu silnějším vtékáním v sektoru W a stočením proudů vzdušných v sektorech NW, N a NE v pravo (dle ručiček u hodin). Postupujeme-li tedy z niveau moře do niveau Sonnblicku, zůstávají poměry větrné sektorů E, SE, S a i SW téměř stejné, neděje se zde žádná valná změna v jich azimutu s výškou. Největší stáčení vykazují sektory NW, menší W, N a NE; v NW jest změna azimutu ve větry téměř opačných směrů, v ostatních jmenovaných jest změna as 60° až 90°. Poněvadž nemám data pro větry anticyklonální v hladině moře, nemohu přesně udati změnu azimutu s výškou. Možno si tedy na základě této kontinuity změn učiniti představu, jak se poměry větrné i výše nad Sonnblickem utváří. Učiníme-li předpoklad — k vůli pozdějšímu srovnání s teplou anticyklo-

nou — že „mohutností“ anticyklony rozumíme výšku anticyklonálního víru od hladiny moře až do té výše, kde vytékající složka sektorů NW a N přechází ve vtékající, pak studená anticyklona sahá v střední Evropě přibližně do niveau Säntisu a nad touto postupně přechází ve vyšších vrstvách v proud plynoucí celkem od NW ku SE.

V celé, zde uvažované vrstvě jest studená anticyklona, pokud se týče poměrů tepelných, charakterisována zápornými úchylkami teploty, jež jsou v předních sektorech (N, NE, E a SE) větší než v zadních. Poloha oboru největší záporné úchylky od Sonnblicku ku Brockenu není v postupných niveau táž, ale posunuje se — jak bylo ukázáno — od vnitřních částí sektorů N a NE na Sonnblicku do vnějšího kraje sektoru SE v niveau Sněžky. Možno zde tedy souditi na existenci velmi studeného severního proudu, který ve vysokých hladinách severních sektorů do studené anticyklony vtéká, proudí na jih klesaje a nechávaje nejvyšší tlak v pravo, dělí se (viz Obir-E sektor). Jeho levý pramen vytéká z anticyklony a pravý plyne buď přímo anebo se stáčí více méně v pravo do sektoru S a SW.*)

Celý tento studený proud jest charakterisován ve vyšších niveau větší oblačností a relativní vlhkostí a nepatrnou specifickou vlhkostí. Nepatrná specifická vlhkost poukazuje na to, že tento proud pochází ze značných výší severnějších šířek.

Výše uvedený pravý pramen studeného severního proudu, stáčeje se v pravo, přichází v západních sektorech — od hladiny Säntisu vzhůru — ve styk s teplejšími, západními, vtékajícími proudy (vytékající na přední straně z cyklony?). S těmito z části se směšuje, než, jsa težší, klesá pod tyto a je tak asi příčinou nižší oblačnosti zadní strany anticyklony. Uvedené, poměrně teplejší vtékající proudy dosahují v NW kvadrantu největších kladných úchylek teploty.

Srovnejme tepelné poměry v studené anticykloně se zřetelem ku její rozličné geografické délce pomocí tepelných gradientů s výškou. Volil jsem k tomu následující dvojice stanic: Midi-Sonnblick, Säntis-Sonnblick, Mt. Ventoux-Bělašnica. Odvodil jsem průměrné hodnoty

*) Soudím, že stáčení tohoto proudu jest závislé od postupné rychlosti studené anticyklony: ony studené anticyklony, v nichž v niveau Sněžky bylo nalezeno minimum teploty ve vnějším stupni tlakovém SE sektoru, jsou anticyklony, jež s více méně *rovnoměrnou* rychlostí plynou na zádi cyklon, všeobecně od západu k východu přes Severní a Baltické moře, kdežto ty anticyklony, jež v hladině Obiru, Säntisu, tedy vůbec nad Alpami, vykazují značnější stáčení tohoto pravého pramene studeného proudu, jsou studené anticyklony, jež od NW na zádi cyklon k Alpám přitáhly, nad těmito se *zastaví* a *stagnujíce* vesměs v krátké době se přeměňují v teplé anticyklony.

teploty pro jednotlivé sektory pro každou z těchto observatoří a z těchto vypočetl tepelný gradient, t. j. úbytek teploty s výškou na 100 metrů. Získaná data jsou následující:

	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Midi-Sonnblick	—	—	— 3·0	— 5·8	— 5·2	— 3·0	—
Säntis-Sonnblick	— 1·2	— 1·1	— 1·3	— 1·4	— 1·1	— 0·8	— 0·7
Ventoux-Bělašnica	—	—	— 7·4	— 11·0	— 2·2	— 1·9	—

Tyto tepelné gradienty jsou ve skutečnosti nemožné. Poněvadž číselná data, z nichž tyto gradienty byly vypočteny, mají reální význam, musíme tedy souditi, že tato data nevztahují se na jediný okamžik vývoje studené anticyklony, ale na postupné okamžiky vývoje, že tedy studená anticyklona na své dráze na východ prodělává tepelné změny. Takovéto negativní gradienty mohou vzniknouti: 1. když vyšší observatoř se ochladí o větší počet stupňů než dolní v případě záporných úchylek, tedy v studené anticykloně; 2. když vyšší observatoř se o menší počet stupňů oteplí než dolní v případě kladných úchylek, tedy v teplé anticykloně. Zde platí případ první, t. j. *studená anticyklona při postupu na východ ochlazuje se ve všech hladinách a to obnos ochlazení jest v jakékoliv vyšší hladině — v uvažované mohutnosti 2 km — větší než v bezprostřední pod ní a ochlazování jde nejrychleji v jižních sektorech.*

Poněvadž tepelné poměry pro rozličné zeměpisné délky v studených anticyklonách jsou rozličné, jest přirozeno, že i poměry ostatních meteorologických elementů se i tímto postupem mění. Zde leží důvod, proč při sestavení větrných poměrů jsem vynechal Pic du Midi, Ben Nevis a Belchen.

Větrné poměry Ben Nevisu v studené anticykloně — jak již v diskussi této observatoře bylo uvedeno, připomínají v zastoupených sektorech ony na Sonnblicku. Sahá-li v okolí Sonnblicku mohutnost studené anticyklony až do niveau Säntisu, zůstává tedy v okolí Ben Nevisu mohutnost studené anticyklony ještě hluboko pod vrcholem tohoto, jest tedy:

Studená anticyklona ve východních Alpách jest vyšší než na Ben Nevisu.

Poměry větrné na Pic du Midi neprozrazují žádné stopy anticyklonálního proudění, jest zde jediný severní proud. Jest tedy mo-

hutnost studené anticyklony, jež právě přes Biskajský záliv vstupuje na evropský kontinent, asi tak malá jako na Ben Nevisu.

V hladině Belchenu větry W sektoru prozrazují příbuznost s W sektorem na Pic du Midi, než zde na Belchenu převládají N větry — při vypočtení výslednice — jen v malé nadpočetné většině. Studená anticyklona jest zde již vytvořena do té výše, že časem ruší ve W sektoru N proudy. Jdeme-li dále na východ, jest mohutnost studené anticyklony rovna téměř výši Säntisu a má přirozeně i mohutnost Obiru. Právě tak, postoupíme-li od Belchenu ku Brockenu a Sněžce jmenovitě, ukazují větrné poměry těchto, jak se studená anticyklona vyvíjí a jak převládající severní proud nad touto postupně se zvedá do vyšších a vyšších vrstev atmosféry.

Vidíme tedy všeobecně, že *mohutnost studené anticyklony v Evropě při postupu od západu na východ roste do výše.*

Teplá anticyklona přichází buď již jako taková na Evropský kontinent a vykazuje v průměru menší postupnou rychlost než studená anticyklona a neurčitějších směrů, anebo se vytvořuje ze studené anticyklony, když tato v zádi cyklony postupujíc, rychlost zvolňuje a když se docela zastaví — obyčejně nad Alpami a tak od cyklony se zdánlivě isoluje. Postupujeme-li od niveau Brockenu na Sonnblick, jeví se změny poměrů větrných následovně:

Anticyklonální systém silných větrů na Brockenu vykazuje na přední straně anticyklony silnější vytékající složku než na zadní straně. „Osa" anticyklony jest nakloněna značně na zad. I na Ben Nevisu jest anticyklonální systém jasně vyjádřen. Belchen vykazuje poměry poněkud odchylné, zvláště pokud se týče W a NW sektoru, připomínajíc poměry na Sonnblicku. Sněžka přiléhá těsně ku poměrům Brockenu; i zde jsou silné, vířivé, anticyklonální proudy se silnější složkou vytékající na přední straně. Osa anticyklony jest již vzpřímena. Na Ventoux jsou větry poněkud slabší, než seskupení jest analogické nižším observatořím.

Na Bělašnice ponejprve nacházíme ve W sektoru vtékající složku větru (ojedinělý případ); na Obiru tato vtékající složka vystupuje určitěji, jakož i na Säntisu. Poměry větrné na Pic du Midi přiléhají k oněm na Säntisu, než průměrné rychlosti jsou velmi malé. Zde na Midi v NW sektoru nalézáme proud s vtékající složkou (ojedinělý případ). Na Sonnblicku jest ve všech zastoupených sektorech anticyklonální vír vytékajících proudů kol středu nalézajícího se mezi sektory NW a W, asi o 2 stupně tlakové (10 *mm* v niveau moře) posunutého na západ. Ve vnějších stupních sektorů W a NW máme

proudy vtékající k oboru nejvyššího tlaku. Vidíme, že od hladiny moře až do hladiny Sonnblicku azimuty větrů nepodléhají valným změnám, největší stáčení v pravo doznají větry W sektoru, menší ony NW a N. Jest tedy mohutnost teplé anticyklony nad Alpami — máme-li zřetele ku předpokladu v kapitole o studené anticykloně uvedenému — rovna téměř výšce Sonnblicku, tedy:

Teplá anticyklona jest vyšší než studená (nad Alpami).

V celé této mohutnosti jeví se teplá anticyklona jako mírně teplý vír a to nejteplejší blíže okraje; ve vyšších hladinách ve středu mírně teplý, maximum kladné úchylky asi ve výškách Säntisu, jež se zmenšuje jak vzhůru ku Sonnblicku, tak i ku nižším hladinám, přecházeje u nejnižších uvažovaných observatoří — blíže středu — i v malé záporné úchylky. I zde, jako u studené anticyklony, můžeme rozeznávati v každém niveau chladnější a teplejší polovinu. Přední sektory E, SE, S a i SW jsou studenější než sektory W, NW a N. Změna polohy těchto oborů nejmenší kladné úchylky v teplých anticyklonách není tak určitě vyjádřena — od hladiny ku hladině — jako ona největší záporné úchylky v studené anticykloně. Nějaká souvislost mezi tímto oborem nejmenší kladné úchylky, relativní vlhkostí a oblačností nedá se přesně určiti, za to ale souhlasí dobře s oborem nejmenší specifické vlhkosti; tedy tento sestupující, mírně teplý, resp. mírně studený proud na přední straně teplé anticyklony jest velmi suchý jako již uvedený severní studený proud na přední straně studené anticyklony. Možno souditi, že původ obou těchto proudů jest asi týž, rozdíl teploty pochodí pak od toho, že v teplé anticykloně tento proud klesá z vyšších, tedy potencielně teplejších vrstev.

Musíme připustiti, že i teplá anticyklona na postupu od západu ku východu prodělává tepelné změny ve všech svých hladinách. Tyto změny nejsou tak značné jako v studené anticykloně a dějí se ve smyslu opačném. Uvádím zde gradienty pro již uvedené 3 dvojice stanic: Pic du Midi-Sonnblick, Säntis-Sonnblick, Ventoux-Bělašnica.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Střed
Midi-Sonnblick	—	—	—	—	— 0·7	— 1·8	— 1·4	—	—
Säntis–Sonnblick	— 0·9	—	— 0·4	— 0·7	— 0·9	— 0·8	— 0·7	— 1·0	— 0·7
Ventoux-Bělašnica	—	—	—	— 1·9	— 2·5	+ 1·2	+ 0·3	—	—

Poněvadž v teplých anticyklonách se jedná o kladné úchylky teploty, znamená silný negativní gradient, že postupem anticyklony na východ tato se otepluje v nižším niveau více než v kterémkoliv vyšším, jak to platí pro Pic du Midi, Säntis a Sonnblick; pro dvojici Mt. Ventoux a Bělašnica pak vedle záporných gradientů vystupují i silné, kladné, což poukazuje na vytvoření inverse, jež jest známou vlastností teplých anticyklon. Tato inverse nalézá se kdesi mezi Bělašnicou a Säntisem, tedy ve výších dva a půl kilometrů nad mořem a nemá ve všech sektorech tutéž výšku.*)

Z této kapitoly o tepelných gradientech v studených a teplých anticyklonách vyplývá všeobecně, že jak teplé, tak i jmenovitě studené anticyklony mění tepelné poměry při postupu střední Evropou. Chceme-li tedy si udělati pojem o současných gradientech, dlužno srovnati tepelné poměry takových horských observatoří, jež jsou velmi blízké a přibližně na témže poledníku.

Z observatoří, jež této podmínce nejlépe vyhovují, jsou čtyry, totiž Sonnblick-Obir a Säntis-Belchen. Tepelné gradienty těchto dvou dvojic observatoří jsou následující (záporné označení vynechávám, kladné označení poukazuje na vzrůst teploty s výškou; čísla uzávorkovaná mají malou váhu v průměru 5 nepřekročující):

Sonnblick-Obir.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Střed
Teplá anticyklona	(1·28)	(0·15)	0·52	0·56	0·27	0·05	0·32	0·70	0·46
Studená anticyklona	—	—	0·70	0·64	0·80	0·49	0·23	—	(0·26)

*) Na základě toho možno vypočísti, v jaké výši v teplé anticykloně kladné úchylky přecházejí v záporné, předpokládáme-li že úchylky se zmenšují lineárně s výškou. Vypočetl jsem průměr kladných úchylek pro Sonnblick ze všech sektorů na $+3{\cdot}9^{\circ}$ C. onen pro Säntis na $+4{\cdot}4^{\circ}$ C. Rozdíl výšek Sonnblick-Säntis se rovná 606 *m*. Tedy výška nad Säntisem, v níž kladná úchylka se rovná nulle vychází z rovnice:

$$0{\cdot}5 : 606 = 4{\cdot}4 : v, \quad \text{tedy} \quad v = 5333 \text{ nad Säntisem;}$$

tedy nad mořem ve výši 7833 *m*. Teplá anticyklona v zimě dosahuje asi do výše 8 *km*. nad mořem. Jeli tato lineární extrapolace oprávněnou, o tom mohou rozhodnouti pouze ballons sondes.

Säntis-Belchen.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Střed
Teplá anticyklona	(0·58)	—	+ 0·09	0·38	0·33	0·38	0·44	0·37	0·39
Studená anticyklona	—	0·94	0·48	0·20	0·23	0·33	0·33	(0·77)	0·55

Z těchto tabulek vysvítá, že tepelné gradienty v studené anticykloně jsou ve větších výškách 2—3 *km* větší než v teplé anticykloně, a to největší v S sektoru; v teplé anticykloně v jižních sektorech velmi malé, v SW přibližující se k isothermii. V nižších niveau, $1^1/_2$—$2^1/_2$ *km*, gradienty v obou anticyklonách nejsou valně od sebe rozdílné; v studené v jižních sektorech nízké, v severních větší. V teplé anticykloně na přední straně — E sektor — jest inverse, tedy vzrůst teploty s výškou.

Na základě toho, co bylo uvedeno, možno přechod anticyklony, studené a teplé, přes Evropu vylíčiti následovně:

Studená anticyklona, když vstupuje na evropské západní břehy, jest velmi mělká, poměry tepelné v této nevykazují žádných nápadných úchylek navzájem, setkávají se totiž v této proudy bezprostředního jejího okolí z ne valně rozdílných šířek. V nepatrné výši nad anticyklonou setkáváme se se severním, mírně studeným proudem zádi cyklony. Při postupu tohoto systému na východ neb jihovýchod obor, z něhož cyklona přibírá vzduch, se rozšiřuje na šířky severnější, tedy teplota studeného proudu napájejícího anticyklonu klesá a mohutnost její roste do výše. Volí-li anticyklona dráhu jižnější, na př. k Alpám, tu ve většině případů nad těmito se zastaví a přechází v teplou. Volí-li dráhu severnější přes Severní a Baltické moře, tu postupuje téměř rovnoměrně dále a její poměry tepelné snad se nemění.

Anticyklona, která jako teplá přichází k evropským břehům, jest vyvinuta již do značných výší; na kontinentu samém, kde pohyby její jsou neurčité, nejvíce se otepli v středních výškách. Oteplení, jež jest největší asi ve výši $2^1/_2$ *km*, sahá do značné výšky a zmenšuje se s touto.

Tyto dva líčené typy anticyklony nejsou ojedinělé; již na začátku jsem uvedl, že anticyklony, jež se vyskytují v Evropě, mají všechny odstíny teploty od velkých záporných úchylek v studené anticykloně do mírných kladných v teplé anticykloně. Charakterisuje-li

teplota jistý stupeň vývoje, musíme doznati, že anticyklona má svůj život, že povstává, vyvíjí se, dosahuje vrcholu vývoje a odumírá.

Které momenty vývinu naznačují tyto dva, zde uvažované typy? Který představuje starší, vyvinutější typ? Jak jsem již zde v práci několikráte ukázal, podávají pozorování nejvyšší z uvažovaných observatoří, Sonnblicku, ten fakt, že studená anticyklona, která od NW v zádi cyklony táhne a nad Alpami se zastaví, přechází v teplou a že opačný případ se téměř nevyskytuje. K tomuto opačnému přejdu později. Jest tedy teplá anticyklona typ starší, vyvinutější, což potvrzuje i její mohutnost. Napadá tedy otázka, jakým způsobem se děje tato přeměna a jak tato souvisí s postupnou rychlostí a jejími změnami.

Představil bych si ten pochod asi následovně:

Přijmeme: 1. Že rychlost větru s výškou spojitě přibývá v cirkumpolárním víru všeobecné cirkulace. 2. Že v tomto víru se vytvoří — jakýmkoliv způsobem — vedlejší depresse tvaru V, o jisté mohutnosti, jež však nedosahuje až ku povrchu země. Tím poruší se tvar dříve rovnoběžných isobar. Tyto v libovolném niveau v mezích mohutnosti této depresse změní se tak, že od západu na východ se ku této V depressi sbíhají, od ní na východ se rozbíhají. Nechť tento satellit se pohybuje ve víru všeobecné cirkulace určitou rychlostí.

Jaké změny se tím vyvolají v zádi této putující depresse? Od onoho niveau vzhůru, kde rychlost postupu tohoto satellitu ve všeobecné cirkulaci atmosféry se rovná složce rychlosti větru v témže směru, vyvolá se tímto zdýmání vzduchu, jež má za následek klesající proudy; od téhož niveau až ku základně satellitu, zředění vzduchu. Toto zředění může býti z valné části kompensováno proudy shora, ale může býti i popudem ku lokálně výstupným proudům vzduchovým od povrchu země.*) Předpokládáme-li, že toto rozmezí zdýmání a zředění nalézá se blíže dolní základny satellitu, převládají tedy ve větší části jeho mohutnosti sestupné proudy nad výstupné. To se projeví zvětšením tlaku na povrchu země v zádi tohoto satellitu, t. j. vytvoří se anticyklona. Poněvadž proudové linie na zádi uvedeného satellitu mají všeobecně směr NW—SE, tedy proudy vzduchové, jež se nad anticyklonou zdýmají, pocházejí z vyšších šířek. Tyto proudy jsou proti průměrné teplotě okolí, do kterého přicházejí, studenější a i těžší,

*) Tyto lokální výstupné proudy mohou býti příčinou známého „špatného“ počasí — jež není podmíněno bouřkami — v anticyklonách poměrně nízkého tlaku.

což podobně přispívá ku zvýšení tlaku. Jest tedy dle zde líčeného myšlénkového postupu původ anticyklony podmíněn jak dynamicky, tak i thermicky; netvrdím stejným dílem, tu ta, tu ona příčina může převládati. Masy vzdušné, jež tuto mělkou, tvořící se anticyklonu nápájí, jsou studené.

Uvažujme nyní dva případy:

Nechť satellit, neměně intensitu, se pohybuje se stálou rychlostí. Tedy i není příčiny, proč by vytvořená anticyklona tlak ve středu měnila, tlak zůstává týž. Sesílení postupné rychlosti aneb seslabení intensity satellitu má za následek rozpouštění anticyklony. Poněvadž změna v intensitě satellitu se vymyká našemu přímému pozorování, zbývá nám zde jen vztah mezi rychlostí tohoto (jenž jest přibližně roven rychlosti anticyklony) a změnou tlaku ve středu anticyklony,*) již možno zkoušeti na základě synoptických map.

Představme si, že postupná rychlost tohoto satellitu se zvolňuje, až se zastaví. Jaké jsou následky? Základna oné vrstvy, v níž převládá zdýmání vzduchu, sestupuje do nižších niveau. Vrstva výstupných proudů se seslabuje. Sestupné proudy rozpouští v niveau kondensačním vrstvy oblaků, zastaví srážky, vyjasní oblohu. Takto tvořící se anticyklona na povrchu země — jež jest zprvu velmi mělká — se tímto sesiluje. Poněvadž zdýmání studených proudů jest příčinou, anticyklona sama pak následek, musí vyvinování se této vzhůru a postranný odtok z ní býti pozadu za dodávkou vzduchu, t. j. ve středu takovéto anticyklony, zvolňující svoji postupnou rychlost, tlak roste. Anticyklona rychle vyvinuje se vzhůru, její mohutnost roste tak dlouho a do té výše, až přítok shora se rovná postrannímu odtoku. Když se anticyklona zastaví, t. j. když sestupné proudy dosáhnou povrchu

*) V jedné z mých prací, v *Monthly Weather Review, 32*, p. 562—565, 1904, pokusil jsem se podati vztah mezi postupnou rychlostí cyklon a tlakem v středu těchto, načež poukazuji; týž jest v pěkné shodě s touto úvahou. — Přijmeme-li existenci zde uvažovaného satellitu vyšších vrstev, jenž jest původem a jenž udržuje dvojici vírů, cyklony a anticyklony, můžeme si představiti, jak jest to možné, že tyto víry našich šířek mohou přestupovati hřebeny horské. Neboť i když proudy víru takového na povrchu země vlivem hor se ruší, mohou tyto býti na druhé straně pohoří vlivem satellitu vyšších vrstev zase restaurovány. Tak Loomis tvrdil, že výše amerických cyklon sotva dosahuje výše Mt. Washingtonu (1900 *m*), Bigelow dle nejnovějších měření oblaků odhaduje výši cyklon na 3—5 *km*. Než Hann poznamenává, že to všeobecné platiti nemůže, poněvadž depresse barometrické velmi často překročují *Rocky Mountains*, že tedy sídlo, zdroj těchto vírů leží v mnohem vyšších niveau, jistě nad 4 *km*. Viz Hann: Lehrbuch der Meteorologie. 1. vydání pp. 504 a 538 (pod čarou).

země, jest anticyklona vyvinutou, dříve stoupající tlak zůstává přibližně na téže výši neb neurčitě kolísá, což závisí od změny intensity uvažovaného satellitu.

Jde o to, ukázati, že tato theoretická úvaha se kryje s pozorováním, t. j.:

1. V anticykloně, která se pohybuje na východ se zvolňující rychlostí a přechází ve stacionární, tlak vzrůstá s ubývající postupnou rychlostí této a dosahuje maxima, když se anticyklona zastaví, načež tlak více méně neurčitě kolísá.

2. V tom případě, když se anticyklona pohybuje se značnou, více méně proměnlivou rychlostí, že i tlak ve středu jejím více méně *neurčitě* se mění a průměrný tlak ve středu rychlé anticyklony zůstává níže než v stacionární anticykloně.

Tyto věty nalézají ve skutečnosti dobré potvrzení. Uvádím zde řadu příkladů, jež vyhovují větě sub 1. Pomlčkou označuji dobu, kdy záporná úchylka teploty přechází v kladnou, změny tlaku ve středu anticyklony jsou dány ode dne ke dni v *mm.*, kladné znamení označuje stoupání tlaku, záporné klesání. Zároveň udávám okamžitou polohu středu anticyklony.

Únor 21.—24. 1887.
Biarritz, Gries, Ischl — Bregenz 767·6, +1·5, +3·4, — +3·1.

Únor 13.—17. 1891.
Brest, Wiesbaden, Celovec — Bregenz 774·6, +7·3, +1·7, — —4·6.

Únor 26.—2. březen 1887.
Paříž, Grünberg, Praha, Salzburg —
Ischl 775·5, +7·6, —0·5, —3·2, — —1·2.

Prosinec 31. 1887 — 3. leden 1888.
Bregenz, Celovec, Ungvar — Ungvar 770·1, +0·7, +1·6, — —1·2.

Prosinec 17.—22. 1891.
Norwich, Oxö, Münster, Chemnitz,
Krakov — Ischl 772·6, +7·0, +1.3, +0·7, +1·4, — +0·8.

Prosinec 20.—24. 1898.
Scily, Rochespoint, Ischl, Ischl —
Hermannstadt 774·7, +1·0, +1·7, +1·8, — +3·4.

Z těchto příkladů jest patrno, že se zvolněním postupné rychlosti souvisí i vzrost tlaku ve středu anticyklony.

Dále uvádím řadu příkladů, jež odpovídají větě sub 2, t. j. některé studené, rychlé anticyklony táhnoucí přes střední Evropu. Udá-

vám změnu tlaku ve středu anticyklony ode dne ke dni a okamžitou polohu středu, čímž jasně vynikne postupná rychlost anticyklony.

Leden 30.—2. únor 1890.
Brest, Brest, Chemnitz, Hermannstadt 776·4, —3·3, +3·7, —1·3.
Leden 13.—16. 1905.
Clermont, Kodaň, Riga, Smolensk, Tammerfors 774·7, +5·3, +3·4, +0·4, —4·4.
Únor 24.—27. 1901.
St. Mathieu, Clermont, Neumarkt Stm., Sulina 767·7, —4·4, +6·5, +3·8.
Únor 4.—6. 1902.
Stornoway, Arvavaralja, Kijev 770·2, —1·1, +2·7.
Březen 2.—4. 1890.
Oxö, Mullaghmore, Celovec 773·6, +3·4, —2·7.
Říjen 21.—24. 1887.
Mullaghmore, Vlissingen, Celovec, Odessa 775·7, +1·3, +0·4, —5·8.
Říjen 26.—28. 1887.
Wiesbaden, Krakov, Kijev 776·5, +0·5, —3·6.
Listopad 12.—14. 1887.
Mullaghmore, Mnichov, Bukarest 767·8, +1·7, —2·9.
Listopad 26.—27. 1897.
Vlissingen, Hermannstadt 777·3, —0·4.
Prosinec 8.—10. 1892.
Rochespoint, Ischl, Bukarest (?) 707·0 (?), 769·1, 766·8 (?).

Tato serie rychlých studených anticyklon nevykazuje žádné nápadné jednostranné změny v tlaku ode dne ke dni. U neobyčejně rychlých vidíme ubývání tlaku ve středu. Tlak ve středu, u těchto rychlých anticyklon, nevykazuje žádných vysokých hodnot.

U putující studené anticyklony chladné proudy na její levé straně — tedy všeobecně se složkou od severu — mohou míti rychlost větší, menší neb rovnou postupné rychlosti anticyklony. V případě druhém a třetím nemohou se tyto proudy zúčastniti na anticyklonálním proudění valnou měrou. Plynou horizontálně sebou, paralelně s dráhou anticyklony, valně se v pravo nestáčejíce (jak jsem ukázal na Sněžce), nahražujíce nepatrný postranný odtok z mělké, studené anticyklony. Klesají sice tak se ohřívajíce, než toto oteplování jest při každém kroku dále na východ kompensováno dodávkou studenějších mas ze severnějších šířek, tak že teplota mělkého tělesa anticyklony zůstává pod průměrnou teplotou všech bladin těch míst, kudy táhne.

Zastavuje-li se takováto anticyklona, dostavuje se ve středu i větší tlak dle způsobu již vyloženého; studené proudy vzduchové, nabyvše tak relativně větší rychlosti vůči středu anticyklony, mohou na anticyklonálních drahách s menší křivostí sestupovati do nižších hladin. Poněvadž všeobecně možno předpokládati, že tepelný gradient s výškou v těchto studených proudech jest rozdílný a pro nižší vrstvy menší než adiabatický, musí se tyto studené masy klesajíce ohřívati a tím i celé těleso anticyklony. Tímto postupným vytvářením teplé anticyklony, jímž rozumím vzrůstání její kolmé mohutnosti, posunuje se i základna severních proudů ji vyživujících do vyšších a vyšších niveau, tedy do potencielně teplejších vrstev. Onen proud, jenž v studené anticykloně na její přední straně plyne jako velmi studený — poněvadž sestupuje z nižších hladin — musí v teplé anticykloně se jeviti jako mírně teplý neb mírně chladný. Poněvadž pak v případě teplé anticyklony sestupuje se značnějších výšek, musí i jeho šroubovité stáčení při sestupu uraziti větší dráhu. To souhlasí s výsledky pozorování a jeví se tím, že obor nejmenší kladné úchylky teploty v teplé anticykloně jest posunut vpřed ve směru proudu vůči oboru nejnižší teploty v studené anticykloně, jak jsem ukázal v hladině Sonnblicku a Obiru. Z této úvahy plyne dále, že ono seskupení větrů, jež nalézáme na př. na Sonnblicku v studené anticykloně, nalezneme i v teplé ale v značnějších výších nad Sonnblickem.

Možno si tyto poměry schematicky představiti také následovně:

Omezíme-li těleso anticyklony kolmým válcem jdoucím jeho isobarou 760 *mm* v niveau moře, jest anticyklona „nahoře" omezena šikmou „plochou", sklánějící se od kvadrantu SW ku NE, nad touto plynou proudy od NW ku SE, jež tvoří studenou, zadní stranu cyklony. Průměrná výška této omezující plochy jest nejníže ve vytvářející se studené anticykloně, poněvadž střed této anticyklony v niveau moře není valně vzdálen od středu cyklony před ní putující, s níž jest úzce spojena. Přechází-li studená anticyklona v teplou, t. j. osamostatňuje-li se tato zdánlivě, posunuje se i tato hořejší „mezná plocha" do vyšších hladin a v niveau moře vzdalují se i středy uvedené cyklony od této anticyklony. Oba tyto útvary, cyklonu a anticyklonu, nelze od sebe děliti, v značnějších výších jeden překládá druhý a proto myslím, že jest dosti obtížné vésti o tom spor, zda anticyklona či cyklona jest vyšší. (Viz „Dodatek" druhého vydání zde již zmíněné Hannovy učebnice.)

Celý tento zde líčený process snažil jsem se vysvětliti na základě jednoduchého předpokladu uvedených 2 vět o změně rychlosti

větru s výškou a o existenci satellitu. Zkušenost ukazuje, že ve skutečnosti nezřídka vyskytují se případy anticyklon, jež v proměnách svých neodpovídají myšlenkovému pochodu odvozenému z těchto předpokladů. Musíme uznati, že i postupující satellit mění svoji intensitu, jež může býti v první řadě závislou od jeho postupné rychlosti v cirkumpolárním víru, na př. tak, že seslabení jeho jest následkem zmenšení jeho postupné rychlosti a naopak. Vyhovuje sice převalná většina evropských anticyklon tomu roztřídění, jak jsem uvedl na začátku práce, t. j. anticyklony teplé, anticyklony studené a anticyklony studené jež přecházejí v teplé, než vyskytují se od toho úchylky, zvláště následující: Mírně teplé větry na Sonnblicku v oboru anticyklony přecházejí po většině velmi rychle na kratší neb delší dobu v proudy neobyčejně studené. Případ tento se přihází obyčejně, když teplá anticyklona se posune ze střední Evropy do Ruska, neb vůbec na sever tak, že na Sonnblicku zavanou větry ze sektorů E až S. Soudím, že tyto větry — ač Sonnblick tou dobou protíná isobara vysokého tlaku — nejsou anticyklonálního původu, ale že jsou pravděpodobně jakýmisi obvodovými větry, jež pochodí ze Sibiře a přišedše ve styk s větry okraje anticyklony jsou těmito strženy. Že větry od anticyklony vytékající nemusí býti původu anticyklonálního, ale že mohou putovati po dlouhých drahách, aniž by zase vtékaly do cyklony, na to poukázal nejnověji Shaw*) ve své velké práci o trajektoriích drah větrů v cyklonách a anticyklonách na základě anemometrických pozorování.

Ukončiv tímto diskussi výsledků z dat horských observatoří, přecházím k výsledkům získaným výstupy draků, dračích ballonů, ballonů s mužstvem a ballons sondes, tedy vůbec k datům z volné atmosféry. První 3 druhy dat sloučil jsem dohromady, data z ballons sondes pojednal jsem zvláště. Číselný materiál vůbec není hojný, převalná část jeho jest práce německá, t. j. výstupy draků v observatoři Tegelské a nyní v Lindenbergu u Berlína. Spracování materiálu podobným způsobem jako u horských observatoří nebylo možno, užil jsem zde rozdělení na osm sektorů bez ohledu na stupně tlakové a u sporého materialu ballons sondes pouze čtyry kvadranty N, E, S a W a to pro letní a zimní pololetí.

*) W. N. Shaw: The life history of surface air currents. A study of the surface trajectories of moving air. London 1906.

Z meteorologických elementů uvádím pouze teplotu pro první i pro druhou skupinu materiálu. Teplota pro první skupinu jest dána v úchylkách od průměrné teploty.*) Tuto jsem si odvodil z tabulek uveřejněných Bersonem v úvodu ročníků 1903, 1904 a 1905 aeronautické observatoře Tegelské a Lindenbergské a to od 500 ku 500 metrům až do výše 3500 metrů. Průměrné hodnoty, počínaje 500 *m* n. m. až do 3500 *m* n. m. jsou následující:

	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500
Zimní pololetí	+ 1·4	+ 0·0	— 1·5	— 3·0	— 4·8	— 7·4	— 11·6
Letní pololetí	+ 11·3	+ 8·8	+ 5·7	+ 3·3	+ 1·5	— 0·4	— 2·0

Data teploty z volné atmosféry postupem od sektoru ku sektoru jsou v dobré shodě s oněmi odvozenými z horských observatoří, nápadným však je to, srovnáváme-li stejné výšky v horách a ve volné atmosféře, že úchylky teploty v případě prvém jsou značně větší, zvláště ve smyslu záporném, než ve volné atmosféře. Hlavní příčina toho jest, že data ve volné atmosféře vztahují se na dobu okolo poledne (v kteréžto době ponejvíce se konají výstupy draků), data horská však na přibližně sedmou hodinu ranní. Dále data z horských observatoří i kdyby se vztahovala na tutéž hodinu jako výstupy ve volné atmosféře, vykazovala by zajisté nějaký rozdíl; vždyť proudy, jež proti horským hřebenům vanou ochlazují a oteplují se jinak než proudy volné atmosféry.

V studené anticykloně největší záporné úchylky jsou v SE a S ve vyšších hladinách, ony v sektoru NW jsou slabě kladné. V průměru vzrůstá záporná úchylka s výškou a zůstává v hladinách 2500 až 3500 metrů téměř stálou. V teplé anticykloně jest sektor NW nejteplejší — jako v horách. Sektor nejmenší kladné úchylky nebylo možno vyšetřiti, jsou případy sektorů SE, S a SW ojedinělé. Při tvoření celkového průměru jsem také tyto vynechal, omeziv se na N, NE, E, W a SW. Vypadne tedy průměr kladné úchylky něco větší než ve skutečnosti. I zde jest patrným přibývání kladné úchylky s výškou jako v horách, než největší kladná úchylka není ve výši Säntisu, ale sahá do vyšších hladin.

*) Tabulky podávám vzadu na konci práce.

Smíme-li úchylky výše 3000 a 3500 *m* považovati za přibližně správné, poukazovalo by to k tomu, že vrstva největší kladné úchylky v teplých stacionárních anticyklonách kolísá v průběhu denním s výškou a to tak, že o polednách jest vyšší než časně z rána, anebo že tato inversní vrstva u anticyklon severnějších šířek (Německo) leží výše než u oněch nad Alpami; možným jest i obojí.

V letním pololetí jak v studené tak i v teplé anticykloně jest sektor NW nejteplejší, zcela analogicky jako v horách. Průměrné hodnoty pro všechny sektory v létě a to jak v teplé tak i v studené anticykloně vykazují postupné ubývání úchylky s výškou od povrchu země. Nejsou tedy ve shodě s poměry zimního pololetí. Příčina toho leží asi v jich nepatrné váze od výše 1 *km* počínaje.

Výsledky ze záznamů ballons sondes.*) Jakousi cenu mají zde pouze data týkající se teplé anticyklony a to opět zimní a zde zase W kvadrant (průměr z 20 záznamů). Tato data teploty jsou opět udána v úchylkách od průměrné teploty s výškou. Průměrnou teplotu odvodil jsem z tabulky VI. v práci Hannově: (Ueber die Temperaturabnahme mit der Höhe bis zu 10 *km* nach den Ergebnissen der internationalen Ballonaufstiege. Wiener Sitzungsberichte. 1904) při předpokladu, že průměrná teplota ve volné atmosféře se rovná průměru teploty v cykloně a anticykloně. Teploty pro postupné kilometry, počínaje výškou 1 *km* až do 10 *km* včetně jsou tyto:

Zimní pololetí	+ 2·4	— 1·4	— 6·3	— 12·5	— 18·9	— 25·8
Letní pololetí	+ 9·6	+ 4·3	— 0·6	— 5.9	— 12·0	— 18·7

Zimní pololetí	— 32·7	— 39·2	— 45·6	— 51·3
Letní pololetí	— 25·4	— 31·8	— 39·0	— 45·4

Tabulka pro teplou anticyklonu v zimě ukazuje, že kladná úchylka sahá v N sektoru do výše $7^1/_2$ *km*, ve W sektoru až do výše 10 *km*; s čímž se i hrubě shoduje výpočet, jenž jsem dříve uvedl. I zde, ve W sektoru jest největší kladná úchylka ve výši asi 2—3 *km*, ne tak v sektoru S, než týž jest zastoupen jediným výstupem. Váha sektoru N jest pro výšky 3 až 4 *km* rovna 4, pro 1,

*) Tabulky uvádím vzadu na konci práce.

2 a 5 *km* rovna 3, pro 6 a 7 *km* je rovna 2, a pro ostatní 1. V létě, kdy opět největší váha připadá na W sektor — výstupy pařížských a strassburských ballons sondes převládají — přechází kladná úchylka v zápornou ve výších 8, 9 až 10 *km*. O studené anticykloně nelze činiti žádných závěrů, data studené anticyklony v létě v E a S kvadrantech si odporují a v zimě S a W sektor jest zastoupen jediným příkladem.

Jest věru škoda, že bohatý materiál — přes 500 výstupů ballons sondes od Teisserenca de Borta — není in extenso uveřejněn, bylo by možno z něho touto cestou získati cennější výsledky o mohutnosti teplých a studených anticyklon a tak přispěti aspoň z části ku objasnění dlouho vlekoucího se sporu o původu cyklon a anticyklon, kde mezi meteorology americkými a anglickými na jedné straně a evropskými s Hannem v čele na druhé straně stojí naproti sobě theorie téměř diagonální.

Přehled.

Studium meteorologických poměrů vyšších vrstev atmosféry v anticyklonách podává, že v těchto (ve střední Evropě) dlužno rozeznávati postupná stadia vývoje, jež vedle ostatních meteorologických elementů nejnápadněji jsou charakterisovány poměry tepelnými a poměry proudů vzdušných.

Máme-li zřetele k tepelným poměrům, jež charakterisují rozličné stupně vývoje v anticykloně, možno všeobecně anticyklony rozděliti na studené a teplé.

Studenou anticyklonou určité geografické polohy rozumíme onu anticyklonu, jejíž průměrná teplota v jakékoliv její výši jest nižší než průměrná teplota tohoto místa v uvažované době roku. Analogickou je definice anticyklony teplé.

Studená anticyklona představuje mladší, vyvíjející se typ anticyklony; teplá anticyklona typ starší, vyvinutý.

Studená anticyklona:

Poměry větrné: Nejsilnější stáčení větrů s výškou vykazuje sektor NW, menší W a N pak NE. V niveau Sonnblicku převládá v celé NW polovině vtékající proud. Poměry tepelné: Přední strana, jež jest studenější než zadní, představuje jediný, neobyčejně studený proud, jenž plyna z vyšších hladin severních sektorů na jih, klesá a roztéká se, vytékaje z části na přední straně anticyklony, z části stáčeje se v pravo.

Poměry oblačnosti a vlhkosti: Přední strana vykazuje větší vlhkost a oblačnost než strana zadní.

Studená anticyklona na postupu Evropou prodělává tu změnu, že její mohutnost roste do výše a teplota v každém niveau klesá, a to nejsilněji v jižních sektorech.

Teplá anticyklona:

Poměry větrné: Stáčení větrů s výškou jest v NW polovici mnohem zvolnější než u studené anticyklony. Poloha středu anticyklony (nejvyššího tlaku) posunuje se na západ s rostoucí výškou. Na Sonnblicku jest systém anticyklonálních větrů zachován, vyjma v sektorech W a z části NW, kde převládají větry vtékající ku oboru nejvyššího tlaku.

Mohutnost teplé anticyklony jest větší nežli ona studené.

Poměry tepelné: Zadní strana anticyklony jest teplejší než přední. V této přední části možno sledovati obor nejmenší kladné úchylky, jež v nižších niveau přechází v zápornou, od hladiny ku hladině. I zde možno tento obor malé kladné až záporné úchylky v postupných hladinách vysvětliti tímže studeným proudem jako v studené anticykloně; vyšší jeho teplota vysvětluje se tím, že klesá ze značnějších výšek a otepluje se. Největší kladné úchylky nalézají se asi ve výši 2—$2^1/_2$ *km* n. m., od tohoto niveau jak dolů, tak i vzhůru obnos kladných úchylek se zmenšuje. Kladné úchylky teploty v teplé anticykloně sáhají v zimě asi do výše 8 *km*, a to na zadní straně (W) asi výše, než na přední (E).

Poměry oblačnosti a vlhkosti. Přední strara vykazuje větší vlhkost i oblačnost než zadní strana. Hodnoty oblačnosti a vlhkosti jsou vůbec menší než v studené anticykloně.

Teplá anticyklona na postupu Evropou prodělává tu změnu, že její mohutnost poněkud se zvětší a že teplota v každém niveau (vyšších hladin) mírně vzrůstá.

Rychlost postupného přechodu od jednoho stadia vývinu k následujícímu, t. j. od studené ku teplé není ve všech anticyklonách tatáž, tu rychlejší, tu zvolnější a jest v patrné souvislosti se změnami v postupné rychlosti anticyklony.

Rychle postupující studené anticyklony zůstávají studené a mělké, neseslabí-li valně rychlost postupu.

Studená anticyklona, jež se rychle zastaví, vzrůstá do výše a přechází v teplou.

Původ každé putující anticyklony našich šířek jest asi nejen dynamický, t. j. zdýmání vzduchu, ale i ve valné míře thermický

(následek váhy studených těžkých severních proudů). Postupným vývinem anticyklony ustupuje thermický moment vždy víc a více do pozadí a převládá vesměs dynamický.

Doslov.

Nemohu zakončiti, aniž bych se nedotkl několika slovy důležitého, již zmíněného sporu o tepelných poměrech cyklon a anticyklon mezi americkými a anglickými meteorology na jedné straně a evropskými na druhé.

Hann a Dechevrens, dle pozorování v horách, Teisserenc de Bort a Berson dle výstupů balłonů nalezli, že vzduch nad cyklonami jest v průměru studenější než nad anticyklonami. Hann z toho soudil, že původ obou těchto vírů není dlužno hledati — jako Ferrel — v rozdílech teploty, ale v dynamických vlivech na, př. ve všeobecné cirkulaci atmosféry.

Naproti tomu stojí meteorologové američtí a angličtí: Harrington a Hazen dle pozorování na horských observatořích (Mt. Washington N. H. v Spoj. Státech), nověji jmenovitě Clayton, pak Rotch, Shaw a Dines dle pozorování draků ukázali pravý opak: cyklony jsou teplejší, anticyklony jsou studenější než průměrná teplota vzduchu a to rozdíl jest velmi výrazný.

Naskytá se přirozeně otázka, co jest asi příčinou tohoto rozdílu a jak bychom mohli hlouběji vniknouti ku řešení, vedoucímu k výsledkům, jež by byly jakýmsi dohodnutím mezi oběma theoriemi, t. j. dynamickou (Hann) a konvekční (Clayton)?

Můj náhled jest následující:

Soudím, že vliv postupné rychlosti cyklon a anticyklon na jich tepelné poměry byl dosud valně, ne-li docela, zanedbán. Srovnávajíce tepelné poměry rychle putujících amerických anticyklon se stacionárními evropskými, srovnáváme tu dvě rozdílná stadia vývoje, a proto také výsledky obou stran si odporují.

Z materiálu v této práci diskutovaného jsem ukázal, že anticyklona prodělává svůj vývoj, že přechází od rychlé, neobyčejně studené — v tom případě, když se zastaví — v teplou. Pro studenou přijal jsem možnost výkladu dynamického a snad v stejné míře i thermického, u teplé však thermický vliv zdá se býti vyloučen.

Americké anticyklony — jak pozorování ukazují — jsou po většině rychlé, studené a mělké. Jich postupná rychlost na zádi cy-

klon přes americký kontinent neobyčejně převyšuje postupnou rychlost studených evropských anticyklon, není tedy u amerických anticyklon možno, aby se vzhůru vyvinuly.

V době, když opouští americký kontinent v Nové Anglii, nedosahují ani do výše Mt. Washingtonu a jejich vliv na proudy řasových oblaků dle Claytona jest velmi malý. (Viz Hannova již zmíněná učebnice, 1. vydání p. 523, fig. 67.)

Poněvadž ale tlak v jich středu jest v průměru vyšší než u rychlých studených evropských anticyklon, soudím, že dynamická příčina v americké anticykloně ustupuje proti thermické značně do pozadí, že tedy původ americké anticyklony dlužno hlavně hledati ve váze těžkých studených mas vzduchu.

Tedy analogie zde jest: Tepelné poměry amerických anticyklon odpovídají tepelným poměrům studených, rychlých evropských anticyklon.

Naskytá se dále otázka: Má i Amerika jako Evropa stacionární, teplé anticyklony? Ano, než tyto se vyskytují velmi zřídka a Hann*) sám z několika případů ukázal, že stacionární anticyklony, vyskytující se v zimě v okolí *Pikes Peaku* na východním svahu *Rocky Mountains* jsou skutečně teplé. Jiný případ amerických stacionárních anticyklon, zajisté teplých, jest na východním pobřeží v středních Atlantických státech, jež vyskytuje se v pozdním podzimku a vyvolává teplé, příjemné počasí zvané „Indiánským létem". Tyto stacionární anticyklony nebyly vůbec ještě studovány, a není pochyby, že tyto budou asi úplnou analogií stacionárních anticyklon nad Alpami, jako výše uvedené případy anticyklon na *Pikes Peaku.*

Poněvadž cyklonu nelze děliti od anticyklony, naskytá se i maně otázka: Neprodělává i cyklona při svém vývoji tepelné změny, jež jsou snad protiznačné a opačné co do obnosu oněm v anticyklonách? To jest na př. od silně teplých ku mírně studeným? Tak že při vyvíjejících se a rychle postupujících cykloně a anticykloně by stály proti sobě teplá cyklona a studená anticyklona, jak na to poukazují práce americké; při vyvinutých útvarech obou těchto vírů studená cyklona a teplá anticyklona, jak na to poukazují pozorování v Evropě?

Ku podrobnějšímu řešení tohoto sporu jest nutno studovati stacionární americké anticyklony a prozkoumati tepelné poměry cyklon se zřetelem k jich postupné rychlosti, jak to zde. v této práci, bylo provedeno s anticyklonami.

---

*) Meteorologische Zeitschrift. Ročník 1898, p. 58.

Sonnblick. (Zimní pololetí.)

Studená anticyklona. — **Teplá anticyklona.**

Váha.

	Studená anticyklona.								Teplá anticyklona.							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	-	2	—	1	1	—	—	—	—	5	1	8	6	6	9
780—775	—	—	4	6	5	10	1	—	—	1	20	8	19	19	20	23
775—770	—	3	9	12	10	18	9	—	1	4	20	17	6	15	35	17
770—765	—	1	14	12	4	9	5	1	1	—	4	8	9	4	21	9
765—760	1	1	1	—	1	1	2	—	1	—	—	1	2	2	3	2

Tlak (500 *mm* +).

	Studená anticyklona.								Teplá anticyklona.							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	17·6	—	18 2	21·2	—	—	—	—	28·3	33·2	28·9	27·2	30·0	31·0
780—775	—	—	17·3	17·0	17·5	19·0	25·3	—	—	26·6	26·2	25·6	26·0	26·9	25·8	27·0
775—770	—	12·3	16·6	16·8	14·4	16·9	19·2	—	23·6	25·0	23·8	23·0	24·7	24·1	24·3	24·3
770—765	—	11·4	13·7	13·0	12·6	12·1	16·1	12·2	22·0	—	23·0	22·2	21·9	23·1	23·7	22·9
765—760	16·4	10·2	13·4	—	02·4	12·7	11·3	—	19·8	—	—	15·9	16·3	15·7	18·1	18·7

Úchylka teploty (od —11·2°).

	Studená anticyklona.								Teplá anticyklona.							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	— 13·0	—	— 14·2	— 9·8	—	—	—	—	+ 3·0	+ 10·2	+ 3·2	+ 1·6	+ 5·2	+ 6·0
780—775	—	—	- 11·0	— 12·3	— 9·0	— 8·2	+ 0·4	—	—	+ 6·0	+ 4·1	+ 3·1	+ 3·3	+ 4·2	+ 3·8	+ 4·4
775—770	—	— 13·0	— 8·3	— 7·5	— 10·2	— 7·8	— 3·9	—	+ 3.7	+ 3·5	+ 4·6	+ 2·7	+ 4·5	+ 4·6	+ 3·9	+ 3·9
770—765	—	— 10·6	— 8·1	— 7·5	— 10·9	— 7·7	— 1·7	— 6·4	+ 4·2	—	+ 5·9	+ 5·6	+ 4·6	+ 7·1	+ 7·0	+ 5·9
765—760	+ 3·8	— 8·9	— 2·2	—	— 19·0	— 6·0	— 3·6	—	+ 4·7	—	—	+ 0·2	— 0·6	— 0·4	+ 4·3	+ 4·1

Sonnblick. (Zimní pololetí.)

Relativní vlhkost.

	Studená anticyklona.								Teplá anticyklona.							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	83	—	90	90	—	—	—	—	69	26	62	49	22	43
780—775	—	—	87	93	79	80	80	—	—	20	63	55	53	59	45	54
775—770	—	86	90	87	78	84	74	—	44	78	63	62	53	50	61	66
770—765	—	90	90	90	94	88	92	92	58	—	80	75	67	51	64	75
765—760	26	83	79	—	85	83	100	—	39	—	—	100	62	38	60	57

Oblačnost.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	10	—	4	0	—	—	—	—	6	0	3	1	0	1
780—775	—	—	7	9	2	4	4	—	—	0	4	3	2	2	1	2
775—770	—	7	8	7	5	4	1	—	1	2	5	3	2	1	2	1
770—765	—	1	8	8	7	6	7	0	2	—	7	3	3	4	3	5
765—760	0	7	0	—	10	2	10	—	7	—	—	3	7	3	5	2

Vítr. (Směr a rychlost m. p. s.)

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	N 14 E 6·7	—	E 10·5	E 68 S 5·5	—	—	—	—	N 38 E 8·9	N 45 E 5·5	N 18 E 5·5	N 14 E 5·4	E 4 S 1·6	W 61 N 2·7
780—775	—	—	N 59 E 6·0	N 32 E 13·4	N 47 E 7·3	N 55 E 6·1	S 45 W 3·5	—	—	N 45 E 5·5	W 79 N 8·9	N 31 E 9·9	N 19 E 5·7	N 16 E 4·1	N 26 E 2·5	W 79 N 0·5
775—770	—	W 85 N 8·7	W 67 N 6·8	N 12 E 9·7	N 25 E 7·2	N 61 E 2·5	S 38 W 2·2	—	S 45 W 8·0	W 62 N 3·5	W 72 N 10·0	N 22 E 10·4	N 77 E 4·2	N 2 E 5·2	S 34 W 3·1	W 25 N 2·5
770—765	—	S 45 W 22·5	W 85 N 6·4	W 89 N 8·3	W 48 N 6·5	E 73 S 5·0	S 34 W 6·6	W 68 N 10·5	S 45 W 2·0	—	W 79 N 12·1	N 16 E 2·5	N 57 E 2·0	N 45 E 2·0	S 49 W 3·9	S 70 W 5·6
765—760	W 23 N 22·5	W 68 N 3·5	W 68 N 3·5	—	N 68 E 16·5	E 28 S 3·5	S 38 W 12·1	—	S 68 W 5·5	—	—	N 68 E 10·5	W 75 N 7·5	N 4·5	S 68 W 5·1	S 61 W 5·7

Pic du Midi. (Zimní pololetí.)

Studená anticyklona. **Teplá anticyklona.**

Váha.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
780—775	—	—	—	2	4	1	—	—	—	—	—	—	3	21	9	—
775—770	—	—	—	3	6	13	4	—	—	—	—	—	5	42	45	—
770—765	—	—	—	5	6	11	2	—	—	—	—	—	9	19	31	—
765—760	—	—	—	—	1	8	3	—	—	—	—	—	4	8	10	1

Tlak. (500 mm +).

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	E	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	48.6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
780—775	—	—	—	41·8	43·2	45·6	—	—	—	—	—	—	46·0	47·2	46·7	—
775—770	—	—	—	39·5	41·8	41·5	40·9	—	—	—	—	—	44·5	44·4	44·2	—
770—765	—	—	—	35·5	37·8	38·6	35·7	—	—	—	—	—	42·6	42·7	41·6	—
765—760	—	—	—	—	35·3	35·3	37·2	—	—	—	—	—	33·0	38·8	40·1	45·7

Úchylka teploty (od $-6{\cdot}8^0$.)

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	− 3·4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
780—775	—	—	—	− 4·8	− 3·6	+ 2·7	—	—	—	—	—	—	+ 0·4	+ 3·4	+ 3·7	—
775—770	—	—	—	− 5·1	+ 1·5	− 0·6	− 0·7	—	—	—	—	—	+ 1·7	+ 4·0	+ 3·4	—
770—765	—	—	—	− 6·8	− 1·7	+ 0·9	− 6·2	—	—	—	—	—	+ 5·4	+ 5·3	+ 5·0	—
765—760	—	—	—	—	− 3·2	+ 1·6	+ 3·2	—	—	—	—	—	− 6·0	+ 3·0	+ 4·9	+ 18·6

Pic du Midi. (Zimní pololetí.)

Relativní vlhkost.

	Studená anticyklona.								Teplá antiklona.							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
780—775	—	—	—	8	69	—	—	—	—	—	—	—	45	29	40	—
775—770	—	—	—	55	42	36	52	—	—	—	—	—	29	34	47	—
770—765	—	—	—	41	56	61	61	—	—	—	—	—	53	34	36	—
765—760	—	—	—	—	—	82	66	—	—	—	—	—	76	61	63	54

Oblačnost.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
780—775	—	—	—	0	3	—	—	—	—	—	—	—	0	0	1	—
775—770	—	—	—	1	2	1	3	—	—	—	—	—	0	2	2	—
770—765	—	—	—	2	2	3	2	—	—	—	—	—	3	2	1	—
765—760	—	—	—	—	0	4	5	—	—	—	—	—	0	4	4	7

Vítr. (Směr a rychlost m. p. s.)

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	N 45 E 5·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
780—775	—	—	—	N 45 E 3·0	N 22 E 2·7	N 1·5	—	—	—	—	—	—	N 66 E 1·8	N 88 E 1·3	N 34 E 0·7	—
775—770	—	—	—	N 11 E 4·2	N 20 E 1·9	N 43 E 2·1	N 8 E 1·6	—	—	—	—	—	S 3 W 0·8	N 14 E 0·0	E 54 S 0·6	—
770—765	—	—	—	N 56 E 2·5	N 23 E 4·3	N 8 E 1·6	N 10 E 3·1	—	—	—	—	—	E 84 S 0·5	W 0·8	E 81 S 0·5	—
765—760	—	—	—	—	N 45 E 1·5	W 19 N 2·7	W 13 N 2·8	—	—	—	—	—	N 25 E 4·2	S 36 W 1·2	S 54 W 2·9	W 3·0

Säntis. (Zimní pololetí.)

Studená anticyklona. — Teplá anticyklona.

Váha.

	Studená anticyklona								Teplá anticyklona							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	8	—	1	2	—	—	—	—	1	—	—	2	18	—
780—775	—	—	5	4	3	5	3	—	—	—	6	10	1	3	80	3
775—770	—	3	7	6	10	14	16	1	—	—	5	14	6	16	85	6
770—765	—	—	8	10	6	11	14	—	1	—	2	6	6	13	31	7
765—760	—	—	1	1	2	3	6	2	1	—	—	2	—	4	5	3

Tlak. (500 *mm* +).

	Studená anticyklona								Teplá anticyklona							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	66·7	—	62·8	63·9	—	—	—	—	74·4	—	—	72·3	72·6	—
780—775	—	—	64·6	65·1	64·3	65·6	65·5	—	—	—	70·3	70·6	72·0	71·1	70·1	71·8
775—770	—	60·2	62·0	63·5	61·6	60·9	61·8	59·5	—	—	67·2	66·8	67·2	66·8	67·5	68·5
770—765	—	—	59·0	57·9	59·0	58·2	58·6	—	67·5	—	64·0	64·2	63·9	63·5	65·3	65·9
765—760	—	—	58·2	58·4	50·0	53·0	57·3	55·2	60·4	—	—	61·1	—	59·5	60·2	61·0

Úchylka teploty (od —6·7⁰).

	Studená anticyklona								Teplá anticyklona							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	— 10·5	—	— 14·1	— 8·5	—	—	—	—	+ 4·1	—	—	+ 4·4	+ 4·7	—
780—775	—	—	— 7·6	— 4·2	— 8·5	— 4·9	— 1·4	—	—	—	+ 3·3	+ 3·8	+ 6·9	+ 3·7	+ 4·0	+ 3·0
775—770	—	— 10·1	— 5·7	— 2·4	— 5·6	— 7·0	— 3·6	— 6·5	—	—	+ 4·4	+ 3·7	+ 5·1	+ 4·3	+ 5·0	+ 6·9
770—765	—	—	— 6·0	— 7·6	— 5·8	— 5·3	— 4·0	—	+ 9·7	—	+ 1·5	+ 4·0	+ 5·2	+ 4·5	+ 6·4	+ 8·2
765—760	—	—	— 2·9	— 1·3	— 12·0	— 5·8	— 2·4	— 8·5	+ 2·9	—	—	+ 2·0	—	+ 4·5	+ 3·5	+ 4·3

Säntis. (Zimní pololetí.)

Relativní vlhkost.

	Studená anticyklona.								Teplá anticyklona.							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	67	—	95	42	—	—	—	—	22	—	—	50	37	—
780—775	—	—	57	54	68	52	26	—	—	—	74	45	35	40	40	43
775—770	—	100	95	63	62	67	42	36	—	—	68	52	32	47	49	37
770—765	—	—	84	91	43	69	67	—	23	—	89	75	56	70	65	64
765—760	—	—	98	75	86	59	60	76	39	—	—	59	—	62	80	63

Oblačnost.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	1	—	3	0	—	—	—	—	4	—	—	1	1	—
780—775	—	—	2	4	2	1	2	—	—	—	5	3	1	1	1	1
775—770	—	10	7	4	3	3	1	1	—	—	7	3	1	2	2	2
770—765	—	—	7	6	5	3	2	—	8	—	9	4	3	4	3	4
765—760	—	—	10	1	3	1	5	1	4	—	—	0	—	5	6	4

Vítr. (Směr a rychlost m. p. s.)

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	W 45 N 6·1	—	N 23 E 1·7	N 34 E 6·6	—	—	—	—	N 68 E 4·8	—	—	N 45 E 3·1	E 0·1	—
780—775	—	—	W 80 N 3·1	N 47 E 5·6	N 59 E 4·9	N 70 E 4·8	N 49 E 3·5	—	—	—	S 65 W 3·5	N 32 E 2·6	N 68 E 3·1	W 89 N 2·7	W 27 N 0·3	S 5 W 1·1
775—770	—	S 82 W 4·5	W 6 N 1·6	N 33 E 1·5	N 51 E 3·3	N 48 E 3·9	N 9 E 0·8	S 68 W 3·1	—	—	S 70 W 2·8	N 42 E 2·5	N 63 E 3·4	N 62 E 1·3	S 46 W 1·0	W 7 N 1·7
770—765	—	—	N 6 E 1·8	N 36 E 1·4	N 34 E 3·0	E 19 S 1·3	S 54 W 1·8	—	S 68 W 6·7	—	S 68 W 3·2	E 27 S 1·2	N 47 E 2·6	S 29 E 1·7	S 41 W 2·6	S 22 W 4·4
765—760	—	—	S 68 W 4·8	W 45 N 3·1	N 60 E 3·0	E 32 S 3·8	S 62 W 1·6	S 45 W 5·9	S 23 W 1·7	—	—	N 82 E 2·2	—	E 58 S 1·4	S 9 W 4·7	S 42 W 6·3

Obir. (Zimní pololetí.)

Studená anticyklona. | **Teplá anticyklona.**

Váha.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—	2	18	1	4	3	—
780—775	—	—	2	1	4	6	4	—	—	—	21	57	4	8	25	2
775—770	—	—	9	12	12	16	6	—	—	1	31	49	12	9	24	2
770—765	—	—	12	18	5	5	5	—	4	1	10	22	9	6	18	6
765—760	—	—	10	3	—	1	—	—	—	—	—	3	1	—	1	1

Tlak (500 *mm* +).

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	97·6	—	—	—	—	104·1	105·1	105·5	105·3	103·8	—
780—775	—	—	98·4	93·9	96·0	97·7	96·7	—	—	—	102·5	102·1	99·6	101·0	101·0	100·3
775—770	—	—	95·4	94·9	93·8	93·0	94·8	—	—	97·3	99·7	100·4	98·7	97·8	98·6	102·8
770—765	—	—	92·2	91·7	91·8	90·2	90·2	—	99·2	95·4	98·5	97·8	95·3	94·6	98·4	97·8
765—760	—	—	89·0	88·9	—	89·4	—	—	—	—	—	90·2	93·4	—	89·1	93·8

Úchylka teploty (od — 5·5°).

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	— 13·0	—	—	—	—	+ 4·5	+ 2·8	+ 5·5	+ 2·3	+ 2·2	—
780—775	—	—	— 11·0	— 10·3	— 9·5	— 8·3	— 7·1	—	—	—	+ 2·5	+ 1·9	— 1·7	— 0·9	+ 1·8	0·0
775—770	—	—	— 7·6	— 7·8	— 8·9	— 9·3	— 4·4	—	—	— 0·3	+ 3·3	+ 3·5	+ 2·2	— 1·0	+ 2·1	+ 11·1
770—765	—	—	— 6·0	— 7·9	— 10·4	— 9·3	— 5·5	—	+ 10·3	+ 9·1	+ 5·8	+ 3·5	+ 1·2	— 1·2	+ 7·9	+ 6·4
765—760	—	—	— 7·0	— 6·2	—	— 6·0	—	—	—	—	—	— 3·8	— 2·8	—	+ 2·3	+ 6·6

Obír. (Zimní pololetí.)

Relativní vlhkost.

	Studená anticyklona.								Teplá anticyklona.							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	89	—	—	—	—	91	89	96	83	75	—
780—775	—	—	86	100	87	88	92	—	—	—	81	83	89	93	86	81
775—770	—	—	86	86	94	93	91	—	—	91	85	83	91	96	90	84
770—765	—	—	84	87	89	89	97	—	80	78	85	90	94	92	85	81
765—760	—	—	81	81	—	64	—	—	—	—	—	96	87	—	100	81

Tlak páry.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	0·9	—	—	—	—	3·9	3·2	3·0	3·0	3·0	—
780—775	—	—	1·1	1·3	1·3	1·4	1·5	—	—	—	3·2	3·7	2·4	2·7	3·0	2·5
775—770	—	—	1·5	1·4	1·4	1·4	1·9	—	—	2·6	3·4	3·3	3·5	2·6	3·3	5·7
770—765	—	—	1·6	1·5	1·3	1·4	1·9	—	5·3	3·6	3·9	3·6	3·3	3·0	4·7	3·9
765—760	—	—	1·6	1·6	—	1·2	—	—	—	—	—	2·1	2·1	—	3·6	4·0

Obír. (Zimní pololetí.)

Oblačnost.

	Studená anticyklona								Teplá anticyklona							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	0	—	—	—	—	1	0	0	0	0	—
780—775	—	—	9	10	5	3	10	—	—	—	1	1	3	4	1	5
775—770	—	—	5	2	6	5	5	—	—	3	4	1	2	3	3	2
770—765	—	—	4	6	8	6	10	—	2	0	4	3	5	4	1	1
765—760	—	—	2	1	—	0	—	—	—	—	—	7	3	—	10	0

Vítr. (Směr a rychlost m. p. s.)

	Studená anticyklona								Teplá anticyklona							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	N 23 E 3·7	—	—	—	—	W58 N 8·9	W84 N 1·9	N 8·0	N 8 E 2·6	S 23 W 0·5	—
780—775	—	—	N 45 E 12·0	N 45 E 13·5	N 35 E 7·8	N 24 E 2·1	E 5 S 7·9	—	—	—	W54 N 2·3	W62 N 1·6	N 18 E 1·5	N 60 E 1·2	S 66 W 0·7	W 1·7
775—770	--	—	W57 N 8·2	N 24 E 8·7	N 34 E 6·2	N 33 E 6·7	E 20 S 1·5	—	—	N 2·0	W19 N 3·5	W54 N 2·3	N 6 E 1·6	W87 N 2·9	E 26 S 1·2	S 8 W 6·8
770—765	—	—	W89 N 2·3	N 5 E 6·4	N 15 E 10·3	N 56 E 5·0	E 29 S 5·5	—	W 2·8	C 0	W13 N 3·0	W63 N 1·6	W86 N 2·1	E 26 S 1·2	S 60 W 2·1	S 74 W 2·1
765—760	—	—	W57 N 8·7	W72 N 10·5	—	N 45 E 2·0	—	—	—	—	—	W68 N 5·5	W45 N 22·5	—	S 45 W 10·5	W 5·5

Bělašnica. (Zimní pololetí.)

Studená anticyklona. | **Teplá anticyklona.**

V á h a.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	—	1	—	—
780—775	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	18	1	6	—	1
775—770	—	—	—	2	1	2	1	—	—	—	3	30	6	9	1	3
770—765	—	—	1	6	3	—	—	—	1	1	3	13	—	5	2	1
765—760	—	—	2	2	—	—	—	—	—	—	—	1	1	1	—	—

T l a k (500 mm +).

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	103·1	—	97·5	—	—
780—775	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	97·4	100·8	108·1	98·8	—	102·8
775—770	—	—	—	87·2	93·5	91·6	95·9	—	—	—	98·6	98·2	96·1	97·7	100·8	99·7
770—765	—	—	90·1	87·6	84·2	—	—	—	95·7	97·5	94·0	96·7	—	99·3	95·2	100·1
765—760	—	—	88·6	82·8	—	—	—	—	—	—	—	96·9	88·4	90·0	—	—

Úchylka teploty (od —4·7°).

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+ 1·0	—	— 0·4	—	—
780—775	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	— 2·4	+ 0·8	+ 9·5	+ 1·5	—	+ 10·3
775—770	—	—	—	— 15·8	— 12·3	— 6·5	— 1·4	—	—	—	— 0·1	+ 1·6	+ 8·8	+ 4·7	+ 6·7	+ 8·4
770—765	—	—	— 9·1	— 14·1	— 21·7	—	—	—	+ 5·2	+ 8·8	+ 1·0	+ 5·2	—	+ 10·2	+ 6·9	+ 9·5
765—760	—	—	— 1·9	— 12·2	—	—	—	—	—	—	—	+ 8·5	— 2·3	+ 1·1	—	—

Bělašnica. (Zimní pololetí)

Relativní vlhkost.

	Studená anticyklona.								Teplá anticyklona.							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	61	—	47	—	—
780—775	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	92	74	91	71	—	28
775—770	—	—	—	76	83	86	92	—	—	—	81	80	79	81	100	74
770—765	—	—	86	83	81	—	—	—	54	55	95	92	—	57	62	55
765—760	—	—	90	83	—	—	—	—	—	—	—	55	81	92	—	—

Absolutní vlhkost.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2·0	—	1·5	—	—
780—775	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2·3	2·6	5·9	2·5	—	2·1
775—770	—	—	—	0·6	0·9	1·9	2·6	—	—	—	2·6	3·0	2·6	3·8	5·3	4·4
770—765	—	—	1·3	1·0	0·6	—	—	—	2·4	3·4	4·0	4·5	—	3·9	2·6	3·5
765—760	—	—	2·6	1·0	—	—	—	—	—	—	—	3·3	2·4	3·2	—	—

Bělašnica. (Zimní pololetí.)

Oblačnost.

	Studená anticyklona. N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Teplá anticyklona. N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	6	—	—
780—775	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9	5	1	1	—	6
775—770	—	—	—	10	10	10	0	—	—	—	4	4	5	5	0	5
770—765	—	—	0	10	7	—	—	—	6	3	10	6	—	0	2	0
765—760	—	—	8	10	—	—	—	—	—	—	—	8	10	10	—	—

Vítr. (Směr a rychlost m. p. s.)

	Studená anticyklona. N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Teplá anticyklona. N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	N 49 E 5·8	—	N 46 E 5·5	—	—
780—775	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	W 46 N 10·5	N 18 E 4·7	N 5·5	E 17 S 8·1	—	S 9·0
775—770	—	—	—	W 67 N 12·5	N 45 E 8·0	N 19 E 2·2	W 3·5	—	—	—	N 12·0	N 14 E 5·9	S 11 W 1·9	N 84 E 0·8	S 85 W 10·5	S 56 W 6·7
770—765	—	—	W 45 N 5·5	W 79 N 6·8	N 13 E 3·6	—	—	—	S 45 W 13·5	W 49 N 15·7	N 3 E 5·4	W 69 N 3·4	—	W 6·7	—	C 0
765—760	—	—	N 2·7	N 15·0	—	—	—	—	—	—	—	W 45 N 3·5	N 13·5	W 8·0	—	—

Mt. Ventoux. (Zimní pololetí.)

Studená anticyklona. | **Teplá anticyklona.**

V á h a.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—
780—775	—	—	—	2	—	1	—	—	—	—	—	2	2	17	13	—
775—770	—	—	2	7	6	11	1	—	—	—	—	4	8	56	29	—
770—765	—	—	2	11	7	12	4	—	—	—	—	5	7	21	30	4
765—760	—	—	—	4	1	6	4	—	—	—	—	—	5	6	4	3

T l a k (500 mm +).

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	118·6	—
780—775	—	—	—	104·8	—	109·0	—	—	—	—	—	116·0	114·0	114·8	114·0	—
775—770	—	—	102·9	106·2	106·7	107·3	109·2	—	—	—	—	112·3	112·1	111·7	111·6	—
770—765	—	—	98·4	102·7	105·7	103·9	102·9	—	—	—	—	107·2	108·0	108·6	108·1	110·2
765—760	—	—	—	100·3	103·6	99·9	102·8	—	—	—	—	—	103·6	104·7	100·7	102·7

Ú c h y l k a t e p l o t y (od —3·1°).

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+ 6·9	—
780—775	—	—	—	— 3·4	—	— 5·8	—	—	—	—	—	+ 5·1	+ 5·4	+ 1·8	+ 1·5	—
775—770	—	—	— 3·0	— 2·8	— 3·0	— 4·2	+ 0·2	—	—	—	—	+ 9·5	+ 4·1	+ 2·3	+ 3·2	—
770—765	—	—	— 11·2	— 4·3	— 2·3	— 2·9	— 3·7	—	—	—	—	+ 2·9	+ 3·1	+ 4·0	+ 4·0	+ 8·2
765—760	—	—	—	— 2·0	+ 1·0	— 2·4	+ 2·0	—	—	—	—	—	+ 2·3	+ 4·9	+ 1·9	+ 0·4

Mt. Ventoux. (Zimní pololetí.)

Studená anticyklona. — Teplá anticyklona.

Relativní vlhkost.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
	Studená anticyklona								Teplá anticyklona							
785—780	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	19	—
780—775	—	—	—	61	—	100	—	—	—	—	—	51	51	53	46	—
775—770	—	—	32	72	68	74	82	—	—	—	—	42	58	48	61	—
770—765	—	—	100	75	61	61	66	—	—	—	—	72	58	62	69	74
765—760	—	—	-	69	100	64	54	—	—	—	—	—	61	87	98	100

Oblačnost.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0	—
780—775	—	—	—	2	—	10	—	—	—	—	—	0	0	0	1	—
775—770	—	—	0	3	4	5	7	—	—	—	—	0	0	0	3	—
770—765	—	—	10	6	4	3	8	—	—	—	—	8	1	3	4	4
765—760	—	—	—	3	10	2	5	—	—	—	—	—	3	8	10	10

Vítr. (Směr a rychlost m. p. s.)

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	N 45 E 1·5	—
780—775	—	—	—	W 45 N 6·0	—	S 8·0	—	—	—	—	—	N 45 E 7·0	N 3·2	N 38 E 1·0	E 29 S 1·7	—
775—770	—	—	N 8·0	N 6 E 2·8	N 20 E 2·6	S 8 W 1·5	E 68 S 7·0	—	—	—	—	N 62 E 1·7	N 23 E 1·6	E 22 S 1·5	E 45 S 2·3	—
770—765	—	—	N 11·0	W 69 N 7·3	E 32 S 3·2	N 49 E 2·4	E 38 S 4·1	—	—	—	—	E 29 S 4·9	W 67 N 0·6	E 32 S 2·5	E 54 S 4·8	E 80 S 3·2
765—760	—	—	—	N 2 E 7·3	S 3·0	E 28 S 1·2	S 76 W 0·8	—	—	—	—	—	N 72 E 2·3	E 51 S 3·9	E 41 S 8·9	E 45 S 7·0

Sněžka. (Zimní pololetí.)

Studená anticyklona. | **Teplá anticyklona.**

Váha.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	2	—	—	4	2	1	7	3	—	—	—	1	1	—
780—775	2	1	11	6	2	8	9	1	18	23	7	5	2	3	10	13
775—770	1	2	12	10	3	7	6	2	34	48	24	8	3	5	10	15
770—765	1	9	15	4	—	1	2	4	9	29	15	1	3	1	4	20
765—760	—	3	4	2	—	—	—	1	7	4	1	—	—	—	1	2

Tlak. (600 mm +)

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	36·6	—	—	34·2	34·0	37·3	38·6	36·8	—	—	—	36·9	34·7	—
780—775	32·9	29·9	30·8	30·3	32·4	30·1	31·2	32·6	36·4	34·4	34·0	36·4	34·0	35·7	35·0	34·5
775—770	30·2	25·2	29·8	27·5	30·3	25·4	26·7	32·1	32·9	32·1	31·6	31·4	32·1	31·8	31·5	31·5
770—765	22·2	24·5	25·4	22·8	—	25·9	20·5	25·5	29·6	28·0	29·0	30·6	26·5	30·2	29·8	29·7
765—760	—	20·7	21·3	17·4	—	—	—	15·1	26·7	24·6	22·2	—	—	—	18·9	25·3

Úchylka teploty (od — 5·3°).

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	— 7·0	—	—	— 7·0	— 9·3	— 4·4	+ 4·8	— 2·0	—	—	—	— 1·8	— 0·7	—
780—775	— 3·2	— 8·0	— 7·5	— 8·7	— 5·6	— 10·5	— 5·5	— 4·3	+ 4·9	+ 2·3	— 2·8	+ 6·0	+ 2·4	+ 3·3	+ 1·1	+ 3·9
775—770	— 3·2	— 11·1	— 4·6	— 9·4	— 5·0	— 11·6	— 6·0	— 6·8	+ 5·2	+ 4·0	+ 1·7	+ 2·4	— 1·1	+ 3·0	+ 2·9	+ 2·8
770—765	— 10·9	— 5·1	— 6·0	— 11·2	—	— 7·3	— 8·0	— 2·8	+ 2·6	+ 3·4	+ 2·2	+ 0·7	— 3·4	+ 1·5	+ 7·7	+ 7·2
765—760	—	— 3·5	— 4·8	— 13·8	—	—	—	— 5·1	+ 7·0	+ 3·0	— 1·8	—	—	—	— 2·0	+ 7·2

Sněžka. (Zimní pololetí.)

Oblačnost.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	0	—	—	5	0	2	2	6	—	—	—	0	0	—
780—775	0	2	7	6	7	4	2	0	2	3	7	4	1	0	2	1
775—770	0	0	9	9	10	1	4	4	4	6	6	4	3	2	2	3
770—765	0	8	9	9	—	0	10	1	3	7	8	2	4	0	5	3
765—760	—	10	10	10	—	—	—	8	5	7	10	—	—	—	2	5

Vítr. (Směr a rychlost m. p. s.)

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	N 56 E 3·0	—	—	E 27 S 5·4	E 36 S 6·7	N 4·8	S 26 W 4·6	N 10·1	—	—	—	E 4·8	S 45 W 4·8	—
780—775	W 17 N 3·6	N 3·1	W 68 N 5·3	N 16 E 10·1	N 35 E 11·6	N 60 E 9·4	E 62 S 5·7	S 4·8	W 1 N 2·1	W 40 N 4·1	N 8 E 3·4	N 17 E 5·1	E 16 S 6·3	E 16 S 5·6	E 68 S 4·8	S 20 W 4·0
775—770	S 1·7	W 73 N 3 6	N 5 E 3·6	W 66 N 5·1	E 3 S 0·6	E 26 S 9·1	E 54 S 9·8	S 16 W 6·2	S 89 W 3·1	W 29 N 7·9	W 51 N 6·2	N 11 E 4·1	N 58 E 7·1	E 23 S 5·1	S 3 W 6·6	S 26 W 4·7
770—765	S 6·7	W 21 N 5 9	W 55 N 4·5	W 79 N 9·9	—	E 45 S 6 7	S 13 W 17·2	S 36 W 8·3	S 81 W 4·5	W 22 N 9·7	W 57 N 8·3	W 45 N 4·8	N 39 E 6·7	N 3·1	S 39 W 2·6	S 41 W 2·9
765—760	—	W 15 N 8·2	W 41 N 14·4	W 71 N 10·0	—	—	—	W 23 N 12·9	S 54 W 7·5	W 10 N 8·7	W 45 N 15·4	—	—	—	S 10·5	S 45 W 6·9

Belchen. (Zimní pololetí.)

Studená anticyklona. — **Teplá anticyklona.**

Váha.

	Studená anticyklona								Teplá anticyklona							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	3	—	1	1	1	—	—	1	1	—	—	—	4	—
780—775	—	1	3	4	2	3	8	—	—	4	—	4	6	1	48	8
775—770	—	4	5	8	7	13	10	—	—	3	3	5	13	7	60	24
770—765	—	1	1	5	2	8	9	2	1	—	1	2	6	10	25	9
765—760	—	1	—	—	2	1	5	3	1	—	—	—	2	3	3	6

Tlak. (600 *mm* +)

	Studená anticyklona								Teplá anticyklona							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	54·7	—	51·0	51·9	51·6	—	—	56·4	58·4	—	—	—	57·7	—
780—775	—	52·8	51·3	49·8	52·2	50·8	50·5	—	—	52·8	—	53·5	53·2	50·7	53·6	53·7
775—770	—	48·6	46·6	46·5	46·4	45·8	48·5	—	—	50·6	49·4	50·6	49·0	50·3	49·8	50·5
770—765	—	48·3	45·6	42·8	42·3	42·7	43·6	43·8	46·4	—	44·5	46·3	46·9	46·5	47·0	46·8
765—760	—	41·9	—	—	36·3	35·7	38·6	39·7	40·9	—	—	—	43·4	41·8	41·8	43·8

Úchylka teploty (od — 1·9°).

	Studená anticyklona								Teplá anticyklona							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	— 6·9	—	— 10·7	— 13·5	— 9·8	—	—	+ 1·7	+ 2·9	—	—	—	+ 4·3	—
780—775	—	— 3·3	— 4·7	— 7·1	— 1·9	— 9·1	— 4·4	—	—	+ 1·8	—	+ 3·5	+ 1·9	— 3·5	+ 3·6	+ 1·6
775—770	—	— 4·9	— 7·3	— 6·7	— 8·0	— 6·5	— 4·9	—	—	+ 6·7	— 0·3	+ 3·7	+ 4·0	+ 4·3	+ 4·7	+ 4·3
770—765	—	+ 1·1	— 4·9	— 7·3	— 8·6	— 7·1	— 4·9	— 4·1	+ 13·0	—	— 5·9	+ 2·5	+ 5·6	+ 4·2	+ 6·5	+ 7·9
765—760	—	— 0·1	—	—	— 14·9	— 7·8	— 3·5	— 5·3	+ 2·8	—	—	—	+ 3·2	+ 4·0	+ 6·1	+ 7·0

Belchen. (Zimní pololetí.)

Relativní vlhkost.

	Studená anticyklona.								Teplá anticyklona.							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	100	—	88	91	57	—	—	—	—	—	—	—	67	—
780—775	—	100	92	94	—	84	90	—	—	—	—	100	88	—	80	82
775—770	—	100	94	93	91	94	88	—	—	61	81	95	76	72	71	76
770—765	—	100	97	71	91	87	88	85	52	—	89	85	78	85	78	74
765—760	—	100	—	—	100	81	97	100	—	—	—	—	83	100	66	95

Tlak páry.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	—	—	1·5	1·3	1·0	—	—	—	—	—	—	—	3·2	—
780—775	—	—	2·8	2·0	—	1·3	3·1	—	—	—	—	—	4·3	—	3·9	1·8
775—770	—	—	2·3	2·7	1·5	2·0	1·9	—	—	3·2	3·2	4·4	3·7	3·7	4·3	4·2
770—765	—	4·3	2·8	1·6	1·8	2·6	2·6	2·4	5·1	—	2·2	4·8	4·8	4·7	5·1	5·2
765—760	—	4·0	—	—	1·1	1·7	2·0	—	—	—	—	—	4·2	6·2	3·9	5·8

Belchen. (Zimní pololetí.)

Studená anticyklona. — Oblačnost. — Teplá anticyklona.

	Studená anticyklona								Teplá anticyklona							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	10	—	0	10	0	—	—	10	0	—	—	—	2	—
780—775	—	10	7	8	6	10	0	—	—	5	—	3	0	10	1	5
775—770	—	9	9	5	4	4	3	—	—	5	8	6	0	2	2	2
770—765	—	8	10	2	5	4	3	0	7	—	8	6	4	3	4	3
765—760	—	10	—	—	5	0	5	6	1	—	—	—	1	6	4	5

Vítr. (Směr a rychlost m. p. s.)

	Studená anticyklona								Teplá anticyklona							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	W79N 5·7	—	N 6·7	N 12·9	N 45 E 15·4	—	—	W45N 6·7	N 45 E 3·1	—	—	—	N 51 E 2·9	—
780—775	—	W45N 10·7	N 3·2	N 31 E 7·7	N 36 E 3·9	N 12 E 7·5	N 10 E 6·4	—	—	W64N 2·6	—	N 21 E 6·4	N 15 E 5·2	N 45 E 1·7	W55N 1·1	W86N 3·0
775—770	—	W51N 5·5	W79N 2·4	N 34 E 7·6	N 42 E 7·6	N 31 E 7·2	N 46 E 1·1	—	—	W 2·5	W61N 5·6	N 8 E 6·1	N 55 E 5·7	N 37 E 2·4	W23N 0·7	W 4 N 1·9
770—765	—	N 45 E 6·7	N 7·7	N 17 E 3·2	N 17 E 5·8	N 34 E 3·3	W46N 1·1	W60N 2·7	W 8·8	—	N 4·8	N 56 E 5·6	N 52 E 3·5	N 77 E 3·5	S 58 W 3·6	S 89 W 3·2
765—760	—	W 10·7	—	—	N 5·3	E 45 S 1·7	N 15 E 1·5	S 76 W 7·7	S 45 W 6·7	—	—	—	N 63 E 8·7	E 26 S 2·2	S 2 W 3·7	S 73 W 6·6

Ben Nevis. (Zimní pololetí.)

Studená anticyklona. — **Teplá anticyklona.**

Váha.

	Studená anticyklona								Teplá anticyklona							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
780—775	2	1	—	—	—	2	3	4	—	—	—	—	—	—	—	4
775—770	3	3	—	—	—	1	3	10	3	2	—	—	—	—	3	13
770—765	5	—	—	—	—	—	2	4	1	—	—	—	—	—	3	12
765—760	—	—	—	—	—	—	—	3	—	—	—	—	—	—	—	5

Tlak (600 *mm* +).

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	63·2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	51·0	61 0
780—775	60·4	57·2	—	—	—	58·5	57·5	58·1	—	—	—	—	—	—	—	57·3
775—770	54 7	55·1	—	—	—	54·2	52·2	54·0	55·9	54·1	—	—	—	—	54·8	55·5
770—765	49·9	—	—	—	—	—	51·9	49·6	47·6	—	—	—	—	—	52·2	51·6
765—760	—	—	—	—	—	—	—	47·6	—	—	—	—	—	—	—	47·2

Úchylka teploty (od — 3·4°).

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	— 1·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+ 3·7	+ 5·7
780—775	+ 2·3	+ 3 3	—	—	—	— 2·0	+ 2·1	+ 2·9	—	—	—	—	—	—	—	+ 1·1
775—770	+ 2·5	+ 2·0	—	—	—	— 0·2	— 1·4	+ 3·7	+ 6·1	0·0	—	—	—	—	+ 3·9	+ 4·7
770—765	+ 2·5	—	—	—	—	—	+ 1·2	+ 1·2	+ 2·9	—	—	—	—	—	+ 8·8	+ 3·0
765—760	—	—	—	—	—	—	—	+ 3·1	—	—	—	—	—	—	—	+ 1·6

Ben Nevis. (Zimní pololetí.)

Oblačnost.

	Studená anticyklona.								Teplá anticyklona.							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0	0
780 - 775	10	10	—	—	—	5	9	7	—	—	—	—	—	—	—	5
775—770	10	7	—	—	—	10	4	10	6	0	—	—	—	—	0	7
770—765	8	—	—	—	—	—	6	8	—	—	—	—	—	—	2	9
765—760	—	—	—	—	—	—	—	10	—	—	—	—	—	—	—	8

Vítr. (Směr a rychlost m. p. s)

	Studená anticyklona.								Teplá anticyklona.							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	N 3·9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	S 3·1	W 4·8
780—775	W67N 1·7	N 1·6	—	—	—	E12S 5·2	E71S 3·2	W67N 2·2	—	—	—	—	—	—	—	S17W 4·9
775—770	W63N 1·0	W30N 2·8	—	—	—	E23S 3·9	E80S 1·3	S75W 1·6	W27N 3·9	S82W 2·4	—	—	—	—	S 4·2	S43W 2·8
770—765	W59N 2·1	—	—	—	—	—	S8W 5·2	S20W 3·8	S 12·9	—	—	—	—	—	S1W 3·8	S71W 4·0
765—760	—	—	—	—	—	—	—	S24W 5·7	—	—	—	—	—	—	—	S7W 3·9

(Zimní pololetí.)

Studená anticyklona. | Teplá anticyklona.

V á h a.

	Studená N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Teplá N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	3	—	—	—	1	—	1	—		—	—	—	—	2
780—775	—	1	4	2	5	2	5	3	4	3	5	2	3	—	5	19
775—770	—	4	2	4	—	2	4	2	13	5	5	1	6	—	8	38
770—765	—	5	3	—	—	—	5	2	9	4	2	—	1	1	5	24
765—760	3	—	1	—	—	—	—	2	2	1	—	—	—	2	2	4

T l a k (600 *mm* +).

	Studená N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Teplá N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	73·3	—	—	—	77·2	—	75·8	—	—	—	—	—	—	75·3
780—775	—	73·8	71·9	70·4	70·6	68·2	70·5	69·8	73·1	71·4	72·6	73·6	73·0	—	72·1	73·6
775—770	—	66·3	66·9	64·5	—	66·1	65·6	68·5	69·8	69·9	69·8	68·5	70·8	—	69·3	69·9
770—765	—	63·6	65·4	—	—	—	63·5	62·3	66·1	65·7	65·2	—	64·7	67·2	64·9	66·8
765—760	58·7	—	56·1	—	—	—	—	59·1	60·6	62·0	—	—	—	62·0	63·5	63·3

Ú c h y l k a t e p l o t y (od — 2·3°).

	Studená N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Teplá N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	— 8·3	—	—	—	— 0·4	—	+ 2·5	—	—	—	—	—	—	— 1·3
780—775	—	— 1·1	— 4·3	— 8·4	— 7·4	— 13·1	— 7·8	— 4·1	+ 3·2	— 0·5	— 0·4	— 2·1	+ 10·1	—	+ 1·7	+ 4·6
775—770	—	— 6·5	— 8·2	— 11·2	—	— 6·3	— 11·3	— 8·9	+ 2·0	+ 3·5	+ 3·9	+ 4·8	+ 2·9	—	+ 1·8	+ 3·7
770—765	—	— 1·3	— 3·4	—	—	—	— 7·8	— 9·3	+ 3·3	+ 2·0	+ 0·4	—	— 7·2	+ 7·4	+ 3·5	+ 4·2
765—760	— 3·9	—	— 7·1	—	—	—	—	— 5·5	+ 5·5	+ 7·6	—	—	—	— 4·4	+ 4·3	+ 6·5

Brocken. (Zimní pololetí)

Relativní vlhkost.

	Studená anticyklona.								Teplá anticyklona.							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	--	83	—	—	—	81	—	15	—	—	—	—	—	—	83
780—775	—	100	100	85	75	83	57	61	78	100	98	72	55	—	78	49
775—770	—	90	70	99	—	98	79	60	90	100	97	57	79	—	67	73
770—765	—	100	100	—	—	—	86	91	85	100	100	—	52	80	60	78
765—760	100	—	100	—	—	—	—	72	80	100	—	—	—	97	82	99

Absolutní vlhkost.

	Studená anticyklona.								Teplá anticyklona.							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	1·8	—	—	—	3·0	—	0·7	—	—	—	—	—	—	3·2
780—775	—	3·6	2·8	2·0	1·6	1·1	1·3	1·7	3·3	3·7	3·7	2·1	1·7	—	3·3	2·4
775—770	--	2·3	1·2	1·6	—	2·3	1·2	1·1	4·1	5·0	4·9	3·1	3·7	—	2·9	3·5
770—765	—	3.6	3·0	—	—	—	2·0	1·8	4·1	4·5	3·9	—	1·1	4·6	3·2	4·0
765—760	3·0	—	2·2	—	—	—	—	1·8	4·5	6·7	—	—	—	2·7	5·8	6·4

Brocken. (Zimní polol tí.)

Oblačnost.

	Studená anticyklona. N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Teplá anticyklona. N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	8	—	—	—	7	—	0	—	—	—	—	—	—	5
780—775	—	10	9	5	4	0	2	7	9	10	8	7	1	—	5	2
775—770	—	8	5	8	—	5	4	0	8	10	7	0	1	—	4	6
770—765	—	10	7	—	—	—	6	8	6	10	10	—	0	1	5	5
765—760	10	—	3	—	—	—	—	5	5	10	—	—	—	2	5	9

Vítr. (Směr a rychlost m. p. s.)

	Studená anticyklona. N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Teplá anticyklona. N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
785—780	—	—	W79N 7·2	—	—	—	C 0	—	W45N 8·8	—	—	—	—	—	—	W81N 3·9
780—775	—	W45N 10·7	W80N 7·4	W17N 10·7	E 1 S 8·7	N 69 E 15·4	E 32 S 9·6	W70N 3·2	W 7 N 8 7	W25N 9·3	W51N 11·7	N 68 E 6·8	E 9 S 5·3	—	E 60 S 10 3	S 56 W 4·6
775—770	—	W37N 7·4	W68N 6·9	N 67 E 8·4	—	E 13 S 7·6	E 33 S 5·1	N 1·6	S 85 W 10·1	W28N 12·5	W69N 6·7	E 23 S 8·8	E 12 S 7·6	—	S 7 W 4·6	S 71 W 5·9
770—765	—	W28N 11·2	W38N 7·2	—	—	—	E 47 S 5·1	S 7 W 8·1	S 82 W 8·0	S 80 W 8·6	W45N 11·8	—	N 45 E 8·8	E 68 S 6·7	S 13 W 4 6	S 58 W 7·6
765—760	W 4 N 6·4	—	W68N 4·8	—	—	—	—	S 55 W 7·6	S 45 W 15·4	S 68 W 21·0	—	—	—	E 56 S 6·6	E 84 S 7·7	S 50 W 9·2

Volná atmosféra.

Studená anticyklona. (Zimní pololetí.)

m	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Průměr
500	−4·4	−1·2	−5·7	−9·9	−8·7	−7·0	−5·5	−0·5	−5·4
1000	−3·1	−2·5	−4·2	−12·2	−8·4	−4·2	−4·4	+0·7	−4·8
1500	−3·2	−2·3	−7·4	−12·7	−8·4	−3·9	−2·3	+0·7	−4·9
2000	−3·9	−2·6	−8·4	−7·4	−10·8	−5·4	−2·2	+1·0	−5·0
2500	−5·8	—	−9·7	−5·9	−14·6	−4·8	−1·9	+0·9	−6·0
3000	−5·7	—	−6·2	−6·4	−13·9	−6·8	−2·8	+1·7	−5·7
3500	−2·0	—	—	—	−13·4	−6·7	−1·9	—	−6·0

Studená anticyklona. (Letní pololetí.)

m	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Průměr
500	−1·6	−3·1	−2·5	+0·1	+0·2	−4·6	−7·0	+0·1	−2·3
1000	−3·6	−4·1	−4·2	−0·9	−0·6	−6·7	−9·8	+0·7	−3·7
1500	−3·5	−3·8	−3·5	−0·9	—	−2·9	−6·3	+0·5	−3·0
2000	−1·0	−1·6	−2·7	−0·7	—	−1·4	−3·8	—	−1·9
2500	−0·5	—	−0·4	−0·1	—	−1·0	−3·1	—	−1·0
3000	+2·6	—	−0·1	−1·1	—	−1·9	−2·6	—	−0·6
3500	+1·0	—	−4·4	+0·4	—	—	—	—	−1·0

Teplá anticyklona. (Zimní pololetí.)

m	N	NE	E	[SE]	[S]	[SW]	W	NW	Průměr
500	+2·5	+1·8	+1·7	−4·0	+0·7	−3·1	−3·0	+0·7	+0·5
1000	+2·9	+1·8	+0·4	−5·6	−1·5	—	+0·4	+3·3	+1·8
1500	+3·9	+4·6	+2·1	−7·0	−0·3	—	+2·7	+4·6	+3·6
2000	+4·6	+4·8	+2·5	—	+0·9	—	+4·9	+4·1	+4·2
2500	+4·8	+5·0	+0·5	—	+3·8	—	+4·5	+3·7	+3·7
3000	+5·9	+8·2	+3·6	—	+4·7	—	+4·1	+3·6	+5·1 (+4·3)
3500	+7·5	+8·7	—	—	—	—	+6·3	+4·4	+6·7 (+6·1)

Teplá anticyklona. (Letní pololetí.)

m	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Průměr
500	+2·2	+2·0	−0·3	+4·1	+7·0	+5·8	+5·8	+6·1	+4·1
1000	+1·3	+1·4	−1·7	+2·0	+6·6	+3·3	+5·5	+5·0	+2·9
1500	+0·4	+3·1	+0·1	+1·1	+7·8	+6·9	—	+5·7	+3·6
2000	−0·4	+3·8	+1·1	−4·6	+5·0	+7·6	—	+6·8	+2·8
2500	+1·1	+8·8	+3·7	−2·7	+3·6	+6·5	—	+6·0	+3·1
3000	+2·2	—	+3·2	−5·1	+4·2	+5·3	—	+4·1	+2·3
3500	+1·3	—	+4·0	−5·2	+1·9	+5·8	—	+3·1	+1·8

Volná atmosféra.

(Ballons sondes.)

Studená anticyklona.

km:	Zimní pololetí: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	km:	Letní pololetí: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	N	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
E	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	E	— 4·8	— 5·7	— 3·2	— 3·0	— 3·6	— 4·8	— 14·8	— 14·2	— 20·1	— 7·0
S	— 11·0	— 14·9	— 14·7	— 11·5	— 10·0	— 8·2	— 4·6	—	—	—	S	— 2·5	+ 3·7	+ 5·2	+ 4·4	+ 6·1	+ 6·6	+ 5·9	+ 6·0	+ 4·1	+ 2·1
W	— 6·0	— 2·6	—	—	—	—	—	—	—	—	W	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

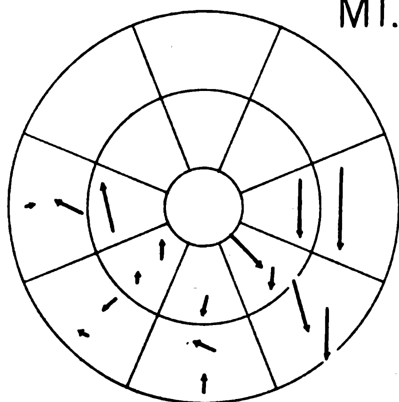
Teplá anticyklona.

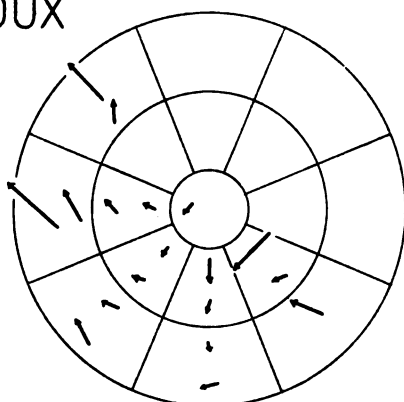
km:	Zimní pololetí: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	km:	Letní pololetí: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	— 1·0	+ 2·8	+ 4·2	+ 4·2	+ 3·7	+ 3·4	+ 0·8	— 0·8	— 6·4	— 7·7	N	+ 2·5	+ 3·1	+ 2·8	+ 4·0	+ 3·8	+ 1·5	+ 3·2	+ 1·9	+ 1·3	— 1·5
E	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	E	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
S	— 2·0	+ 5·0	+ 4·3	+ 6·9	+ 8·1	+ 9·2	+ 8·5	+ 6·4	+ 4·8	+ 1·5	S	+ 8·5	+ 8·4	+ 7·1	+ 7·0	+ 5·7	+ 5·8	+ 4·3	+ 2·3	— 0·1	0·0
W	+ 2·9	+ 5·8	+ 4·6	+ 5·1	+ 5·6	+ 5·6	+ 5·1	+ 3·8	+ 2·2	+ 0·5	W	+ 6·9	+ 6·7	+ 8·0	+ 7·4	+ 7·3	+ 6·9	+ 6·7	+ 6·6	+ 6·3	+ 4·9

VĚTRNÉ POMĚRY V STUDENÝCH A TEPLÝCH ANTICYKLONÁCH NA HORSKÝCH OBSERVATOŘÍCH V ZIMNÍM POLOLETÍ.

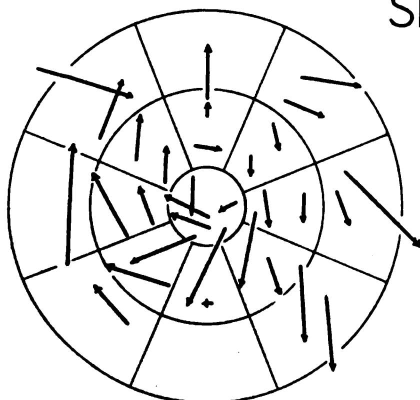
STUDENÁ ANTICYKLONA — TEPLÁ ANTICYKLONA

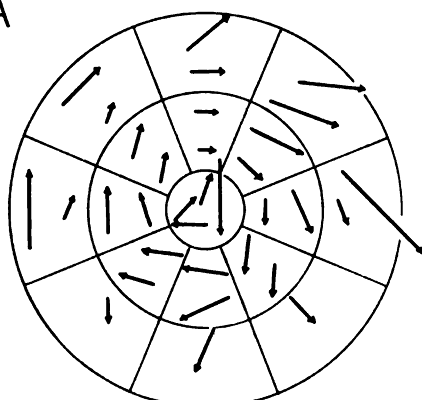
MT. VENTOUX





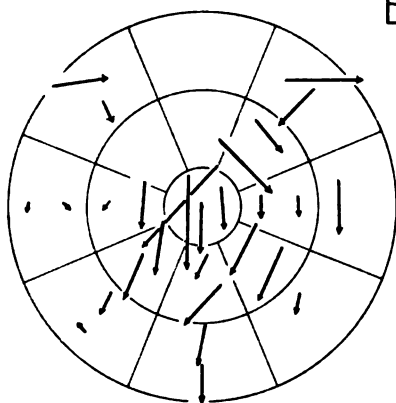
SNĚŽKA

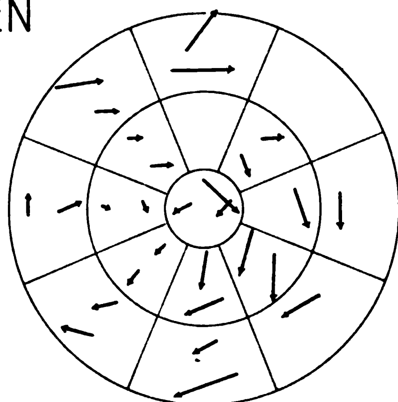




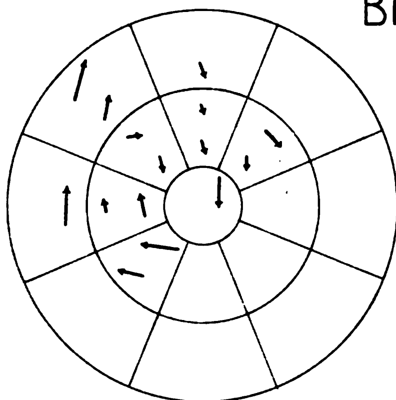
Hanzlík del.

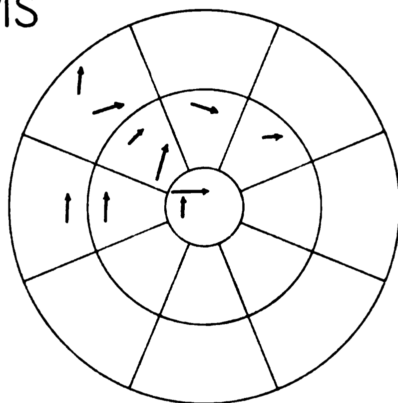
BELCHEN



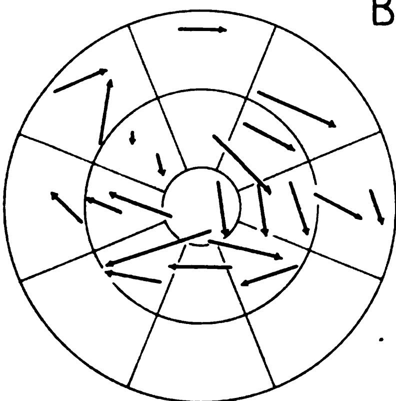


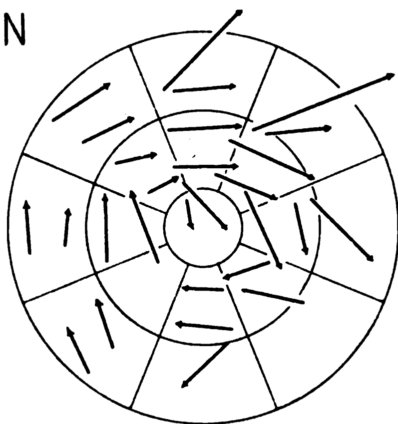
BEN NEVIS





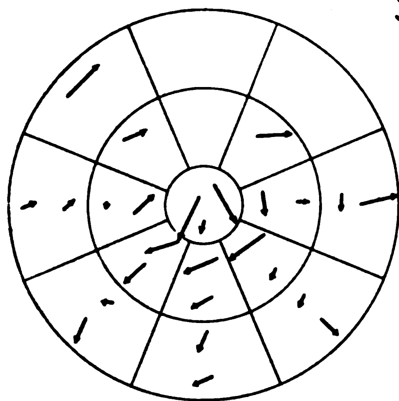
BROCKEN

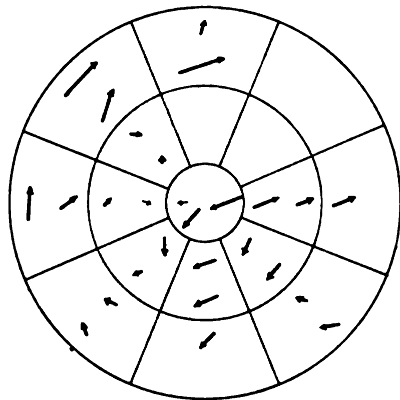




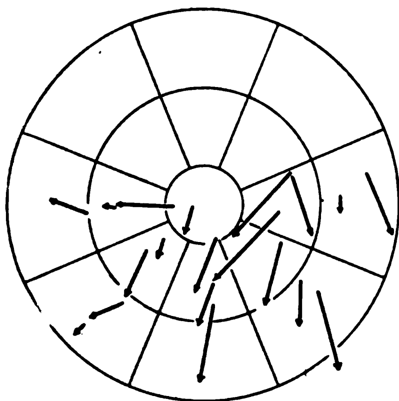
Hanzlik del

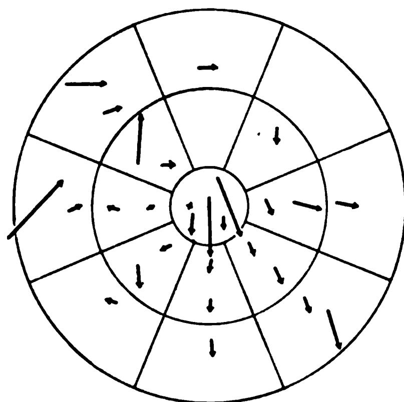
SÄNTIS



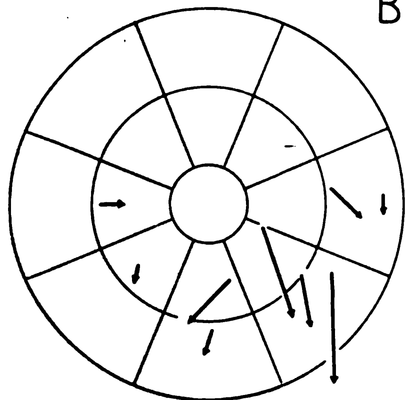


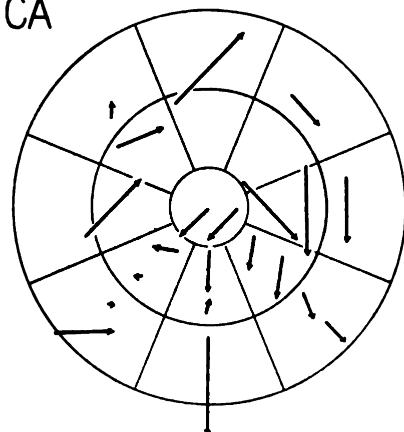
OBIR





BĚLAŠNICA





Hanzlík del.

XI.

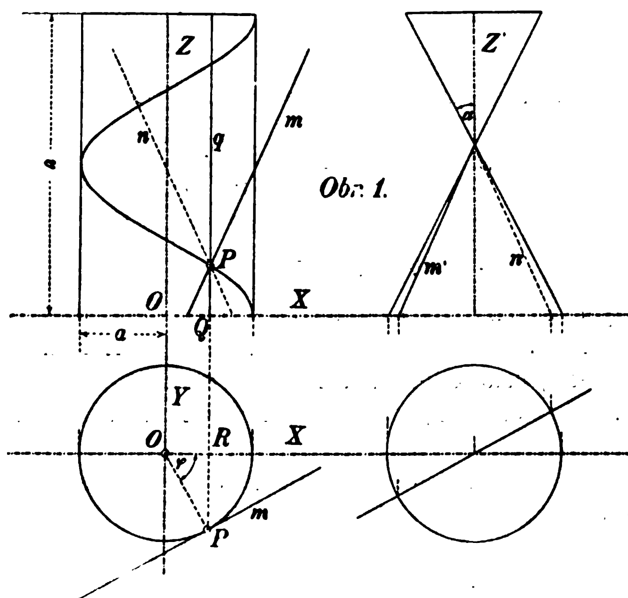
Komplanace šroubových ploch přímkových, jichž řídící kužel jest točný.

(S 2 obrazci v textu.)

Napsal Vilém Jung, professor v Praze.

(Předloženo v sezení dne 14. června 1907.)

1. Pěkný příklad na komplanaci ploch, vyjádřených třemi rovnicemi o dvou proměnlivých parametrech, poskytují přímkové plochy šroubové, jichž řídící kužel jest točný.



Obr. 1.

Budiž dána přímková plocha šroubová rázu dosti obecného. Řídící křivkou její budiž *šroubovice* na *točném válci* poloměru a, mající souřadnou osu Z za točnou osu. (Viz obr. 1.)

Je-li v výška návitková a položíme-li

(1) $$\frac{v}{2\pi} = b,$$

jest řídící křivka dána rovnicemi

(2) $$x = a \cos\varphi, \quad y = a \sin\varphi, \quad z = b\varphi.$$

Povrchová přímka m v bodě P šroubové plochy nechť leží v tečné rovině, dotýkající se příslušné plochy válcové podél její povrchové přímky q, procházející bodem P. Přímka m nechť svírá s přímkou q, a tedy s osou Z stálý úhel α.

Bodem P řídící šroubovice procházejí dvě přímky m a n, těmto podmínkám hovící, a možno je považovati za průsek roviny

(3) $$x \cos\varphi + y \sin\varphi = a$$

s kuželovou plochou

(4) $$(x - a\cos\varphi)^2 + (y - a\sin\varphi)^2 = (z - b\varphi)^2 \operatorname{tg}^2\alpha.$$

Položíme-li

(5) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\mu},$$

plyne z rovnice (4) se zřetelem k rovnici (3) rovnice

(6) $$x^2 + y^2 - a^2 = \left(\frac{z - b\varphi}{\mu}\right)^2,$$

čili

(7) $$z = b\varphi \pm \mu\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}.$$

Každým bodem řídící šroubovice procházejí dvě povrchové přímky, tak že plocha skládá se ze dvou plášťů. Při komplanaci budeme přihlížeti pouze k jednomu z těchto plášťů.

Šroubová plocha takto definovaná jest stanovena rovnicemi (3) a (7).

Charakter pravoúhlého průmětu této plochy do roviny kolmé k její ose ukazuje k tomu, že můžeme pravoúhlé souřadnice bodu této plochy vyjádřiti funkcemi dvou proměnlivých na sobě nezávislých parametrů r a φ, jež souvisejí s neodvisle proměnnými x a y rovnicemi

(8) $$x \cos\varphi + y \sin\varphi = a,$$

(9) $$x^2 + y^2 = r^2.$$

Vyjádříme-li z těchto rovnic x a y pomocí parametrů r a φ, dostaneme rovnice dané plochy ve tvaru

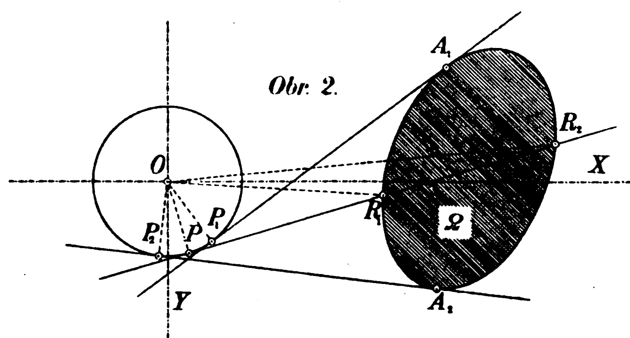
(10) $$x = a \cos \varphi \pm \sqrt{r^2 - a^2} \sin \varphi,$$

(11) $$y = a \sin \varphi \mp \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi,$$

(12) $$z = b\varphi \pm \mu \sqrt{r^2 - a^2}.$$

V rovnicích (10) a (11) platí současně buď hořejší anebo dolejší znamení. Znamení v rovnici (12) můžeme pak kombinovati s některými současně platnými znameními v rovnicích (10) a (11).

Dostaneme tím 4 kombinace, z nichž však patrně jsou dvě a dvě totožné. Plocha má tedy dva pláště. Do dalšího počtu zavedeme pouze jedno znamení, na př. hořejší ve všech rovnicích, berouce zřetel pouze k jednomu plášti dané plochy, vytvořenému přímkou m, jejíž nárys v obr. 1. jest plně vytažen.



2. Mějme na př. stanoviti obsah O obrazce, ležícího na tomto plášti plochy, je-li dán pravoúhlý průmět Ω tohoto obrazce do roviny (XY), kolmé k ose Z plochy. (Viz obr. 2.)

Křivka, omezující plochu Ω, budiž dána rovnicí

(13) $$r = f(\varphi);$$

nechť podává tato rovnice pro $\sphericalangle XOP = \varphi$ na př. dvě hodnoty

(14) $$\overline{OR_1} = r_1 = f_1(\varphi), \quad \overline{OR_2} = r_2 = f_2(\varphi).$$

Dále buďtež tečny $\overline{P_1A_1}$ a $\overline{P_2A_2}$, vedené ke křivce omezující obrazec Ω, stanoveny souřadnicemi

(15) $$\varphi_1 = \sphericalangle XOP_1, \quad \varphi_2 = \sphericalangle XOP_2.$$

Pro obsah O daného obrazce pak platí

$$(16)\qquad O = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\Delta_{xy}^2 + \Delta_{yz}^2 + \Delta_{zx}^2}\, dr,$$

při čemž jest funkcionální determinant Δ_{xy} dán rovnicí

$$(17)\qquad \Delta_{xy} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}, & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi}, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix};$$

ostatní dva funkcionální determinanty dostaneme cyklickou permutací liter x, y, z.

Z rovnic (10), (11) a (12) se zřetelem k hořejším znamením plyne

$$(18)\qquad \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{r^2 - a^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{r \cos \varphi}{\sqrt{r^2 - a^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\mu r}{\sqrt{r^2 - a^2}};$$

$$(19)\qquad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -a \sin \varphi + \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = a \cos \varphi + \sqrt{r^2 - a^2} \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = b.$$

Na základě těchto rovnic dostaneme

$$(20)\qquad \Delta_{xy} = r, \quad \Delta_{yz} = -\frac{b + \mu a}{\sqrt{r^2 - a^2}} r \cos \varphi - \mu r \sin \varphi,$$

$$\Delta_{zx} = -\frac{b + \mu a}{\sqrt{r^2 - a^2}} r \sin \varphi + \mu r \cos \varphi.$$

Z toho plyne dále

$$(21)\qquad \sqrt{\Delta_{xy}^2 + \Delta_{yz}^2 + \Delta_{zx}^2} = r\sqrt{(1 + \mu^2) + \frac{(b + \mu a)^2}{r^2 - a^2}};$$

avšak

$$1 + \mu^2 = 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

tak že

$$(22)\qquad \sqrt{\Delta_{xy}^2 + \Delta_{yz}^2 + \Delta_{zx}^2} = \frac{r}{\sin \alpha}\sqrt{1 + \frac{(a \cos \alpha + b \sin \alpha)^2}{r^2 - a^2}}.$$

Položíme-li dále

(23) $$a \cos \alpha + b \sin \alpha = c,$$

dostaneme

(24) $$O = \frac{1}{\sin \alpha} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + \frac{c^2}{r^2 - a^2}}\, r\, dr,$$

kde $r > a$.

Jedná se tedy o vyčíslení integrálu *)

(25) $$J = \int \sqrt{1 + \frac{c^2}{r^2 - a^2}}\, r\, dr\;;$$

k tomu cíli položme

$$r^2 - a^2 = t^2,$$

z čehož

$$r\, dr = t\, dt,$$

tak že dostaneme

$$J = \int \sqrt{1 + \frac{c^2}{t^2}} \,.\, t\, dt = \int \sqrt{c^2 + t^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left[t \sqrt{c^2 + t^2} + c^2\, l \left(t + \sqrt{c^2 + t^2} \right) \right];$$

jest tedy

(26)

$$J = \frac{1}{2} \left[\sqrt{r^2 - a^2} \sqrt{r^2 + c^2 - a^2} + c^2\, l \left(\sqrt{r^2 - a^2} + \sqrt{r^2 + c^2 - a^2} \right) \right].$$

Dosazením do (24) plyne

(27) $$O = \frac{1}{2 \sin \alpha} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Big[\sqrt{r^2 - a^2} \sqrt{r^2 + c^2 - a^2} +$$

$$+ c^2\, l \left(\sqrt{r^2 - a^2} + \sqrt{r^2 + c^2 - a^2} \right) \Big]_{r_1}^{r_2} d\varphi.$$

Dosadíme-li za r_1 a r_2 příslušné hodnoty, plynoucí z rovnice (13), můžeme pak dále integrovati dle φ v mezích od φ_1 do φ_2.

Dá se tedy komplanace šroubových ploch přímkových tohoto rázu převésti na jednoduchou kvadraturu.

*) Pro stručnost vynechána tu i na dále integrační konstanta při neomezených integrálech.

V tomto obecném případě jsou obsaženy dva zvláštní případy *zborcených ploch šroubových*, jež se v technické praksi vyskytují.

Pro $a = o$, $\alpha \gtrless \frac{\pi}{2}$ dostaneme *obyčejnou kosoúhlou plochu šroubovou*, kdežto pro $a = o$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dostaneme *obyčejnou pravoúhlou plochu šroubovou.*

3. Stotožní-li se však pokaždé povrchová přímka m dané plochy v bodě P s tečnou přímkou řídící šroubovice, přejde daná plocha *v rozvinutelnou plochu tečen řídící šroubovice.*

Budiž γ úhel tečny šroubovice s povrchovou přímkou příslušné plochy válcové, potom platí

$$\operatorname{tg} \gamma = \pm \frac{2 \pi a}{v} = \pm \frac{a}{b}. \tag{28}$$

V našem případě nutno vzíti znamení dolejší, t. j.

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{a}{b},$$

čili

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha = - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{29}$$

Z rovnice (23) pak plyne

$$c = b \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - a \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0. \tag{30}$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do rovnice (24), dostaneme

$$O = \frac{1}{\sin \alpha} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} r \, dr \, d\varphi. \tag{31}$$

Ježto však

$$dx \, dy = \Delta_{xy} \, dr \, d\varphi = r \, dr \, d\varphi,$$

kde Δ_{xy} jest funkcionální determinant vyznačený v rovnici (17), musí

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} r \, dr \, d\varphi = \int_{\Omega} \int dx \, dy = \Omega. \tag{32}$$

Máme tedy

(33) $$O = \frac{\Omega}{\sin\alpha} = \frac{\Omega}{\cos\beta},$$

je-li α úhel tečny šroubovice s její osou a $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ sklon tečné roviny rozvinutelné plochy šroubové podél zmíněné tečny s rovinou, kolmo k ose šroubovice. Tečná přímka šroubovice jest přímkou největšího sklonu tečné roviny rozvinutelné plochy šroubové vůči rovině, kolmé k její ose.

Nezávisí tedy velikost obsahu obrazce, ležícího na rozvinutelné ploše šroubové, jejíž řídící kužel jest točný, ani na místě ani na tvaru omezující křivky, nýbrž jedině na velikosti pravoúhlého průmětu obrazce do roviny kolmé k ose plochy.

Veškeré tečné roviny plochy jsou k této rovině stejně nakloněny.

Obsah obrazce na ploše rovná se obsahu pravoúhlého průmětu tohoto obrazce do zmíněné roviny, dělenému cosinem úhlu tečných rovin plochy s touto rovinou.

4. Stanovme obsah obrazce, ležícího na přímkové ploše šroubové, dané rovnicemi (10), (11) a (12) se zřetelem k hořejším znamením, a obsaženého mezi válcovými plochami

(34) $$r_1^2 = a^2, \quad r_2^2 = a^2 + h^2,$$

jakož i mezi povrchovými přímkami

(35) $$\varphi = \varphi_1 \quad \text{a} \quad \varphi = \varphi_2.$$

Při tom značí h délku pravoúhlého průmětu úsečky na povrchové přímce, obsažené mezi bodem řídící šroubovice a bodem omezující křivky, do roviny (XY).

Ježto jsou meze r_1 a r_2 konstantní hodnoty, plyne z rovnice (27) vzorec

(36) $$O = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2 \sin\alpha} \left\{ h\sqrt{h^2 + c^2} + c^2 l\left(\frac{h + \sqrt{h^2 + c^2}}{c}\right) \right\}.$$

Pro obsah obrazce, omezeného válcovými plochami

(37) $$r_1^2 = a^2 + h_1^2, \quad r_2^2 = a^2 + h_2^2$$

a povrchovými přímkami (35), dostaneme

(38)

$$O=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2\sin\alpha}\left\{h_2\sqrt{h_2^2+c^2}-h_1\sqrt{h_1^2+c^2}+c^2 l\left(\frac{h_2+\sqrt{h_2^2+c^2}}{h_1+\sqrt{h_1^2+c^2}}\right)\right\}.$$

Stanovme dále obsah obrazce, obsaženého mezi válcovými plochami

(39) $$r_1^2=a^2,\quad r_2^2=a^2+(g\varphi+h)^2$$

a mezi povrchovými přímkami (35).

Položme*)

(40) $$t=g\varphi+h,$$

z čehož

$$dt=g\,.\,d\varphi.$$

Z rovnice (27) pak plyne

$$O=\frac{1}{2\sin\alpha}$$

$$\left\{\frac{1}{g}\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{c^2+t^2}\,.\,tdt+\frac{c^2}{g}\int_{t_1}^{t_2}l\,(t+\sqrt{c^2+t^2})\,.\,dt-c^2\,.\,lc\,.\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\right\}.$$

avšak

$$\int\sqrt{c^2+t^2}\,.\,tdt=\frac{1}{3}(c^2+t^2)\sqrt{c^2+t^2},$$

$$\int l\,(t+\sqrt{t^2+c^2})\,.\,dt=t\,.\,l\,(t+\sqrt{c^2+t^2})-\sqrt{c^2+t^2};$$

označíme-li

(41) $$t_1=g\varphi_1+h,\quad t_2=g\varphi_2+h,$$

dostaneme

(42)

$$O=\frac{1}{2\sin\alpha}\left\{\frac{1}{3g}\left[(c^2+t_2^2)\sqrt{c^2+t_2^2}-(c^2+t_1^2)\sqrt{c^2+t_1^2}\right]\right.$$
$$+\frac{c^2}{g}\left[t_2\,.\,l\left(t_2+\sqrt{c^2+t_2^2}\right)-\sqrt{c^2+t_2^2}-t_1\,.\,l\left(t_1+\sqrt{c^2+t_1^2}\right)\right.$$
$$\left.\left.+\sqrt{c^2+t_1^2}\right]-c^2\,.\,(\varphi_2-\varphi_1)\,.\,lc\right\}.$$

---

*) Geometrický význam veličiny t jest zřejmý.

Pro $g = o$ jest $t_1 = t_2 = h$ a tu nastává případ vyznačený v rovnici (36). Patrno, že pro tento případ podává vzorec (42) neurčitou hodnotu ve formě zlomku $\frac{0}{0}$.

Stanovíme-li pravou hodnotu, derivujíce čítatele i jmenovatele dle veličiny g, dospějeme k hodnotě, vyjádřené vzorcem (36).

Chceme-li stanoviti obsah obrazce, obsaženého mezi válcovými plochami

(43) $$r_1^2 = a^2 + t^2, \quad r_2^2 = a^2 + T^2,$$

kde

$$t = g\varphi + h, \quad T = G\varphi + H,$$

napíšeme ve vzorci (42) T místo t a G místo g; od výrazu takto utvořeného odečteme pak výraz na pravé straně rovnice (42) se nalézající.

Patrno, že ve výsledném vzorci nevyskytne se více člen

$$(\varphi_2 - \varphi_1)\, c^2 \,.\, lc.$$

V Praze, ke konci května 1907.

XII.

Studie o temnostní flóře jeskyň Sloupských.

Napsal Fr. Straňák.

(S 2 obrazy a 8 reprodukcemi fotografií.)

Práce z ústavu pro fysiologii rostlin c. k. české university.

Předloženo v sezení 14. června 1907.

Úvod.

Od dávné doby snažila se přírodověda proniknouti také do temných hlubin naší země. Geologie a mineralogie vedeny a podporovány praktickou rukou prastarého dolování a hutnictví předcházely přirozeně na této cestě výzkumům zoologickým a botanickým a daly jim také jistě první popud k šťastnému následování. Hluboko položená místa pod povrchem země, pokud byla jako sluje, šachty nebo studny přístupna, byla dříve pokládána za mrtvé massy kamenné, a toliko prostorám proniknutým světlem a vzduchem přikládán byl život, a zde jedině hledáno pole pro biologické badání. Než ponenáhlu tyto nevlídné prostory stávají se přístupnými i vědám o životě organickém: zoologii a botanice a to při živém zájmu o obtížnou, ale lákavou věc s výsledkem zcela patrným.

Pokrok, jejž tyto podzemní výzkumy v nové době vykonaly, souvisí úzce také s všeobecným zájmem a snahou naší doby. Tak stala se pro další poznání mnohých jeskyň důležitou činnost moderní anthropologie od doby, kdy vykopávky ukázaly, že se v nich nacházejí důležitá praehistorická naleziště. Vzhledem k mnohým hlubokým studním můžeme spatřovati podobný podnět v hygienické snaze nové doby. Nelze také přehlédnouti, jak neocenitelného povzbuzení dostalo se pracím o podzemním životě Darwinovou theorií ve příčině při-

způsobování se forem a proměn jejich vlivem změny existenčních podmínek. Vždyť není tendencí ani konečným přáním nalézti pokud možno mnoho a zcela nových druhů, nýbrž v první řadě nutno prozkoumati, jak tyto zvláštní a charakteristické formy podzemní z příbuzných druhů povrchových se vyvinuly.

Bohatý materiál, jenž až dosud z podzemních výzkumů byl nám poskytnut a téměř každoročně novými cennými příspěvky ještě se rozmnožuje, spadá převážnou většinou do oboru zoologie; rostlinné vegetace bylo mnohem méně si všímáno. Příčinu toho dlužno hledati hlavně v mnohem větší bohatosti i rozmanitosti podzemních organismů živočišných než rostlinných.

Je přirozeno, že otázka po organickém životě podzemním zvlášť v těch krajinách se vynořila a badatelům téměř s jistou neodbytností se vtírala, kde se právě podobné rozsedliny a dutiny podzemní zvláště hojně vyskytují, jež, pokud byly již schůdnými nebo takovými teprve učiněny, samy sebou vyzývaly k výzkumům. Vedle několika propastí (Padirac), různých dolů (Šťávnice) a podzemních staveb (pařížské katakomby) byla to dvě výzkumná centra slynoucí četnými jeskyněmi, jež až dosud byla předmětem téměř všech známějších a důležitějších prací z našeho oboru: Kras v Rakousku, kteréžto území již dávno bylo zváno „terre classique des cavernes“ (Martel) a rozsáhlé území americké, z něhož zvlášť vyniká Kentucky s jeskyněmi Mamutími. Typické území krasové na Moravě s rozsáhlými jeskyněmi a propastmi zůstávalo dlouho nedotknuto biologickými studiemi. Částečnou vinu toho nesli ovšem lokální sběratelé, jejichž zájem bral se cestou přísně jednostrannou, museální, jsa vybaven a podporován velkým bohatstvím zbytků zvířat pleistocenních v sedimentech uložených. Že však tím bylo zanedbáno vděčné pole biologické, ukázalo se, když byla konstatována přítomnost bohaté jeskynní fauny, ať už stále nebo dočasně podzemí obývající (Absolon 1896—1906). Když pak zároveň uvedeny v proud výzkumy geografické, směřující mezi jiným k řešení problému podzemních toků Punkvy, jakož i opětované výpravy na dno propasti Macochy, na nichž jsem sám, počínaje II. expedicí, bra podíl (1903—1905), potřeba studia flory jeskyň moravských sama sebou se ohlašovala. Všechny zde uvedené i jiné důvody povzbuzovaly mne, abych systematicky řešení thematu flory podzemní se věnoval.

Z jeskynních systémů moravského devonu jest největší podzemní bludiště Sloupsko-šošůvské, jež náleží k nejrozsáhlejším jeskyním v Evropě vůbec, dosáhnuvši po objevech nejnovější doby rozsahu 5 *km*. Již tímto mohla býti stanovena lokalita, v níž studium flory

jeskynní s nadějí na výsledek mohlo býti konáno. Když pak v řadě let dostatečně jsem poznal biologické poměry těchto podzemních prostor, potvrdilo se úplně mínění již dříve chované, že jsou to skutečně jeskyně Sloupské a sice Staré Skály (horní patro), jeskyně Nicová a jeskyně Eliščina, jež náležejí k jeskyním v krasovém území moravském na rostlinné organismy nejbohatším.

Práce, jejíž výsledek zde podávám, vztahuje se ku mykologické floře jeskyň Sloupských. Ačkoliv jsem měl původně v úmyslu v jeden celek zpracovati veškerý rostlinný materiál z těchto lokalit, tedy i passivně zanesené rostliny jevnosnubné, jejichž existence v abnormálním prostředí má jistou zajímavost pro rostlinnou oekologii, a mohla by býti vděčným studijním materiálem pro rozluštění některých problémů rostlinné fysiologie, nebylo mi přece možno tuto zajímavou stať zařaditi v program této práce. Množství materiálu a jeho nesnadné jak systematické, tak biologické zpracování byly hlavní příčinou, že práci omeziti jsem musil na zmíněné rozměry. Že se tak stalo jen ve prospěch předkládaného spisu, ukázalo se již na počátku studia. Nesnadné určování druhů pro deformace tvarů, změnu zbarvení a sterilnost, dlouho trvající pozorování jednotlivých biologických zjevů na stanovištích samých, jež musila býti konána ve všech ročních dobách, zpracování anatomické, jakož i některé pokusy fysiologické přesvědčily mne nejen o rozsáhlosti podstoupeného studia, nýbrž také o obtížích, jež s úplným a všestranným jeho zpracováním jsou spojeny. Z těchto důvodů bylo nutno omeziti práci na studium podzemních hub, jich systematiku a k nim se vztahující pozorování biologická — jednak všeobecná, jednak některých charakteristických druhů zvlášť.

Do části illustrační pojal jsem v kresbách druhy, jež buď pro choulostivost, buď pro nepatrnou velikost jejich nebylo možno zachytiti strojem fotografickým. Vedle toho zhotovil jsem řadu snímků fotografických význačných jeskynních forem, z nichž mnohé byly exponovány na stanovištích samých při umělém světle. Se sbíráním materiálu a biologickým studiem, jež bylo třeba konati na místech samých, započal jsem již r. 1905, načež systematické spracování, pokusy fysiologické, jakož i spracování celé látky konal jsem v ústavu pro fysiologii rostlin c. k. české university v Praze za vedení ředitele ústavu pana prof. Dra Boh. Němce. Pokládám za milou povinnost vysloviti svému váženému učiteli upřímný dík za stále prokazovaný zájem a četné rady, jimiž mne po dobu mé práce provázel, jakož i za vzácnou blahovůli, s níž mi laboratoře svého ústavu k používání přikázal. Můj

přítel Dr. Karel Absolon, universitní assistent, s nímž jsem prožil tolik nezapomenutelných chvil v podzemí krasu moravského, vypomohl mi ochotně zapůjčením vzácné literatury. Velkým díkem jsem zavázán slavnému zemskému výboru markrabství moravského, jenž uděliv mi podporu 200 K umožnil mi provedení mých výzkumů.

Část literárně-historická.

Již velmi záhy bylo různým badatelům známo, že sklepy, doly a podobné podzemní lokality chovají zvláštní houbovou floru. Dle Humboldta již v první polovici 18. století zkoumal Angličan Brown důlní vegetaci v Herefordshire, a mnohé většinou jménem Byssus označené formy podzemní jsou v různých pracích již od botaniků z dob Linneových uvedeny.

První vážné studium o podzemní vegetaci pochází teprve od známého rakouského přírodozpytce J. Ant. Scopoli-ho. Týž již ve svém díle Flora Carniolica (1760)[1]) popsal několik druhů nalezených v dolech idrijských a krajinských, později pak ve známých Dissertationes (1772)[2]) podal ve zvláštní stati první důkladnější popis i vyobrazení 75 forem, pocházejících z dolů uherských a krajinských. Vyobrazení jsou sice poněkud hrubá, leč přece tak dalece přirozená, že při opětném nálezu není obtížno je poznati.

Práce tohoto autora byly hned na to opakovány Schmidlem (1773), Scharfferem (1777)[3]) a Schmidlem (1782),[4]) kteří však většinou o výsledcích svých nálezů podali zprávy méně cenné.

Teprve konec 18. a počátek 19. století přinesl několik znamenitých prací. Byl to Bulliard (1791),[5]) Humboldt (1793)[6]) a Hoff-

---

[1]) Scopoli, Flora Carniolica exhibens plantas Carnioliae indigenas. — Vindobonae, 1760.

[2]) Scopoli, Dissertationes ad scientiam naturalem pertinentes. Plantae subterraneae descriptae et delineatae. P. 84—120, C. tab. I.—XLVI. Pragae 1772.

[3]) Scharffer, Fungorum Bavaria et Palatinat, 1777.

[4]) Schmidel, Icones plantarum, 1782.

[5]) Bulliard, Herbies de la France (champignons, plantes médicales et vénéneuses etc.). Paris, 1780—1798, avec 602 pl. col., 13 tabl.

[6]) Humboldt, Florae Fribergensis specimen plantas cryptogamicas praesertim subterraneas exhibens, Berolini, 1793.

MANN (1811),[7]) kteří svými výzkumy o flóře podzemní dobyli si zásluh značných. Je pozoruhodno, že studia tehdejších badatelů nesla se jedním zvláštním směrem, jehož houževnatě se držela. Byla to, abych tak řekl, snaha po vyhledávání nových forem, druhů i rodů, jimž dávána nejrůznější nová jména. Sám HUMBOLDT, popisuje důlní houby z okolí Freiberka, pojal většinu abnormit za samostatné druhy, některé pak dokonce za typy nových rodů. Že je tu souvislost oněch forem, jež za změněných podmínek existenčních berou na sebe často nejrozmanitější podoby, s jinými normálními, které na světle rostou, to nenapadlo asi tomuto přírodopisci, pro něhož byly ony novými charakteristickými druhy, jež podle toho také příslušně klasifikoval. Na témže stanovisku stál i HOFFMANN, jenž r. 1811 vydal nádherné dílo v podobě velkého rostlinného atlantu, obsahující hlavní kryptogamické formy, jež od r. 1796—1802 v opuštěných dolech u Klausthalu a Zellerfeldtu byl nasbíral.

Roku 1823 vydal NEES z ESENBECKU[8]) obšírnější spis o světélkování podzemních rhizomorf, v němž vedle stati, jednající o světélkování této formy houbové, podává popis dvou světélkujících druhů rhizoformy, pocházejících z olověných a uhelných dolů.

Nedlouho na to vyšly také ve Francii dvě pozoruhodnější práce o podzemní flóře od CHEVALLIERA (1826).[9])

Krasové jeskyně po SCOPOLIM botanicky důkladněji prozkoumal teprve WELWITSCH, podniknuv r. 1836 výpravu do známé jeskyně Postojenské; získaný rostlinný materiál uložen je v botanických sbírkách vídeňského musea.

Zlákán úspěchy WELWITSCHOVÝMI podnikl r. 1852 POKORNY[10]) společně s A. SCHMIDLEM výpravu do Postojny, kterou i s jeskynním bludištěm Lueggským hlavně floristicky prohledali. Práce jeho je důležita hlavně tím, že se v ní vyskytuje první začátek řešení otázek

---

[7]) HOFFMANN F., Vegetabilia in Hercyniae subterraneis collecta, Norimbergae, 1811.

[8]) NEES v. ESENBECK, Die unterirdischen Rhizomorphen, ein leuchtender Lebensprocess, Bonn, 1823.

[9]) CHEVALLIER F., Flore des environs de Paris, 1826—1827, I, p. 80.

Id., Fungorum et Byssorum illustrationes Lepsiae. Paris. 1837, édit. Baillière, 2 fasc., 83 pl. coloriées.

[10]) POKORNY A., Unterirdische Flora der Karsthöhlen, Verhandl. d. zool.-botan. Ver. in Wien. Bd. III. 1853. Wien. P. 114—116.

Id., Zur Flora subterranea der Karsthöhlen, A. SCHMIDL, Die Grotten und Höhlen von Adelsberg, Luegg, Planina und Laas. Wien, 1854. P. 221—229.

biologických. Jakkoliv jeho výsledky v té věci byly velmi nepatrné, přece již možno od té doby pozorovati v podzemním botanisování zřejmý obrat.

V době tohoto převratu vyšlo pak ve Francii několik prací, jež nesly se již většinou směrem Pokorným naznačeným. Je to skupina prací od de Candolle-ho (1855),[11]) Soubeyrana (1856),[12]) Montagneho (1855—1858),[13]) Cazina (1859)[14]) a Charneauxa (1870),[15]) kteří s větším nebo menším úspěchem pokoušeli se studovati podzemní vegetaci již i po stránce biologické. Energicky hnul touto otázkou teprve E. Fries (1861),[16]) jenž na základě pozorování vývoje jeskynních forem první hleděl stanoviti souvislost jejich s druhy povrchovými. Pozoroval, kterak houby ve tmě nabývaly nepravidelných tvarů, nevytvořovaly kloboukůl, jak se prodlužovaly do délky, jak často se rozvětvovaly a kterak formy beznohé nabývaly tření. Dle těchto pozorování snažil se Fries houby, jež dřívější autoři popsali jako formy temnostní, stotožniti s druhy pozemními. Humboldtova *Ceratophora fribergensis* byla pouhou monstrositou od *Polyporus odoratus* Wulf; *Boletus ramosus* náležel ku *Polyporus imbricatus* Bull. a často již popisovaná *Ramaria ceratoides* byla znetvořeninou od *Lentinus lepideus* Fr. Též velký počet forem označených jmény *Byssus, Ozonium, Fibrillaria*, *Hypha*, *Rhizomorpha* atd. byla pouhá mycelia hub, jež následkem nedostatku světla nevytvořila plodnic a zůstala sterilními.

---

[11]) Candolle A. de, Geographie botanique raisonée ou l'exposition des faits principaux et des loi concernant la distribution geographique des plantes de l'époque actuelle. 2 vol. Paris, 1855.

Id., Synopsis florae Galliae, 1855.

[12]) Soubeyran, Note sur un Champignon monstrueux de souterrains de l'établissement thermal de Bagnères-de-Luchon. (Bull. Soc. bot. de France. Paris. 1856.)

[13]) Montagne G., Plantes cellulaires nouvelles. (Ann. Sc. nat., t. IX., Paris, 1858.)

[14]) Cazin, Notice sur les Champignons qui croissent dans le galeries souterraines de l'établissement thermal de Bagnères-de-Luchon. Paris, 1859. (Ann. de la Soc. d'Hydrologie médicale de Paris, 1859, t. V.)

Id., Notice sur les Champignons qui croissent dans le galeries de Bagnères-de-Luchon. Rev. mycol., 1859, p. 25.

[15]) Charneaux, Voy Roumeguère, Histoire des Champignons d'Europe 1870, p. 36.

[16]) Fries E., Distribution géographique des Champignons. (Ann. des Sc. nat., 1861, XV., p. 10.)

Roku 1874 uveřejnil S. Fries[17]) ve Würtemb. naturw. Jahreshefte pojednání o jeskynní zvířeně a floře, v němž v kratší stati popisuje několik druhů, nalezených v jeskyni Falkensteinské.

K výzkumům podzemní flory v Krajině vrátil se r. 1879 známý rakouský botanik W. Voss,[18]) jenž v mykologických zprávách podává menší příspěvek ku poznání subterraních hub.

Ve Francii vyšlo v té době ještě několik menších prací o mykologické floře důlní od Fourcadea (1879),[19]) Roumeguère-a (1866, 1882)[20]) a Gillota (1882).[21])

V oboru podzemního biologického badání počínalo se znenáhla i v Americe pracovati. První práce toho druhu pocházejí od Hoveye (1879—1901),[22]) jehož příkladu následovali brzy Packard (1886)[23]) a Ellsworth Call (1897—1901),[24]) prozkoumavše celý rozsáhlý okrsek Mamutích jeskyní v Kentucky.

V Rakousku vyšla v té době práce, jednající o houbách z olověných dolů ve Štýrsku od Wettsteina (1884).[25])

---

[17]) Fries S., Die Falkensteiner Höhle, ihre Fauna und Flora. Ein Beitrag zur Erforschung der Höhlen in der schwäbischen Jura mit besonderer Berücksichtigung ihrer lebenden Fauna. Würtembergische naturw. Jahreshefte, 1874.

[18]) Voss W., Mykologisches aus Krain, Oesterr. bot. Zeitschr. 1879, Nr. 10.

[19]) Fourcade, Les Champignons des Galeries souterraines des thermes de Bagnères-de-Luchon. (Rev. mycol., 1876, p. 63.)

[20]) Roumeguère C., Champignons monstrueux des carrières de phosphate de chauc du Quercy. (Rev. mycol. de France, 1866, p. 200. pl.)

Id., Nouvel examen des Champignons des galeries thermales de Luchon. (Rev. mycol., 1882, p. 163.)

[21]) Gillot X., Note sur la Flore mycologique souterraine des environs d'Autun. (Rev. mycol. de France, 1882, p. 179.)

Id., Nouvelles observations sur quelques Champignons récoltés dans les galeries souterraines du Creusot et d'Allevard. (Rev. mycol. de France, 1882, p. 237.)

[22]) Hovey H. C., The scientific American, 1879.

Id., Celebrated american caverns especially Mammouth, Wyandoth and Luray. Cincinnati, R. Clarke and Co., 1882.

[23]) Pacard A. S., The cave fauna of North America with remarks on the anatomy of the brain and origin of the blind species. (The vegetable life of the caves, 1886, p. 25.)

[22], [24]) Hovey H. C. and Ellsworth Call R., Mammoth Cave of Kentucky. The natural history of the cavern. Plantae. P. 106—107. Louisville 1897, 1901.

[25]) Wettstein R. v., Beitrag zur Pilzflora der Bergwerke. Österreich. botan. Zeitschrift, Jahrg. 1884. Nr. 5. u. 6.

Pojednání od Schneidra (1885),[26]) Hartwiga (1885),[27]) Fruwirtha (1883—1888),[28]) jakož i nedávno vyšlé od Knebla (1906)[29]) mají toliko ráz článků učebnicových, nepopisujíce žádných vlastních výzkumů.

Až dosud při těchto výzkumech byla obrácena pozornost výhradně k houbám, kdežto ostatní podzemní vegetace zůstávala nepovšimnuta. První, kteří v tomto směru učinili pokrok, byli Francouzi Mazauric a Cabanes (1896),[30]) kteří uveřejnili první spis o podzemních rostlinách jevnosnubných z jeskyně u Dions v jižní Francii.

Práce, v nichž popsány některé mechy nasbírané u vchodu do jeskyní, pocházejí od Boulaye (1884)[31]) a Ravanda (1880).[32])

Konečně menší poznámky týkající se studia podzemních rostlin napsali ještě Seyne (1867—1891),[33]) Patouillard (1882),[34] Niel (1893)[35]) a Van Bambeke (1902)[36]).

---

[26]) Schneider R., Über subterrane Organismen. Programm d. k. k. Realschule, Berlin 1885.

[27]) Hartwig G., The subterranean World. New edition. London. 1885. Chapter XIV. Subterranean life. P. 156—159.

[28]) Fruwirth C., Ueber Höhlen. Die Pflanzenwelt der Höhlen. Zeitschrift des deut. und österr. Alpenvereins. Salzburg, Jahrg. 1883. Heft 1. P. 31—33.

Id., Die Höhlen der Vereinigten Staaten von Nordamerika. Dr. A. Petermanns Mitheilungen aus Justus Perthes' Geographischer Anstalt. Herg. von Prof. Dr. A. Supan. Bd. 34. 1888. Die Flora der Höhlen P. 208.

[29]) Knebel W. v., Höhlenkunde mit Berücksichtigung der Karstphänomene, Braunschweig, 1906. Die biologischen Verhältnisse in Höhlen. P. 196.

[30]) Mazauric et Cabanes, Le spélunque de Dions (Gard), Géologie, Faune et Flore (Mem. de la Soc. de Spél., 1896, t. l. n° 2).

[31]) Boulay (L'abbé), Muscinées de la France, 1re partie, Mousse, 1884.

[32]) Ravaud (L'abbé), Guide du Bryologue et du Lichénologue à Grenoble et dans les environs. Grenoble, 1880.

[33]) Seyne (De), Observations sur quelques Monstruosités chez les Champignons supérieurs (Bull. Soc. bot. de France, 1867).

Id., Conidies de l'Hydnum Coralloides (Bull. de la Soc. mycol. de France, 1891, p. 77).

[34]) Patouillard, Observations sur quelques Hymenomycetes (Rev. mycol 1882, p. 208.).

[35]) Niel, Note sur le Clytocybe cryptarum Leteil (Rev. mycol., 1893, p. 78.).

[36]) Van Bambeke, Sur un exemplaire monstrueus de Polyporus sulfureus (Bull. Soc. mycol. de France, 1902, t. XVIII. 1er fasc., p. 54).

R. 1889 začal uveřejňovati svá první pozorování o tomto předmětě J. Maheu;[37]) řadu četných jeho prací zakončuje obšírný spis o podzemním rostlinstvu, v němž autor na základě vlastních i cizích výzkumů s pečlivou zevrubností systematicky i biologicky popisuje celou dosud známou podzemní floru své vlasti.[38])

Práce obsahuje podzemní formy tajnosnubných cévnatých, mechů, jatrovek, řas, lišejníků a hub jednak z přirozených dutin zemských, jako jeskyní a propastí, jednak z dutin umělých, jako z dolů, lomů a pařížských katakomb. Při tom jsou jednotlivé důležitější druhy zvlášť popsány a morfologicky, anatomicky a biologicky zpracovány.

Vedle toho podává autor přehled historie studia a ku konci krátkou stať o původu jeskynního rostlinstva. Pokud se týče podzemních hub, shrnuje výsledky v následujícím krátkém obsahu:

---

[37]) Maheu J., Note sur le Champignons observés dans les profondeurs des causses Méjan et de Sauveterre. Bull. Soc. mycol de Fr., t. XVI. fasc. 4. 1900. p. 191.

Id., Florure des avens des causses Méjan et de Sauveterre Bull. du Mus. d'Hist. nat., 1900, n° 5., p. 254.

Id., (G. de Lamarlière et), Sur la flore des Mousses des cavernes. Comp. Acad. des Sc., avril 1901.

Id. G. de Lamarlière et), Sur la flore bryologique des grottes du Midi de la France, Bull. Soc. Bot. de Fr., t. XLVIII., 1901.

Id. Contribution à l'étude de la flore des causses. Rev. Ampère, octobre 1901, n° 7, p. 99.

Id. (G. Lamarlière et), Sur les Muscinées des cavernes de l'Yonne. Journ. de Bot., t. XVI., n° 8, 1902, 1 pl.

Id., (G. Lamarlière et), Sur les affinités géographiques des Muscinées des cavernes. Assoç. franc. pourl' avanc. des Sc., Montanbau 1902, p. 674.

Id., Contribution à l'étude des eaux souterraines du gard. Bull. Soc. d'etud Sc. nat. de Nimes, 1902, p. 87.

Id., Contribution à l'étude de la flore obscurielle de France. C. R. du Congrès des Soc. savantes. Paris, 1902.

Id., Recherches anatomiques sur les Ménispermacées. Journal de Botanique, t. XVI., n° 11, 1902.

Id., Sur quelques Muscinées cavernicoles des terrains siliceux. Assoc. franc. pour l' avancement des sciences. Congrès d'Angers, 1903, p. 722-726.

Id., La flore spéléologique. Revista italiana di Speleologia, n° 4. Bologna, 1903.

Id., La flore souterraine des cavernes de la cure (Yonne). C. R. du Congrès des Sociétés savantes en 1903.

Id., Étude géologique et biologique (flore) des Cavernes de la haute Italiane centrale. C. R. du Congrès des Soc. savantes. Paris 1904.

[38]) Maheu J., Contribution à l' étude de la flore souterraine de France. Annales des sciences nat., botanique, t. III. 9° série. Paris 1906. 189 p. 35 fig.

Vlivem podzemního prostředí jeví se na celku orgánů podzemních hub:

1. prodloužení třeně,
2. změna barev,
3. deformace hymenia,
4. zánik schopnosti vytvořovati spory,
5. zánik ústrojí sporiferního a
6. produkce konidií.

Pozoruhodná je také práce Bonierova (1906),[39]) obsahující nové zprávy o fosforeskující vegetaci jeskynní.

Pokud se moravské spelaeobotaniky týče, tu možno jmenovati nejprve Wankela (1882),[40]) jenž ve svých „Bilder aus der Mährischen Schweiz" první konstatoval přítomnost vegetace v jeskyních Sloupských. R. 1899 Absolon uveřejnil stať „Našim botanikům",[41]) v níž na vděčné studium flory jeskynní upozorňoval. Navazuje na tyto zprávy, studoval jsem nejprve floru propasti Macochy, podal výpočet pozorovaných forem,[42]) kterýžto materiál sloužil Dru Dominovi k zajímavé črtě fytogeografické.[43]) Thema rozvinul jsem pak obšírněji v pojednání obsahu systematicko-floristického,[44]) od něhož pokročil jsem ku studiu dnešnímu.

Část biologická.

Ježto pro všestranné porozumění jeskynní vegetace, především pak jejího původu, jakož i pro srovnání její s druhy povrchovými je nezbytno seznati její lokální podmínky existenční, je nutno i zde o těchto se zmíniti. Z činitelů, jež pro rostlinný život v jeskyních jsou velké důležitosti, uvádím hlavně relativní výšku, vzdálenost od povrchu, jakost substrátu, světlo, teplotu a vlhkost vzduchu.

---

39) Bonnier G. La faune et la flore des cavernes. La Revue, ser. 4, fasc. 22; p. 227-238. Paris, 1906.

40) Wankel H., Bilder aus der Mährischen Schweiz und ihrer Vergangenheit. Wien 1882. P. 209.

41) Absolon K., Našim botanikům, Vesmír roč. XXIX. p. 84.

42) Absolon K., Propast Macocha na Moravě. Praha 1904, p. 53-55.

43) Ibidem, p. 56-58.

44) Straňák Fr., Květena propasti Macochy. Časopis Vlast. spol. musej. v Olomouci. Č. 91 a 92. 1906.

Co se týká rozdílů výšek terrainu venkovního a míst v jeskyních floristicky prozkoumaných, jest tento jen velmi nepatrný, nedosahuje ani 10 metrů.[45])

Chodby jeskyní Sloupských zabíhají velmi daleko do podzemí a jsou proto vzdálenosti míst botanicky důležitých od vchodů jeskynních velmi značné. Tak jest Spojovací síň od vchodu do předsíně jeskyní Sloupských vzdálena 80 *m*, vlastní jeskyně Nicová 120 *m*, střed velké síně v jeskyni Eliščině 150 *m*, Turecký hřbitov v téže jeskyni 170 *m*, střed I. dómu ve Starých Skalách od hlavního vchodu téže jeskyně 75 *m*, okraje propasti 135 *m*, Řezaný kámen 220 *m*, konec chodby „ve Stříbrné" 440 *m*.

Veliký vliv na vývoj jeskynní vegetace má substrát. Půdu v chodbách a síních jeskyň Sloupských tvoří jednak náplava diluviální hlíny, jednak vápencové balvany a štěrk; mimo to jsou však některá místa pokryta nánosem, jejž tam rozvodněný potok každoročně v mocných vrstvách ukládá a jenž sestává z humusu, písku, listí, jehličí, větví i celých kmenů. Velké nánosy jsou hlavně ve Starých Skalách podél jeskynního řečiště a u Propástky. Důležitým substrátem je ve Sloupských jeskyních také trus netopýrů, Na místech, kde netopýři ve větších shlucích (někdy až 500 kusů) zimu nebo den přespávají (hlavně *Vespertilio murinus* Schreb.), povstávají silné vrstvy výkalu (guana) netopýřího, hromadícího se někde ve vysoké kupy (Staré Skály, chodba „ve Stříbrné" a u Prapasti). Guano to sestává z nestrávených zbytků zvířecích, hlavně hmyzích a promícháno jest hlínou.[46]) Rovněž i ojediněle na zemi nebo na zábradlích nalézáme malé kupky tohoto trusu.

Za důležitý substrát dlužno konečně považovati všechny dřevěné předměty v jeskyních, jako pažení v chodbách, zábradlí a schody, jež byly zde za tím účelem zhotoveny, aby se staly jeskyně pro návštěvníky schůdnými.

Co se týká poměrů světelných, je nutno rozlišovati místa, jež jsou poměrně dostatečně osvětlena denním světlem (tlumené denní světlo) od oněch, kam jen slabé záblesky jeho dopadají (pološero) a konečně od těch, jež postrádají světla slunečního úplně (absolutní temnota). K první skupině míst náleží předsíně jeskyně Nicové a

---

[45]) Ohledně topografie viz K. Absolon, Kras Moravský. Díl I. 1907. Mapa jeskynního bludiště sloupsko-šošůvského.

[46]) Absolon K., Einige Bemerkungen über die mährische Höhlenfauna Zool. Anzeiger Bd. XXIII. N° 612, 1900 p. 192-198.

Starých Skal, ke druhé obě souběžné chodby v jeskyni Nicové a prostor za předsíní ve Starých Skalách; všechny ostatní lokality v jeskyních Nicové, Eliščině a Starých Skalách náleží k místům absolutní tmy. Co se tkne světla umělého, je po dobu návštěvy osvětlována jeskyně Nicová a Eliščina světlem acetylenovým a Staré Skály loučí.

Teplota vzduchu v jeskyních je podrobena mnohem menším změnám a kolísáním než teplota vzduchu vnějšího; nikoliv však u všech jeskyní, ani na všech místech téže jeskyně stejně. Jeskyně s velkými vchody, s komíny na povrch vycházejícími a s protékajícími podzemními vodami mají mnohem nestejnoměrnější teplotu než jeskyně s vchody malými a jednostranně otevřené; rovněž mají různá místa téže jeskyně teplotu vzduchu tím konstantnější, čím dále jsou položena od povrchu. Rozdíl tento jeví se také u jeskyní Sloupských, z nichž jeskyně Eliščina má teplotu vzduchu nejstálejší, kdežto jeskyně Nicová a Staré Skály mají teplotu méně konstantní.

Thermometrická měření, činěná v různých dobách ročních, dávají následující výsledky.[47])

Teplota vzduchu	12./5. 1906	23./8. 1906	18./12. 1906	1./1. 1907	9./3. 1907	Rozdíl maxima a minima
na povrchu (ve stínu)	+ 15° C	+ 20° C	— 5° C	— 8° C	— 5° C	28° C
v předsíni jeskyně Nicové	+ 11·8° C	+ 16·5° C	— 3° C	— 6° C	— 4·5° C	22·5° C
ve velké síni jeskyně Eliščiny	+ 9° C	+ 10° C	+ 6·5° C	+ 6° C	+ 6·2° C	4° C
u Propasti ve Starých Skalách	+ 9·8° C	+ 12° C	+ 4° C	+ 3·8° C	+ 4·5° C	8·2° C

Konečně vážným biologickým činitelem v jeskyních jest vlhkost vzduchu a půdy. Jeskyně Sloupské chovají velmi hojně vody, která jednak s povrchu prosakujíc lehce propustným vápencem devonským stéká téměř na všech místech po stěnách nebo se stropu kape, vytvářejíc podivuhodné tvary krápníkové, jednak dostává se sem rozvodněným potokem Sloupským (Staré Skály). Je proto pochopitelno, že i vzduch jest zde nasycen vodními parami, které opět na všech objektech v jeskyních se sráží, činíce je vlhkými. Z jeskyní Sloup-

[47]) Měření byla konána vždy mezi 11—1 hodinou denní.

ských nejvlhčí je jeskyně Eliščina, méně vlhkými jsou Staré Skály a jeskyně Nicová, kdežto nepatrnou vlhkost vykazují některé výše položené nebo odlehlé lokality (souběžné chodby, chodba „ve Stříbrné").

Po předešlé stati, jež seznámila nás dostatečně se všemi podmínkami existenčními, jež v jeskyních vládnou a na nichž výhradně závisí celý vývoj tamních rostlinných organismů, přistupuji k vlastnímu předmětu pojednání.

Naskytá se nejprve otázka původu jeskynní flory. Jako rozdělují zoologové zvířenu jeskyní dle biologických jich vlastností, můžeme na témž základě v míře ovšem omezenější děliti i jeskynní rostlinstvo. Jeskynní houby lze dle vzniku jich rozděliti na dvě skupiny. Do první kategorie zařadil bych druhy, jež, nejsouce výlučnými obyvateli jeskyň, vegetují zpravidla na jiných pro ně mnohem výhodnějších místech, ku př. v lesích nebo na lukách; do jeskyní dostávají se toliko náhodou z venku hlavně vodami, průvanem vzduchu nebo zvířaty a to buď výtrusy, buď již vyvinuté s náplavem nebo se zbytky a úlomky dřev, na kterých pak mohou vyklíčiti, resp. dále růsti. Pro choulostivost jejich nedaří se jim v jeskyních hlubokých a proto nalezneme je většinou jen u východů jeskyň, kde poměry světelné a tepelné nejsou ještě tak nepříznivy. Sem náleží velká většina jeskynních hub; takovými typickými druhy jsou na př. *Hydrophorus virgineus*, *Hypholoma sublateritium*, všechny zde se vyskytující druhy rodů *Coprinus*, *Lepiota* a *Naucoria*. Do druhé skupiny řadím druhy, jež vegetují i v nejodlehlejších končinách podzemních prostor a stávají se tak význačnými obyvateli jeskyň. Než pravé jeskynní flory ani tyto druhy nepředstavují, jelikož existence jejich není nikterak omezena výhradně na jeskyně. Jsou to druhy, které rády rostou na tmavých a vlhkých místech vůbec, jakými jsou sklepy, doly, studny, stoky a j. Náleží k nim ony monstrosně vyvinuté druhy s dlouhými třeněmi a zakrnělými klobouky (*Lentinus*, *Flammula*, *Mycena*), ony podivuhodné sterilní formy myceliové (*Ozonium*, *Hypha*, *Byssus*), jakož i četné drobné tvary, vegetující tu všude na hnijícím dřevě (Myxomycety, Zygomycety, Ascomycety).

Jisto jest, že uvedené rozdělení jeskynních hub je v těsném spojení s veškerými již zmíněnými biologickými činiteli jeskynními, jež jsou zde jedině směrodatnými pro existenci toho kterého druhu, určujíce jeho stanoviště, tvar, zbarvení i plodnost. Je to v první řadě substrát. Vyskytování se hub, organismů, jež z cizích ústrojných látek saprofyticky se vyživují, je jako všude jinde i zde vázáno na organický podklad. Je tudíž povaha substrátu, qualita a quantita jeho

výživných látek důležitým měřítkem pro vývoj hub jeskynních. Proto jsou náplavy listí, jehličí a dříví, jakož i všechny ze dřeva zhotovené předměty jako pažení v chodbách, schody a zábradlí téměř výhradným stanovištěm nejbujnější vegetace houbové; zvlášť výbornou živnou půdu dává hnijící dřevo. Charakteristickým substrátem je pak netopýří exkret, obsahující velké množství výtrusů plísně paličkovité (*Mucor Mucedo*), které tu za příznivého vlhka vyklíčují, vyhánějíce z mycelií vláskovité, stříbřité bílé plodonoše. Za to poměrně málo hub poskytuje půda hlinitá nebo kamenitá, chovajíc v sobě jen velmi nepatrné množství organických látek. Obyčejně pak, kde se nám na první pohled zdá, že některý druh vyrůstá z pouhého hlinitého substrátu (*Hypholoma sublateritium*, *Pluteus phlebophorus*, *Omphalia stellata*), při bližším ohledání místa seznáme, že i tu jsou třeba nepatrné zbytky těl ústrojných. Než i při této přítomnosti humosní potravy poměr množství jejího ku rozsahu organismů na ní závislých zdá se býti velmi nerovný; k rozřešení této biologické záhady v přítomné době nelze však podati bezpečného objasnění. Je zajímavo, že podobný zjev vyskytuje se i u hub povrchových a vedl mnohé botaniky k různým názorům. Tak dle Velenovského[48]) je připuštěna možnost, že vzrůst hub, zvlášť velkých kloboukatých druhů (*Boletus*, *Polyporus*, *Amanita*) neděje se toliko přijímáním potravy ze země, nýbrž jako u některých bakterií také assimilací látek z okolí atmosferického, jmenovitě volného dusíku.

Relativní výška rostlinných stanovišť, jejichž výšková difference od povrchového terrainu jest, jak jsme byli seznali, jen velmi nepatrná (maximum 9 *m*) nemá pro vývoj tamní flory žádného významu.

Za to však můžeme říci, že všechny změny a abnormity v biologii i anatomii této vegetace jsou závisly téměř na jediném směrodatném momentu — totiž na vzdálenosti stanovišť od povrchu zemského, s nímž úzce spojeni jsou všichni biologičtí činitelé, hlavně poměry světelné a klimatické, které tu současně se vzdáleností pozbývají pravidelnosti povrchové.

Mezi nejakutnější vlivy na vývoj jeskynních hub náleží poměry světelné. Že světlo má značný vliv na vzrůst hub, bylo již dávno jak pozorováním v přírodě tak i pokusy fysiologickými konstatováno. Tak již Fries s velkým důrazem praví:[49]) „Ad fructificationem fungorum requiritur calor et precipue Hymenomycetibus lux; sine luce

---

[48]) Velenovský Jos., Srovnávací morfologie, Díl I., Praha 1905, p. 34.

[49]) Fries E., Syst. orb. vegetab. I., p. 42.

numquam rite explicatur. Errant, qui fungos tenebrarum filios dicunt. Tenebrae omni vita vegetabili, exceptis forsan Algis radiciformibus et cryptophilis, oppositae et quantum fungi, vix aliae plantae a luce pendent. Omnis vegetatio reproductiva (flores et fructus veri) a luce determinantur. Fungi, fructibus analogi non sub inopia, sed potius sub crapula lucis concipiuntur". V novější pak době hlavně pozorování, konaná v tom směru Brefeldem[50]) a Elfvingem,[51]) potvrdila náhledy starších autorů a poskytla nové nálezy, jimiž účinnost světla na vývoj hub byla bezpečně prokázána. Jak již v části popisné bylo podotknuto, postrádají prostory jeskyní Sloupských úplně denního světla, jehož slabé záblesky dosahují toliko míst jeskynním vchodům nejbližších. Možno zde tudíž mluviti pouze o vlivu nedostatku světla. Je jisto, že absolutní temnota má, byť i ne jediný, jisté vůdčí vliv na jeskynní houby, způsobujíc za spolupůsobení ostatních činitelů v jejich tvarech i anatomické struktuře četné změny a nepravidelnosti.

V první řadě je to etiolisace, s níž setkáváme se u velké části druhů jeskynních; neobyčejné prodloužení třeni a redukce kloboukň jsou nejobecnějšími jejími znaky, jež hlavně u některých druhů velmi mocně vystupují (*Lentinus*, *Coprinus digitalis* (fot. 5.), *Mycena speirea*, *Omphalia* a j.). Prodloužení třeni povstává, jak Maheu tvrdí, vzrůstem buněk hyfových.[52]) V tom směru konal jsem sám srovnávací studia a sice u druhu *Coprinus digitalis* Batsch., který vyskytuje se v jeskyních Sloupských ve dvou formách: v předsíni jeskyně Nicové ve formě poměrně normálně vyvinuté a v jeskyni Nicové, kdež roste v úplné tmě ve formě velmi etiolované. Podélné řezy třeňmi obou těchto forem vykazují strukturu hyfového pletiva velmi odlišnou.

Kdežto u formy z předsíně j. Nicové skládá se houbové pletivo z parallelně a poměrně volně uložených vláken hyfových, složených z buněk podlouhle elipsovitých 30—40 μ širokých, 70—90 μ dlouhých, jsou u formy etiolované vlákna hyfová velmi těsně spolu spojena a buňky je skládající neobyčejně prodloužené, majíce sice toliko 15 μ šířky, za to však jsou 200—400 μ dlouhé. Z toho je patrno, že prodloužení celého organismu způsobeno je prodloužením buněk hyfových, nikoli rozmnožením jich.

---

50) Brefeld O., Ueber die Bedeutung des Lichtes für die Entwicklung der Pilze. (I. Mitth.) Sitzungsbericht d. ges. nat. Freunde zu Berlin 1877.

51) Elfving F., Studien über die Einwirkung des Lichtes auf die Pilze. Helsingfors, 1890.

52) Maheu J., Contribution à l'étude de la flore souterraine de France p. 164.

Vedle toho vyskytují se často formy větevnaté nebo parohovité, jež na svých koncích jen zřídka vytvářejí více méně vyvinuté kloboučky, častěji však vybíhají v sterilní hroty, čímž houba nabývá podob od tvaru normálního velmi odchylných (*Lentinus suffrutescens* (fot. 3.). Pozoruhodná je v tom směru práce Reinkeho,[53]) v níž autor vykládá vznik a vývoj takových parohovitých forem u druhu *Lentinus lepideus*: „Každá houba počíná svůj život klíčícím výtrusem, který již tak dobře představuje celou houbu jako mycelium, jež z něho se vyvíjí. Výtrus i mycelium obsahují embryonální substanci ve smyslu Nollově,[54]) která podle různých zevnějších podmínek různě se chová, produkujíc brzy formy parohovité, brzy plodnice. V obou však případech je ovládána zákonitou formou druhu *Lentinus lepideus*. V obou případech tvoří hyfy ve společném vývoji jednotný organisovaný systém, v obou případech vykazují vzrůst zvláštním způsobem uspořádaný. Na světle je nucena každá jednotlivá buňka hyfová jinak se chovati než ve tmě. Toto donucení může býti vykládáno jen jako uvolnění zvláštních vzrůstových disposic, které jsou dány v embryonální substanci. Na světle zformuje se tato embryonální substance v plodnicích, ve tmě zůstává ve vegetativních vrcholech parohovitých větévek v neztenčené míře zachována. V embryonální substanci *Lentinusu* je uložena potentiálně schopnost vytvořiti klobouk; zda toto vytvoření skutečně nastane, či nastoupí místo něho forma parohovitá, jest funkcí světla. Dle různého podráždění může z embryonální substance různé vzejíti. Takovým podrážděním je světlo a temnota, které dané disposice buď zadržují neb uvolňují; světlo zadržuje tvoření se tvarů parohovitých a podporuje vývoj klobouku, temnota překáží vývoji klobouku a uvolňuje vývoj tvarů parohovitých.“

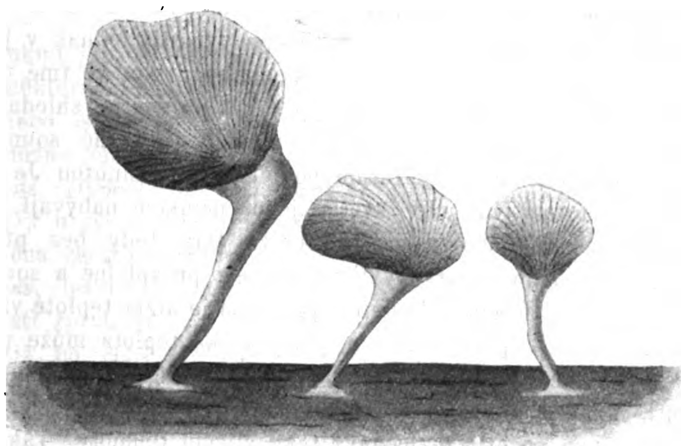
O správnosti sousledků Reinkeových přesvědčila mne vlastní pozorování, jež jsem činil na rozvětvené formě od *Lentinus suffrutescens*, která rostla na hnijící dřevěné desce ve velké síni jeskyně Eliščiny. Sestávala ze 3 větví, z nichž dvě nesly nepatrné kloboučky o průměru 3—5 *mm*, kdežto třetí větev zakončena byla sterilní špičkou. Pokus sestával v tom, že celá forma byla i se svým substrátem opatrně přenesena ze svého dosavadního stanoviště do prostředí pološerého, jímž byla pravá souběžná chodba, kterou dopadající tam záblesky denního světla slabě osvětlují. Výsledek této změny byl již za

[53]) Reinke J., Ueber Deformation von Pflanzen durch äussere Einflüsse. Bot. Zeitung 1904. Heft V-VI.

[54]) Noll, Beobachtungen und Betrachtungen über embryonale Substanz. Biolog. Centralbl. 1903. P. 324-325.

týden velmi patrný. Původně nepatrné kloboučky na obou větvích počaly se rozvinovati a i větev dosud zahrocená začínala jeviti malý základ povstávajícího klobouku. Současně bylo pozorovati i sílení třeně, která stala se široce rozploštělou. Po 14 dnech měly všechny větve vyvinuté klobouky, z nichž největší měl 5 *cm* v průměru; vedle toho silný sklon plodnice ve směru východu chodby prozrazoval positivní heliotropismus houby.

Mimo zakrnění klobouku pozorujeme velmi zhusta i jeho nejrozmanitější deformace. Nejčastěji setkáváme se s klobouky, jichž okraje jsou do výše zdviženy, tak že povrch tvoří nálevku nebo mísku



Obr. 1. *Lentinus suffrutescens Fr.*
Formy z jeskyně Eliščiny s nálevkovitými klobouky a lamelami vytvořenými na povrchu klobouků. 3× zvětšeno.

(*Hygrophorus, Lentinus, Mycena stipularis*), mnohdy pak zdvižení okrajů jde tak daleko, že se tyto téměř stýkají, tak že klobouk se podobá kouli, na povrchu lamellami pokryté. (*Nancoria tenax.*) Ku vzácnějším úkazům náleží forma s nálevkovitým kloboukem, na jehož povrchu, tedy uvnitř nálevky, jsou vytvořeny lamelly. V jeskyních Sloupských nalezl jsem takový tvar u druhu *Lentinus suffrutescens* (obr. 1.). Modifikace tato nastává dle Klebahna[55]) a Henningse,[56]) kteří tytéž biologické zjevy pozorovali u druhu *Tricholoma conglobatum*

[55]) Klebahn, Über eine merkwürdige Missbildung eines Hutpilzes. Jahrb. d. Hamburger wissenschaftlichen Anstalten, XXII. 1904.

[56]) Hennings, Über einige interessante deutsche Hutpilze. Hedwigia 47, 1908.

(Vitlad.) Sacc. vyrůstajícího ze zdi sklepu, za abnormálních podmínek životních, hlavně za přílišného vlhka, tmy a nedostatku kyslíku, k čemuž ovšem i jiné momenty mohou se přidružiti.

Je přirozeno, že redukce a deformace klobouku má za následek jednak zakrnění lamell, které pak z pravidla bývají sterilní, jednak i odchylnost od pravidelných tvarů jejich. Tak u druhu *Lenzites abietina* pozoroval jsem lamelly, jež byly u jedné formy poměrně normální, u jiné měly podobu jazýčků, u jiné trubek. Že i na vývoj hymenia má temnota patrný účinek, je pochopitelno. Je to jednak sterilnost jeho, ačkoliv ne častá, jednak abnormálnost tvaru cystid, jež bývají neobvykle zúžené a prodloužené. Také na tvar výtrusů zdá se míti světlo, resp. nedostatek jeho vliv. Při srovnání výtrusů několika exemplárů druhů *Mucor Mucedo*, z nichž jedny vyrostly jednak v jeskyni, jednak byly vypěstovány z výtrusů jeskynního druhu ve tmě (v thermostatu), druhé pak podobně byly vypěstěny na světle, shledal jsem, že výtrusy oněch jsou většinou pravidelné, všestraně souměrné a okrouhlé, kdežto těchto mají formu podlouhlou a zahnutou. Je patrno, že se tu jeví formativní vliv světla, jehož účinkem nabývají výtrusy podlouhlého a zahnutého tvaru; naopak za tmy, tedy bez působení tohoto činitele mohou spory vyvíjeti se zcela pravidelně a souměrně.

Změna barvy forem jeskynních přičítána je nízké teplotě vzduchu. Tak Roumeguère[57]) pozoroval, že příliš nízká teplota může uvolniti seskupení pigmentových tělísek u *Agaricineí*, čímž nastane jejich zblednutí. Mám za to, že tato depigmentace, již i na houbách z jeskyň Sloupských jsem pozoroval, nastává také vlivem temnoty. Tak *Lentinus suffrutescens*, *Hygrophorus virgineus* a *Lepiota gracilenta* v jeskyních velmi zhusta úplně bílé stávají se žlutavými až hnědými, jakmile byly přeneseny na světlo; totéž se týká plasmy u Mucor Mucedo.

Konečně připomenouti dlužno oněch četných podivuhodných forem myceliových, jichž bujnému vzrůstu zajisté výborně slouží temnota jeskynní, která jak nepříznivě působí na plodnost hub, tak účinně podporuje vegetativní vývoj jejich (fot. 3., 6., 7., a 8.).

Pokud jde o teplotu vzduchu v jeskyních, jsou tamní houby před oněmi, jež rostou na povrchu, potud ve výhodě, že žijí po celý rok téměř v stejnoměrném klimatu nejsouce vystaveny ani denním ani měsíčním ani ročním značnějším změnám tepelným. Dle toho nejeví se také určitější periodicita ve vývoji těchto podzemních organismů. Tak četné houby vegetují v jeskyních nepřetržitě po celý rok (*Myxo-*

[57]) Roumeguère, C., Note sur le Boletus ramosus Bull., récemment trouvé en Belgique (Rev. mycol n° 9. 1881, p. 3.)

mycety, Mucor Mucedo, Ascomycety, Stereum hirsutum, Polyporus annosus, Lentinus suffrutescens a j.), jiné však, po nichž v teplých měsících letních marně se ohlížíme, objevují se tu teprve v nejtužší zimě (*Polyporus lacteus, Coprinus micaceus*).

Ku všem až dosud uvedeným činitelům přistupuje jako důležitý pomocný faktor vlhkost vzduchu, jejíž účinek dle Maheu-a jeví se hlavně v etiolisaci a sterilnosti podzemních hub.[58])

Jeskynní temnota skýtá také vhodnou příležitost, aby tu byl pozorován a studován vliv různých zevnějších faktorů na směr vzrůstu plodnic houbových, které zde vegetují jednak za úplného, jednak částečného nedostatku světla. Jsou to jednak pohyby geo- a heliotropické, jednak pohyby způsobené vlivem proudícího vzduchu.

Pokud jde o geotropismus, jeví se zdánlivě positivně geotropickými některé kloboukaté houby ve stadiu, kdy klobouk není ještě vůbec nebo aspoň dostatečně vyvinut, t. j. třeň jejich roste svismo dolů; možno však, že směr ten je jim pasivně vnucen (*Lentinus suffrutescens, Hypholoma fasciculare, Flammula flavida, Mycena galericulata*); u týchž druhů objevuje se pak během jich vývoje zdánlivě změna geotropické reakce. Tak na plodnicích od *Lentinus suffrutescens*, jež rostly na povrchu dřevěných schodových plošin, bylo pozorovati zprvu vzrůst, jenž nápadně se podobal positivnímu. Třeně byly totiž po celé své délce položeny na substrátu, jakoby se po něm plazily, a toliko klobouček, pokud byl vyvinutý, nadzdvižen byl vzhůru. Ne méně zajímavý vzrůst vykazují plodnice téhož druhu rostoucí pod plošinami schodovými (fot. 2.), jakož i plodnice od *Hypholoma fascicularis, Flammula flavida* a *Mycena galericulata*, jež vegetují obyčejně po stranách dřevěných kolů. Dokud klobouček jejich není dostatečně vyvinut, rostou svisle dolů, jakmile však přibližuje se svému rozvinutí, zakřivuje se ponenáhlu noha vzhůru a klobouk umísťuje se tak, že vrchol směřuje vzhůru. Úkaz tento konstatuje již Wettstein[59]) a Maheu[60]), onen u kloboukatých hub vůbec, tento u druhu *Hypholoma* a *Coprinus*, leč bližší objasnění nepodávají. Teprve Buller,[61]) jenž pozoroval reakce plodnic druhu *Lentinus lepideus* na zevnější podráždění, dospěl k pozoruhodným výsledkům.

58) Maheu J., p. c. p. 167.

59) Wettstein, R., Beitrag zur Pilzflora der Bergwerke. P. 6—7.

60) Maheu, J. p. c. p. 162—164.

61) Buller, A. H. B. The reactions of the fruit-bodies of Lentinus lepideus Fr. to external stimuli. (Ant. of. bot. 1906, 19. 427—38 m. 3 Taf.) Dle referátu v Botanische Zeitung, 65 Jahrg. Nr. 4. 1907, p. 65—66.

Dle něho nepodléhá třeň před rozvinutím se klobouku žádnému vlivu podráždění povahy geotropické, vykazuje však ve tmě autotropismus, ve světle pak positivní heliotropismus. Dále praví, že za úplného nedostatku světla vytvořují se monstrosní plodnice, jež nemají klobouku, jelikož tyto vznikají jen za přítomnosti světla. Za vývoje klobouku přestavá týž býti positivně heliotropickým a stává se negativně geotropickým; negativně geotropická zakřivení staví pak klobouk do polohy horizontální. Tyto resultáty získané cestou pokusů fysiologických, jakkoliv v mnohém shodují se s výsledky mých pozorování biologických, přece jsou s nimi v jednom ohledu v odporu. Jest to směr vzrůstu bezkloboukatých tření. Na těchto jsem konstatoval, že mají před vytvořením se klobouku vždy tendenci svislého vzrůstu, ať již rostou na klenbách, po straně nebo na povrchu. Jejich svislý vzrůst pod plošinami schodovými, po stranách dřevěných kolů, kde hned u základu k zemi se zahýbají, jakož i plazivý vzůst jejich na povrchu schodnic, k nimž celou svojí délkou jsou přitlačeny, mohly by svědčiti pro positivní geotropismus, ač-li se nejedná o passivní podléhání vlivu tíže. Týž trvá nebo není převládán opačným potud, dokud klobouk zřetelně se neobjevuje. Jakmile však tento počíná se rozvinovati, vyprošťuje se třeň i klobouk z polohy inversní a zaujímá posici takovou, aby povrch jeho směřoval vzhůru. Je nepopíratelno, že rozvinutím klobouku vešel zde v činnost geotropismus negativní. V které části plodnice nastává tato změna chování se houby oproti tíži, je ovšem nesnadno říci. Ježto však zakřivení nenastane dříve, dokud tu není dostatečně vyvinutého klobouku, domnívám se, že klobouk hraje na změně geotropismu ne-li hlavní, tedy úlohu aspoň důležitou.

Sachs[62]), jenž činil v tom směru pokusy, došel výsledku, že třeně kloboukatých hub vůbec vzhůru se zakřivují a tímto zakřivením staví klobouk do polohy vodorovné. Pokusy ty ovšem nemohou býti směrodatnými, ježto není na jisto postaveno, zda skutečně to byla třeň, jež negativně geotropicky byla drážděna a určila polohu klobouku, či zda snad klobouk sám nepřijímal podráždění, jež pak teprve odtud do třeně se šířilo. Zajímavo je konečně, že analogický zjev shledáváme i u některých rostlin jevnosnubných (*Clematis*, *Papaver*, *Cyclamen*, *Viola*, *Aquilegia*, *Petasites*), kde stopky květní, pokud květy jsou mlády a nerozvinuty, jsou positivně geotropické,

---

[62]) Hofmeister, W., Ueber die durch die Schwerkraft bestimmten Richtungen von Pflanzentheilen. Jahrb. f. w. Bot. Bd. 3. 1863, p. 93.

Sachs, J., Handbuch der Experimentalphysiologie der Pflanzen. Leipzig 1865, p. 93.

později pak při rozkvětu nebo odkvětu dostavuje se u nich geotropismus negativní, jenž způsobí, že stopky se vzpřímí.

Na místech pološerých, hlavně u východů jeskynních přichází k platnosti positivní heliotropismus. Vyrůstající zde plodnice mají již dobře vyvinuté klobouky a dlouhé třeně, jichž silně nakloněný, často plazivý vzrůst směrem k východu chodby jeskynní prozrazuje positivní jich heliotropismus (Omphalia stellata, Lepiota gracilenta).

K zevnějším faktorům, jež působí na směr vzrůstu plodnic, náleží i tlak vzduchu. Následkem vyrovnávání se různých teplot vzduchu v prostředí podzemním a povrchovém vzniká v těsných chodbách jeskynních téměř nepřetržité určitým směrem probíhající proudění vzduchu, jež způsobuje, že plodnice, jež v takovém proudu se nalézají a tudíž stálému jednostrannému tlaku jeho jsou zůstaveny, rostou nakloněny ve směru tohoto proudu. (Mucor Mucedo, Lentinus, Omphalia stellata.) Zdali se tu jedná o rheotropismus či o prostý mechanický vliv proudu vzdušného, nemohu rozhodnouti.

Konečně nutno zmíniti se o fosforescenci hub jeskynních. Úkaz tento konstatován byl až dosud hlavně u Basidiomycetů, zvláště u větších stromových hub z rodu *Agaricus a Polyporus*; podle Ludwiga[63]) jest také *Xylaria Hypoxylon L.* fotogenní, což Molisch[64]) vyvrátil. Schopnost vydávati světlo jest dána orgánům jak vegetativním, tak fruktifikačním, a to zpravidla tak, že u určitých druhů omezuje se fosforescence výhradně na ústroje vegetativní, kdežto u jiných vázána je toliko na orgány fruktifikační. Aby fosforence nastala, musí tu býti jisté fosforescenci příznivé podmínky, hlavně dostatek kyslíku v prostředí houbu obklopujícím a přiměřená teplota a vlhkost vzduchu; vedle toho musí houba býti živá, neboť na organismech odumřelých fosforescence nikdy se neobjeví.

Také v jeskyních Sloupských byla fosforescence hub pozorována. Sám toliko jednou v létě r. 1906 zjistil jsem tento úkaz na myceliu vegetujícím na shnilém dřevě ve velké síni jeskyně Eliščiny (snad od *Armilaria mellea* Vahl?); několikrát byl pozorován Drem K. Absolonem na konci chodby „u Řezaného kamene" ve Starých Skalách, dělníky v jeskyních pracujícími i průvodci. Celkem však možno říci, že fosforescence hub v jeskyních Sloupských náleží k zjevům dosti vzácným, ježto vázána je na výše uvedené podmínky, kterých tu asi ne vždy nalézá.

---

[63]) Ludwig Fr., Ueber die Phosphorescenc der Pilze und des Holzes. Dissertation, 1874.

[64]) Molisch H., Leuchtende Pflanzen. Jena 1904, p. 42.

Část systematická.

(Popis druhů uveden je se znaky generickými.)

Myxomycetes.

Arcyria stricta Rostaf. var. subleionema.

Plodničky shloučené, vejčité, přes $^1/_2$ *mm* vysoké na stonku 1—1·5 *mm* dlouhém. Massa výtrusná špinavě žlutá. Vlášení husté, složené z vnitřních až 4·5 μ širokých rourek hladkých a zevnějších tenších, jemně kolcatých. Výtrusy kulaté, 7—8 μ široké, jemně bradavkaté. V jeskyni Eliščině na dřevěném zábradlí. Po celý rok, hojně.

Trichia varia Pers. var. nigripes Rostaf.

Plodnice shloučené ve skupinkách, často 2 i 3 individua srostlá, 0·5—1·2 *mm* v průměru, žluté nebo i bílé na zřetelném hnědém, 0·5 *mm* vysokém stonku. Rourky vlášení 4·2 μ široké, před zakončením s nevelkým měchýřkem a s hrotem stranou zahnutým. Výtrusy kulaté, 13 μ v průměru, jemně bradavkaté, nažloutlé neb nazelenalé. Na shnilém dřevě v pravé souběžné chodbě jeskyně Nicové. VIII. Nalezena jednou.

Trichia fallax Pers.

Plodnice ojedinělé, vrtlíkovité nebo kyjovité, 1 *mm* v průměru, hnědé a lesklé na stopkách až 2·5 *mm* vysokých. Rourky 5·2 μ široké, k oběma koncům bičíkovitě dlouze zúžené. Výtrusy elliptické, jemně bradavkaté, 7·5 μ široké 13 μ dlouhé. V jeskyni Eliščině ve velké síni na dřevěném zábradlí po celý rok, v jeskyni Nicové v pravé souběžné chodbě na dřevě v červenci a srpnu, hojně.

Lycogala epidendron Fr.

Aethalia okrouhlá, pospolu těsně stojící, velikosti 6—8 *mm* v průměru, oranžové žlutá. Massa výtrusová barvy špinavě nažloutlé. Vlášení o stěnách dosti silných, 3—10 μ tlusté, některé větve posázeny špičatými, až 1 μ vysokými kolci. Výtrusy kulaté, až 10 μ široké, jemně kolcaté. Na spráchnivělém dřevě v pravé soubežné chodbě jeskyně Nicové. VIII. Nalezena jen jedenkrát.

Comatricha Friesiana Rostaf. var. leptonema. Čel. fil.

Plodnice buď jednotlivě roztroušené nebo i hustě shloučené, 0·4 *mm* v průměru, hnědočerné, na stopkách až 2·5 *mm* vysokých (počítáno až ku plodnici). Spory hnědofialové, 7·8 μ v průměru, hladké. V jeskyni Eliščině na dřevěném kolu ve velké síni, ve Starých Skalách na dřevěném zábradlí. Po celý rok, častá.

Hyphomycetes.

Zygomycetes.

Mucor Mucedo (Linné) Brefeld.

Vyskytuje se v jeskyni Eliščině i ve Starých Skalách dosti hojně a ve všech dobách ročních. Výhradným jeho substrátem je tu netopýří trus; na zábradlí, stalagmitech, i na zemi spatřujeme nezřídka malé kupky exkrétu porostlé jemnými, stříbřitě bělostnými plodonoši této plísně. Mikroskopická prozkoumání podala následující výsledky: Z tence a dlouze větevnatého mycelia o bezbarvém obsahu i bláně vyrůstají ne příliš hustě přímé, až 35 *mm* vysoké, 26 μ tlusté plodonoše, jež se zakončují kulatým, 70—100 μ širokým sporangiem.

Plodonoše mají často postranní větve, které jsou buď zakončeny menšími sporangiemi, buď končí rovným nebo zaškrceným hrotem, na němž teprve později sporangium se vytvoří. Plodonoš je při tom vždy nad místem rozvětvení přepažen obyčejně jednou, někdy i dvěma nad sebou stojícími a vzhůru vyklenutými příčkami. Kolumella je nejčastěji tvaru hruškovitého, bezbarvá, až 50 μ široká a 60 μ vysoká. Výtrusy jsou kulaté neb vejčité, 6—12 μ v průměru, ve sporangiu s jemnou blanou, jež je hustě posázena krátkými a jemnými ostny; táž zůstává pak po prasknutí sporangia v podobě malého límečku pod kolumellou.

Ježto některé v uvedených výsledcích obsažené znaky nesouhlasily s oněmi, jež jsou pro tento druh význačné, hlavně časté rozvětvení plodonošů a dělení jich přepážkami, kteréžto vlastnosti spíše pro druh racemosus jsou charakteristické, bylo nutno cestou pokusů fysiologických dojíti jasných a správných výsledků, na základě kterých by pak objasněny byly tyto abnormální zjevy i se stanoviska biologického. Pěstováním jich jednak na světle, jednak za tmy bylo docíleno takových růzností ve formě, jež odpovídaly úplně oněm u druhů jeskynních a těch, jež pěstovány byly na světle. První kultivování započal jsem 3. listopadu 1906. Za živnou půdu bylo užito Meyerovy živné gelatiny (pepton, dextrosa). Jeskynní *Mucor* přenesen byl na tento nový substrát tak, že vzato bylo po jednom sporangiu, jež zapuštěno bylo do živné půdy. Na to byly dvě kultury ponechány na světle, kdežto druhé dvě byly dány do tmy. U kultur ve tmě pěstovaných bylo již třetí den pozorovati tvoření se mycelia, a čtvrtý den vyrůstání plodonošů; u kultur na světle zůstavených děl se vývoj tento o den později. Dne 10. listopadu byl stav kultur následující: Kultury na světle: Mycelium o širokých větvích, jež na konci náhle se zúžují. Plodonoše až 15 *mm* dlouhé jsou většinou nerozvětvené. Sporangia 175 μ v průměru, spory podlouhle vejčité, často zahnuté, až 13 μ široké a 18 μ dlouhé. Kolumella kulatá, až 68 μ široká a 95 μ vysoká. Obsah mycelia, plodonošů a sporangia nažloutlý. Kultury ve tmě: Mycelium o dlouhých, tenkých, na konci pozvolna se zúžujících větvích. Plodonoše až 40 *mm* dlouhé, s velmi četnými větvemi, nad místem rozvětvení vždy jednou, někdy i dvěma přehrádkami přepažené. Sporangia až 135 μ v průměru, spory z pravidla kulaté neb souměrně elliptické, 8—12 μ široké. Kolumella tvaru hruškovitého, až 45 μ široká a 55 μ vysoká. Obsah mycelia, plodonošů a sporangia bezbarvý neb jen málo nažloutlý. Pokus tento, který ještě dvakrát s podobným výsledkem byl opakován, přivedl mne ke konklusi, že kultura, jež byla vypěstována na světle, dá se s jistotou určiti jako *Mucor Mucedo* a že s formou jeskynní téměř ve všech vlastnostech souvisí kultura ze tmy. Odchylky, jimiž forma jeskynní odchyluje se od formy normální, mohou býti tudíž přičítány jedině existenčním podmínkám stanoviště.

Jiná ne méně zajímavá otázka týkala se původu tohoto druhu. Ježto plíseň tato vázána je v jeskyních výhradně na výkaly netopýrů, kteří tu ve velkých hejnech sídlí v komínech neb ve skalních trhlinách, dalo se již na první pohled souditi, že rostlina rostla z výtrusů, které přišly do jeskyně s netopýřím výkalem a byly tedy patrně již na potravě, kterou netopýři přijali. Tato domněnka byla pak potvrzena, když z netopýřího trusu, jenž v hromadách až 1 *m* vysokých nakupen je v chodbě „ve Stříbrné“ ve Starých Skalách, na němž však následkem panujícího tam sucha není žádné vegetace, byly vypěstovány bujné kultury této plísně.

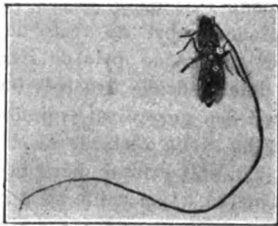
Ascomycetes.

Ombrophila violacea (*Hedw.*).

Apothecie ve skupinách shloučené i roztroušené, s polokulovitými nebo i ploše rozprostřenými až promáčknutými plodnicemi, barvy bledofialové, masové, někdy i temně karmínové. Jsou 1—6 *mm* široké, dolů klínovitě zúžené, o stopkách až 4 *mm* vysokých. Asky válcovité, 40 μ dlouhé, 8výtrusné. Výtrusy v jedné řadě uložené, elipsovité, 3—3·5 μ široké, 6—7 μ dlouhé, jednobuněčné, světle zelenavé, často se dvěma velkými kapkami olejovými. Parafysy nitkovité až 3 μ široké. Na zábradlí u Propasti ve Starých Skalách po celý rok, velmi hojné.

Helotium virgultorum (*Vahl.*).

Apothecie v malých koloniích. Plodnice až 3 *mm* široká, bledožlutá až nahnědlá. Stopka 1·3 *mm* dlouhá, konicky se úžící, bílá, jemně oplstěná. Asky 8výtrusné, výtrusy ve dvou řadách uložené, vřetenovité, často zahnuté, 3·5—5 μ široké, 13—18 μ dlouhé, jednobuněčné, se dvěma velkými olejovými kapkami. Parafysy nitkovité. V nánosu na větvičce u Propástky ve Starých Skalách. VII.—VIII. Nalezeno jen jednou.



Fot. 1: *Cordyceps Ditmari Quel.*
Z jeskyně Nicové na Amblyteles quadripunctorius Müll.
1/2 skutečné velikosti.

Rosellinia aquila Fries.

Perithecie seskupené a hustě při sobě stojící, často několik individuí srostlých, 0·5—1·3 *mm* široké, kulaté, hladké, na temeni s papilkovitým málo zřetelným ústím, hnědočerné, spočívající na podkladu hnědých hyf. Asky 8výtrusné, výtrusy eliptické někdy se zašpičatělými konci, 6—7·5 μ široké a až 23 μ dlouhé, barvy hnědočervené. Na kůře větve v nánosu u Propástky ve Starých Skalách po celý rok, dosti často.

Xylaria Hypoxylon (*Linné*).

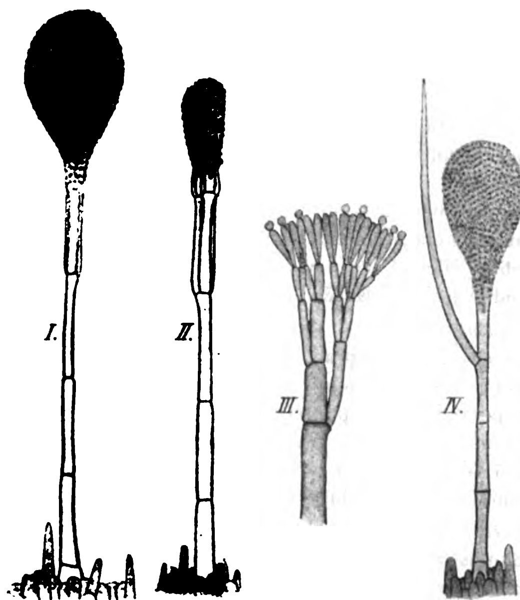
Stromata vztýčená, obyčejně jednoduchá, ale také parohovitě rozvětvená, až 6 *cm* dlouhá, smáčknutá, na spodu huňatá. Vyskytuje se ve formě konidiové, následkem čehož jsou stromata bílá. Konidie jsou vřetenovité, 3 μ široké, 8—9 μ dlouhé. Na pohozených dřevech a větvích i na zábradlích ve Starých Skalách, v prvním dómu a v jeskyni Eliščině ve velké síni. Po celý rok, hojně.

Cordyceps Ditmari Quel. (Fot. 1.)

Stonek stromatu nitkovitý, 10 *cm* dlouhý, na spodu 0·5 *mm* u hlavičky 0·2 *mm* tlustý, rozvětvený v ostnité výhonky, žlutý. Hlavička nalezena zakrnělá, má toliko 0·3 *mm* v průměru a je sterilní. Na *Amblyteles quadripunctorius* Müll. mezi hlavou a hrudí. Nalezl Dr. Absolon v jeskyni Nicové v únoru r. 1899.

Gliocladium *Spec. nova?* (Obr. 2. I., II., III., IV.)

Plodonoše roztroušeně stojící, olivově nahnědlé, průsvitavé se 4—6 septy, dole 6·8—8 μ, nahoře 4·7—5·5 μ tlusté, až ku konidiové hlavici 60—180 μ, i s touto 100—260 μ dlouhé, nahoře štětičkovitě až do 4. stupně rozvětvené. Větve málo rozbíhavé, často téměř rovnoběžně stojící. U některých plodonošů vyrůstá vedle hlavice, nad 4. septem zvláštní jednoduchá asi 180 μ dlouhá větev, která převyšuje celý plodonoš a súžuje se na konci v hrot. Konidiová hlavice je hruškovitá, až 80 μ vysoká, 55 μ široká, sliznatá, barvy poněkud nazelenalé, a jasnější než stopka. Sterigmata 10 μ dlouhá, dole přišpičatělá, nahoře zakula-



Obr. 2. *Gliocladium* *Spec. nova?*
I. Úplný plodonoš. II. Plodonoš, z jehož hlavice jsou konidie částečně odstraněny. III. Hlavice konidií úplně zbavená. IV. Forma s postranní na konci zahrocenou větví. I., II. a IV. zvětšeny 200×, III. zvětšeno 525×.

cená, po dvou sedící. Konidie v dlouhých řetízcích z temene sterigmat vybíhající, kulaté, 1·5—1·8 μ v průměru, hyalinní, nazelenalé, slizem stmelené. Na sterilním hymeniu od *Lenzites abietina* Bull. z jeskyně Eliščiny, VIII. nalezena jednou. Polohou jakož i stavbou a zbarvením plodonošů blíží se tato forma jedině druhu *Gliocladium luteolum*, v. Höhn v Annales mycol. I., 528 (1903), liší se však od ní formou i rozměry; druh *luteolum* má totiž plodonoše až 360 μ dlouhé, konidiovou hlavici kulatou, nahnědlou, 80—100 μ v průměru, konidie umístěny na sekunderních větvích, podlouhlé, 5—7 μ dlouhé, 3 μ široké. Také substrát je různý; bylať nalezena tato species na shnilém dřevě ve Vídeňském lese.

Basidiomycetes.

Stereum hirsutum Willd.

Plodnice jsou kožovité, vlnitě zprohýbané, tvaru buď rozprostřeného buď nálevkovitě stočeného s roztrhanými, k hymeniální straně zahnutými okraji. Vrchní strana je drsně plstnatá, žlutohnědá, někdy pásmatá, hymeniální lysá, světležlutá neb i šedavá, jakoby zjíněná, později hnědnoucí. Výtrusy jsou kulaté, bezbarvé, v průměru 2·2—2·6 μ. Vegetuje po celý rok na dubových sloupech u zábradlí a u dřevěných schodů, jakož i na paženích v chodbách v jeskyni Elisčině. Velmi hojně.

Polyporus hirsutus Wulf.

Plodnice polokruhovité, v průměru 5—6 *cm* v dlouhých řadách taškovitě na sebe položené, kožovité, s počátku úplně bílé, později žloutnoucí. Výtrusy kulaté nebo podlouhlé v průměru 3 μ. Roste po celý rok na dřevěných schodech v předsíni jeskyně Nicové. Velmi hojně.

Polyporus annosus Fries.

Tvoří přisedlé poduškovité nebo konsolovité plodnice v šířce až 5 *cm*, jichž bývá obyčejně několik dohromady v nepravidelné tvary srostlých. Mladé plodnice jsou zcela bílé, hladké a mají hymenium rozprostřeno po celém povrchu; starší jsou tvaru konsolovitých nahoře okrově hnědé a kostrbaté, dole s hymeniální částí, jež je kolem do kola vroubena nad ni přečnívajícím okrajem plodnice. Výtrusy kulaté neb vejčité, až 3·5 μ v průměru. Po celý rok na podpěrných trámech v hlavní chodbě jeskyně Elisčiny. Velmi hojné.

Polyporus lacteus Fries.

Tvoří 2—15 *mm* široké, nepravidelně rozprostřené nebo nálevkovitě stočené plodničky. Tyto jsou za čerstva houbovitě měkké, za sucha korkovité. S počátku jsou čistě bílé na povrchu pýřité, později zvlášť pory nabývají šedého nádechu. Pory jsou tenké, dlouhé a roztřásněné. Výtrusy podlouhlé, někdy zahnuté, bezbarvé až 2·3 μ široké a 7 μ dlouhé. Na dřevěných schodech ve velké síni jeskyně Elisčiny. Od prosince do dubna, dosti hojně.

Lenzites abietina Bull.

Tento ve Sloupských jeskyních dosti hojně přicházející druh vegetuje na kůře jedlových trámků, z nichž jsou tu zhotoveny zábradlí nebo podpěry v chodbách. Vyskytuje se ve třech formách:

1. Plodnice tvoří kožovité, ploché, úzké a často až 25 *cm* dlouhé porosty, jež jsou vrchní částí k substrátu přirostlé, tak že část hymeniální směřuje na venek. Lamelly jsou u mladých jen nepatrně znatelny a jsou oplstěné, u starších jsou vyvinuté, ale řídké, zprohýbané nebo rozvětvené. Zbarvení vrchní části, pokud tato je viditelna je tmavohnědé, části lamellární hnědošedé, na pokrajích ještě světlejší. Hymenium je rozděleno na obou stranách lamell; skládá se z basidií jen zřídka fertilních a z nápadně dlouhých, štíhlých cystid nesoucích na konci, pozoruje-li se suchý materiál, čepičkovité konkrece šťovanu vápenatého. Výtrusy jsou podlouhlé, 3·9 μ široké, 7·8 μ dlouhé, bezbarvé. Vegetuje hojně a po celý rok na zábradlí ve Starých Skalách.

2. Plodnice mají podobu dolů obrácených kalichů. Vrchní část vyrůstá z huňatého, hnědého mycelia, jest plstovitá, rovněž hnědá a tvoří na povrchu četné parůžkovité výběžky. Na vnitřní straně kalicha jsou vytvořeny lamelly, jež jsou často rozvětveny nebo zkrouceny; ty pak, jež jsou na spodu umístěny, mají podobu tenkých jazýčků. Hymenium je vždy sterilní. Často vyskytují se plodnice předešlým

podobné, lišící se však částí hymeniální, jež sestává výhradně z lamell jazýčkovitých. V jeskyni Eliščině na zábradlí u dřevěných schodů po celý rok.

3. Forma myceliová v podobě žlutohnědých bavlnitých polštářků. Skládá se ze světle žlutých nebo nahnědlých, hustě spletených vláken, jež místy jsou setmeleny shluky kalcia. Na témže místě jako forma předešlá. Nalezl jsem ji jednou v srpnu, od které doby se již neobjevila.



Fot. 2.



Fot. 3.

Fot. 2. *Lentinus suffrutescens Fr.*
Plodnice s geotropicky zakřivenými třeňmi z jeskyně Eliščiny.
($^1/_3$ skutečné velikosti.)

Fot. 3. *Lentinus suffrutescens Fr.*
Myceliová forma z jeskyně Eliščiny. ($^1/_3$ skutečné velikosti.)

Lentinus suffrutescens Fries.

Mezi nejčetnější houby, s nimiž v jeskyních se setkáváme, naleží *Lentinus suffrutescens*, jenž jest vůbec pro temná místa, jako jsou doly, sklepy, sudy atd. houbou charakteristickou. Vyznačuje se neobyčejnou mnohotvárností jevící se v četných, mnohdy velmi monstrosních tvarech, jež závisly jsou na různých poměrech prostředí, v němž houba roste. V jeskyních Sloupských vyskytuje se

Lentinus pouze v jeskyni Eliščině; zde přichází ve dvou hlavních formách a sice ve tvaru více nebo méně vyvinutých plodnic a v sterilní, obyčejně keříčkovitě vytvořené formě myceliové. Stanovištěm obou forem jsou dřevěné schody vedoucí do hlavní síně, jakož i spráchnivělé kusy dřeva v nejbližším okolí.

Forma první vyznačuje se vždy zakrnělým kloboukem a dlouhou třeni. Velik st klobouku je různá; často jen stěží shledáme nepatrnou stopu jeho, u jiných dosahuje i 8 *cm* v průměru. S počátku bývá klenutý, s okrajem k lamellám zahnutým, později ploše rozložený a konečně ve středu hluboce promáčklý v podobě nálevky. Zbarvení klobouku je u mladých bledě nažloutlé, u starších špinavě žluté až červenohnědé, s velikými hnědými skvrnami. Světlejší, často zcela bílé lamelly sbíhají po třeni dolů a jsou na ostří zoubkovány. Při mikroskopickém pozorování jich příčného řezu vidíme na ostří vybíhati z tramy četná vlákna hyfová, jež tvoří hustě seskupené štětičkovité svazečky. Hymenium skládá se z parafys, basidií a četných cystid, nápadných štíhlou, často láhvovitou formou. Výtrusy jsou podlouhlé, 2—2·6 μ široké, 5—7·8 μ dlouhé. Třeň vyrůstá obyčejně z plsťovitého bílého mycelia, jež pokrývá dosti značné plochy substrátu, a dosahuje až 15 *cm* délky. U základu bývá 5—12 *mm* široká, nahoru dle velikosti klobouku se zúžujíc. Je pokryta bílou, poněkud lepkavou plstí, jež později hnědne. Velmi často spatřujeme plodnice parohovitě rozvětvené se dvěma až čtyřmi kloboučky. Velmi zajímavý nález učinil jsem v březnu r. 1907. Na dřevěném zábradlí u zmíněných schodů nalezl jsem tři exempláře *Lentinusu*, jež měly lamelly vytvořeny na povrchu klobouku (obr. 1.) Nejvyvinutější z nich byl i s kloboukem 2·3 *cm* vysoký. Bílá, u spodu 2 *mm* tlustá třeň kyjovitě se rozšiřuje v 1·5 *cm* široký, excentricky umístěný, nálevkovitý klobouk, na jehož povrchu, tedy uvnitř nálevky, vytvořeny jsou lamelly, jež sbíhají do jednoho excentrického místa. Zbarvení lamell jakož i okrajů klobouku je nažloutlé. Hymenium je sterilní sestávajíc z parafys, mezi nimiž na některých místech také štíhlé cystidy vynikají.

Pozorování týkající se směru vzrůstu plodnic tohoto druhu, hlavně onoho, jenž je vyvolán geotropismem, uvedl jsem již ve všeobecné části tohoto pojednání.

Vedle plodnic vytvořuje *Lentinus suffrutescens* zvláštní tvary myceliové v podobě keříčků (fot. 3.) nebo ostnatých větviček. Jsou to sterilní mycelia, jež za poměrů normálnímu vývoji nepříznivých od vytváření plodnic jsou zdržována, za to však povzbuzována k bujnějšímu a co do tvarů více méně změněnému vegetování. Reinke,[65]) jenž se zabýval změnou forem, kterou rostlina za svého vývoje podstupuje, tedy i rostlinými deformacemi způsobenými vnějšími vlivy, za vhodný příklad takového formativního podráždění u rostlin uvádí etiolisační zjev u hub, specielně pak změny tvarů způsobené nedostatkem světla na druzích rodu *Lentinus* a praví, že parohovité tvary, jež tato houba vytvořuje, nemohou býti pokládány za sterilní plodnice, nýbrž že jsou analogon *Rhizomorfy*, jsouce vegetativním systémem houby, myceliem. — Je přirozeno, že nejrozmanitější, mnohdy bizarní vzhled těchto forem ne nepodobný i zástupcům jiných rodů, svedl mnohé starší autory k nesprávnému jich určení. Byly popisovány pod různými jmény: *Clavaria cornuta Retz.*, *Clavaria thermalis D. C.*, *Ramaria ceratoides Holmsk.*, *Helvella serpentiformis Batsch* atd. Formy keříčkovité rostou svisle dolů pod uvedenými již dřevěnými schody v bezprostředním sousedství plodnic se

---

[65]) Reinke, J., Ueber Deformation von Pflanzen durch äussere Einflüsse. Bot. Zeitung 1904.

zahnutými třeňmi, jichž plstnaté mycelium zdá se býti s nimi v blízkém styku. Jednotlivé exempláry byly 4—8 *cm* dlouhé a rozčleňovaly se nevysoko nad základem v četné opět se dělící větvičky. Stejného původu jsou ostnité tvary větévkovité. Učiníme-li podélný řez buď větví neb ostnem těchto mycelií, shledáme, že stavba sestává z hyfových, téměř parallelně běžících vláken, jež hojně jsou prostoupeny uhličitanem vápenatým.



Fot. 4. *Hygrophorus virgineus Vulf.*
Skupina etiolovaných plodnic ze Starých skal.
(1/3 skutečné velikosti.)

Hygrophorus virgineus Wulf.

Jako *Lentinus* je význačnou formou pro jeskyni Elisčinu je *Hygrophorus virgineus* charakteristickým, každoročně se objevujícím druhem ve Starých Skalách. Roste ve velkých skupinách na hlinité náplavě podél podzemního řečiště Sloupského potoka. Plodnice vytvořuje teprve ke konci jara, někdy až začátkem léta, načež tyto na podzim buď zimou hynou, buď vodami rozvodněného potoka bývají odneseny. Bílé mycelium zimu přetrvává, na jaře pak plodnice buď z něho vyrůstají buď ze spor, jež podzimní a jarní náplavy tam přinesly. Plodnice, jež jsou úplně bílé, mívají vždy značně zakrnělý klobouk, mnohdy ani 1 *cm* průměru nedosahující, (fot. 4.), jen velmi zřídka a to již pozdě na podzim bývají některé kloubouky až 3 *cm* široké. Klobouk z počátku je klenutý, později rovný až promáčklý, častěji rozpraskalý s okraji vzhůru zahnutými. Lamelly jsou sbíhavé od sebe dosti vzdálené, spory bezbarvé, vejčité, 4 *μ* široké, 6 *μ* dlouhé. Masitá a křehká noha je až 7 *cm* dlouhá, až 1 *cm* široká a obyčejně k oběma koncům se súžuje.

Coprinus ephemerus Bull.

Plodnice mají vejčitě klenutý, 7 *mm* vysoký klobouk barvy šedohnědé, uprostřed s kulatým, vyvýšeným, načervenalým středem, na povrchu je radiálně jemně rýhovaný a poněkud lepkavý. Lamelly jsou široké, spory vejčitě eliptické, 5—7 *μ* široké, 11—16 *μ* dlouhé, hnědé. Noha jest 6 *cm* vysoká, u spodu 2 *mm*, nahoře 1 *mm* široká, nažloutlá a průsvitavá. Na zemi u vchodu do jeskyně Nicové, IX., řídký.

Coprinus digitalis Batsch.

Tvoří skupiny nízkých plodnic na hlinité náplavě v předsíni jeskyně Nicové. Vejčitě klenutý 0·5—1·5 *cm* vysoký, poněkud masitý klobouk je úplně lysý, jemně radiálně rýhovaný, bledožlutý s tmavším nahnědlým středem. 2 *cm* vysoká a $2^1/_2$ *mm* tlustá třeň je bílá a lysá. Sterilní. IX., řídký.

Týž druh ve tvaru velmi změněný nalezl jsem na hlinité náplavě ve spojovací síni v jeskyni Nicové (fot. 5.). Pozornost budil hlavně neobyčejně dlouhou tření a zcela nepatrným kloboučkem. Bílá, 1·2 *mm* tlustá, po zemi položená třeň dosahovala 29·5 *cm* délky; na ní vytvořen byl zakrnělý, 2·5 *mm* vysoký žlutohnědý klobouček, jenž vrcholem zvedal se vzhůru. Sterilní, IX., řídký.



Fot. 5. *Coprinus digitalis Batsch.*
Etiolovaná forma z jeskyně Nicové.
($^1/_4$ skutečné velikosti.)

Coprinus micaceus Bull.

Forma v jeskyni Eliščině nalezená měla plodnice 1—11 *cm* vysoké. Blánitý, žlutohnědý, až 3 *cm* široký klobouk byl u starších jen řídce u mladších hustě pokryt malými bělavými zrníčky. Spory elipčité 5—7 *μ* široké, 7—10 *μ* dlouhé, červenohnědé. 1—10·5 *cm* dlouhá a štíhlá třeň je bílá, lesklá a na spodu cibulkatá. Na shnilé tyči a dřevěných schodech ve velké síni jeskyně Eliščiny XII., I. Forma ze Starých Skal souhlasí úplně s předešlou, je však menší. Rostla na zemi u Propasti, XII., dosti hojně.

Coprinus impatiens Fr.

Plodnice tohoto druhu seskupené po 3 až 4 objevily se v předsíni jeskyně Nicové na náplavě, kterou tam zanechal rozvodněný Sloupský potok. Klobouk je 2·5 *cm* široký, rozprostřený, blánitý, s vlnitými záhyby a rýžkami a často na pokraji roztrhaný; barvy je popělavě šedé nebo nažloutlé. Spory jsou vejčité 5—7 *μ* široké, 10—12 *μ* dlouhé, červenohnědé. Noha je štíhlá až 6·5 *cm* vysoká, jasně bílá, hyalinní, na spodu jemně chlouplkatá. IX. Nalezen jednou.

Hypholoma fasciculare Huds.

Jest dosti obecným druhem v jeskyni Eliščině, vegetuje tu po celý rok i za doby zimní na dřevěných sloupcích i na zábradlí. Plodnice v husté trsy seskupené rostou svisle dolů a vykazují podobné hákovité zakřivení tření jako u Lentinusu. Klobouk je až 2 *cm* široký, se středem do špičky vyvýšeným a s okraji vzhůru zdviženými; barvy je olivověžluté. Výtrusy jsou kulatě eliptické 3—4 *μ* široké, 5·5—7 *μ* dlouhé, jasně zelenohnědé. Třeň dosahuje až 7 *cm* délky.

Hypholoma sublateritium S.

Druh tento nalezen byl pokaždé jen na začátku spojovací chodby do Starých Skal, nikdy ne hlouběji v jeskyních, proto také tvar jeho je normální. Klobouk dosahuje až 4 *cm* v průměru, je okrověžlutý, uprostřed tmavší. Lamelly jsou s počátku sírověžluté, později olivově hnědé. Výtrusy jsou kulatě eliptické, 4—5 *μ* široké, 6—7 *μ* dlouhé, okrověžluté. Noha je až 17 *cm* dlouhá, 3—4 *mm* tlustá, šedohnědá, hedvábně lesklá. Na náplavě, v níž byly zbytky shnilého dřeva. Dosti hojně.

Crepidotus proboscideus Fr.

Plodnice s kloboukem rozprostřeným nebo ve formě trubky neb nádobky prohloubeným, přisedlým nebo jen nezřetelně výstředně stopkatým, 0·5—1·5 cm. širokým, opýřeným, okrově žlutým. Lamelly k excentricky položenému bodu paprskovitě se sbíhající téže barvy jako povrch klobouku. Výtrusy vejčité, 3—4 *μ* široké, 5—5·5 *μ* dlouhé, olivově žluté. Na spráchnivělém dřevě ve spojovací síni v jeskyni Nicové. VIII. Nalezen jen jednou.

Naucoria tenax Fr.

Nalezena byla v jediném exempláru na zemi u vchodu do Starých Skal Pozoruhodný byl vzrůst klobouku, jehož okraje byly tak silně vzhůru zahnuty, že tvar jeho podobal se kouli na povrchu lamellami opatřené. Lamelly jsou olivově hnědé se zřetelným bílým ostřím. Výtrusy elliptické, 6·5 *μ* široké, 11 *μ* dlouhé, olivově hnědé. IX. Nalezena jednou.

Naucoria camerina Fr.

Plodnice mají zvonkovitě klenutý, až 8 *mm* široký klobouk, jenž zvlášť za sucha bývá na temeni do špičky vytáhlý a s okrajem dovnitř zahnutým; jest lysý, červenohnědý, ve středu tmavší. Výtrusy kulatoellipsovité, 4·5 *μ* široké, 6—7 *μ* dlouhé, okrově žluté. Noha až 5 *cm* dlouhá, temně hnědá, často zkroucená a zohýbaná. Na zábradlí ve velké síni jeskyně Eliščiny. VIII. Zřídka.

Naucoria cerodes Fr.

Plodnice s rozprostřeným, až 1 *cm* širokým, hladkým a lysým kloboukem barvy voskově žluté. Výtrusy okrově žluté, ellipsovité, 4—5 *μ* široké, 8—9 *μ* dlouhé. Třeň trubičkovitá, 8 *cm* dlouhá, 2 *mm* tlustá, voskově žlutá, na spodu tmavší, lysá, lesklá a často zkroucená. V jeskyni Eliščině na hlinitém nánosu u Tureckého hřbitova. VIII. Dosti hojně.

Flammula flavida Schaeff.

Plodnice v hustých trsech, zřídka ojedinělé, mají čepičkovitě klenutý, později rozprostřený, 1—30 *mm* široký klobouk, jenž jest lysý, za čerstva vlhký, barvy olivově žluté nebo nahnědlé. Jen zřídka plodný, výtrusy vejčitě podlouhlé, až 3 *μ* široké, 6—7 *μ* dlouhé, bledě olivově žluté, často se dvěma i více olejovými kapkami. Noha je dutá, 1—7 *cm* dlouhá, někdy u spodu naběhlá. U vyvinutých plodnic, které rostly svisle dolů, pozorováno geotropické zakřivení tření jako u *Lentinusu*. Na zábradlí, dřevěných schodech a shnilém dřevě ve velké síni jeskyně Eliščiny po celý rok.

Pholiota unicolor Bull.

Klobouk je rozprostřený, ve středu poněkud pozdvižený, okrově žlutý, na pokraji čárkovaný. Výtrusy 4—5·5 *μ* široké, 7—9 *μ* dlouhé, též okrově žluté. Noha 3 *cm* vysoká, 3 *mm* tlustá, poněkud zahnutá, téhož zbarvení jako klobouk, s kroužkem. Na kraji jeskyně Nicové na hnijícím dřevě. X. řídký.

Pluteus plebophorus Ditm.

Plodnice mají rozprostřený, málo přes 1 *cm* široký hnědý klobouk, na povrchu s četnými ze středu vycházejícími vlákenky. Lamelly narůžovělé, výtrusy téměř kulaté neb málo podlouhlé, 5—7 *μ* v průměru. Noha trubkovitá, poněkud zahnutá, 2·5 *cm* vysoká, 2·2 *mm* široká, dole tlustší, lesklá, bílá a průsvitavá. V hlavní chodbě jeskyně Eliščiny, kdež rostl na zemi mezi dřevěnými pilinami VIII. Nalezen jednou.

Collybia velutipes Curt.

Plodnice s rozprostřeným, někdy zprohýbaným, až 1·5 *cm* širokým kloboukem, žlutým, na temeni s rezavými tečkami. Lamelly nažloutlé, výtrusy podlouhlé, 3—4 *μ* široké, 8—9 *μ* dlouhé, bílé. Noha poněkud výstředně umístěná, 3 *cm* dlouhá, zahnutá, nahoře žlutá, u spodu tmavohnědou plstí pokrytá. Ve Starých Skalách u Propástky v nánosu na větvi. VIII. Nalezen jen jednou.

Omphalia stellata Fr.

Druh tento náleží k nejčetněji se vyskytujícím houbám jak v jeskyni Nicové a Eliščině, tak ve Starých Skalách; možno říci, že se s ním zde setkáváme všude, často i v nejodlehlejších chodbách jeskynních a ve všech ročních dobách. Plodnice bývají v trsech nebo ve skupinkách, ale také ojediněle na kůře, hnijícím dřevě i na hlinité náplavě, která obsahuje dost organických zbytků, dřevěných pilin, kůry. Klobouček je s počátku zvonkovitě klenutý, později zcela rozložený až promáčklý, bílý, průsvitavě radiálně čárkovaný, v průměru 1—9 *mm*. Výtrusy jsou podlouhlé, 4 *μ* široké, 6—7·5 *μ* dlouhé, bezbarvé nebo málo nazelenalé. Noha nitkovitá, až 6·5 *cm* dlouhá, bílá, nahoře lysá, dole odstávajícími, jemnými chloupky pokrytá.

Mycena stipularis Fr.

Klobouček zvonkovitě klenutý, později rozprostřený, s okrajem vzhůru obráceným, narůžovělý a průsvitný, o průměru 2·5 *mm*. Lamell je 5 sterilních. Noha vláskovitá, 1—4 *cm* dlouhá. Ve Starých Skalách v prvním dómu na nánosu na jedlové jehlici. VIII. Jednou.

Mycena citrinella Pers.

Kloboučék polokoulovitý, 1·2 *mm* široký, citronově žlutý, na povrchu radiálně čárkovaný. Výtrusy podlouhle elliptické, na koncích zašpičatělé, 5 μ široké, 8—10 μ dlouhé, nazelenalé. Noha nitkovitá, přes 2 *cm* dlouhá, na spodu chloupkatá. Ve Starých Skalách u Propástky na nánosu na větvičce. VII. Jednou.

Mycena speirea Fries.

Klobouk s počátku polokoulovitě klenutý, později rozprostřený až promáčklý, 6 *mm* široký, mdle lesklý, šedohnědý, ve středu tmavší. Lamelly bílé sbíhající, výtrusy bezbarvé, kulaté nebo podlouhlé, 4·5—5·5 μ v průměru. Noha nitkovitá, až 7·5 *cm* dlouhá, na spodu chlupatá. V jeskyni Eliščině v hlavní chodbě na práchnivělém dřevě. XI. Nalezen jednou.

Mycena galericulata Scop.

Klobouk plodnic je kuželovitě vejčitý, až 8 *mm* vysoký, na okraji poněkud vráskovaný, lysý, barvy nahnědlé, ku krajím bledší, uprostřed až do modra přecházející a jakoby ojínělý. Lamelly jsou bělavé, sterilní. Noha až 9 *cm* dlouhá, téže barvy jako klobouk, nahoře lysá, dole jemně opýřená. Zajímavo je, že i u této formy objevuje se zakřivení tření, jež jest úplně identické s oním od Lentinusu. Houba, vegetujíc po straně dřevěných sloupků u zábradlí, vyhání husté trsy plodnic, které hned u základu zahýbají se svisle dolů, asi ve $^3/_4$ svých délek ohýbají se však třeně nahoru, nesouce vzhůru obrácené kloboučky. V jeskyni Eliščině v hlavní síni a Nicové v síni spojovací. VI.—VIII. Dosti hojná.

Mycena farrea Fries.

Vysoké a štíhlé plodnice nesou sotva 3 *mm* široké kloboučky barvy nažloutlé a pokryté lesklými vločkami. Sterilní. Noha 10 *cm* dlouhá, 1 *mm* tlustá, nahoře lysá, dole chloupkatá, bílá. Na zemi v pravé souběžné chodbě jeskyně Nicové. VIII. Nalezena jen jednou.

Lepiota seminuda Fries.

Plodnice s vejčitě klenutým 3 *mm* vysokým bílým kloboukem, jenž na spodu uzavřen je kroužkem. Lamelly bílé, sterilní. Noha je 2 *cm* vysoká, 1 *mm* tlustá, bílá. V prvním dómu Starých Skal na hlinitém nánosu. VIII. Nalezeno jednou.

Lepiota clypeolaria Bull. var. felina.

Plodnice s vejčitě klenutým 1 *cm* širokým, nažloutlým, na temeni tmavším kloboukem, pokrytým okrověžlutými koncentrickými šupinkami. Lamelly bílé sterilní. Noha 3 *cm* dlouhá, 3 *mm* tlustá, u spodu naběhlá, bílá. V pravé souběžné chodbě jeskyně Nicové, na zemi. VIII. Nalezena jednou.

Lepiota gracilenta Krombh.

Klobouk u mladých plodnic vejčitě klenutý, u dospělejších rozprostřený v průměru 6 *cm*, úplně bílý s tenkými přiléhavými šupinkami. Lamelly bílé. Výtrusy vejčité, 6—7 μ široké, 8—9 μ dlouhé. Noha 11 *cm* vysoká, nahoře 0·8 *cm* tlustá, u spodu silnější a zahnutá, bílá se zřetelným volným kroužkem. V jeskyni Nicové v síni spojovací a v pravé souběžné chodbě na hlinité náplavě. VIII. Nalezena dvakrát.

Sterilní formy myceliové.

Ozonium candidum Mart. (Coprinus.) (Fot. 6.)

Tato ve Sloupských jeskyních dosti hojně se vyskytující forma tvoří přiléhavé, tenké, pevné, bílé později nahnědlé, většinou přímočaré provazce, dělící se ve větší a menší větve. Provazce sestávají z těsně spojených, 7—11 μ širokých hyf, jež jsou po celé délce pokryty drobnými zrníčky šťovanu vápenatého. Vegetuje na zemi, na níž jsou buď zbytky spráchnivělého dřeva nebo dřevěné drtiny; v jeskyni Nicové ve spojovací síni a ve Starých Skalách u I. dómu na nánosu, kdež popíná i skalní stěnu jakož i u Řezaného kamene. Po celý rok. Velmi hojně.

Hypha membranacea Pers. (Polyporus.)

Mycelium v podobě tenkých na konci rozstřepených blan, složených z hyfových vláken, na jichž povrchu jsou četné vyloučeniny ve formě malých kuliček šťovanu vápenatého. Na dřevěném zábradlí „u Lesíka" v jeskyni Eliščině. XII—III. Dosti hojně.

Hypha elongata Pers. (Polyporus.)

Tato forma tvoří bílé, pevné provazce, které jsou však složené jako u předešlého druhu z hustě spojených hyfových vláken, prostoupených velkým počtem menších i větších hvězdičkovitých drůz šťovanu vápenatého. Na dřevěném sloupku na témž místě jako forma předešlá. IX.—III., dosti hojně.

Byssus plumosa Humb. (Fot. 7.)

Je velmi hojný ve Starých Skalách, kde tvoří na dřevěném zábradlí úhledné, čistě bílé, keříčkovité povlaky, které rukou lehce lze setříti. Po celý rok, velmi hojně.

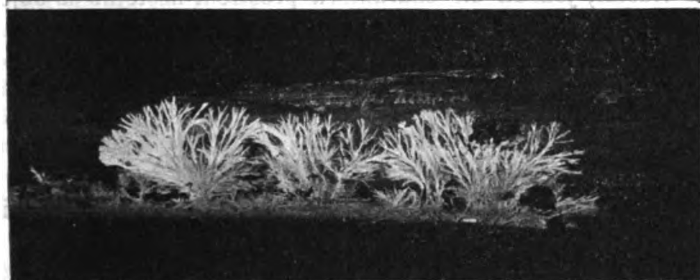
Byssus floccosa Schreb. (Fot. 8.)

Mycelium v podobě pěnovitých povlaků na sloupcích a na zábradlí v jeskyni Eliščině. Po celý rok, hojně.

Souhrn výsledků.

Při zkoumání jeskynní flory pozorujeme, že převážný její díl tvoří rostlinstvo tajnosnubné a z toho opět hlavně houby. S nimi setkáváme se téměř ve všech částech prostor podzemních jak na místech polosvětlých poblíž vchodu, tak i na nejzazších místech absolutní tmy. Při tom shledáváme, že určité druhy nevnikají hluboko do jeskyň, omezujíce se toliko na místa šerá neb alespoň pološerá, kdežto jiné výhradně v prostorách odlehlých a tmavých vegetují. K prvním náležejí houby, jichž obvyklým a pro vývoj jich jedině příznivým stanovištěm bývají světlá místa povrchová, a jež dostávají se náhodně a passivně do prostor jeskynních, kdež také nikdy nenabývají charakteru flory temnostní; k druhým řadíme ony druhy, které i na jiných místech


Fot. 6.


Fot. 7.


Fot. 8.

Fot. 6. *Ozonium candidum Mart.* (Coprinus).
Mycelium vegetující na zemi, na zbytcích dřeva v jeskyni Nicové. ($^1/_9$ skut. velik.)

Fot. 7. *Byssus plumosa Humb.*
Mycelium rostoucí na dřevěném zábradlí ve Starých Skalách. ($^1/_3$ skut. velikosti.)

Fot. 8. *Byssus flocossa Schreb.*
Mycelium činící bílé bavlnkovité povlaky na dřevěném sloupci v jeskyni Eliščině ($^1/_2$ skutečné velikosti.)

s oblibou rostou za takových podmínek životních, jaké nalézají v jeskyních, a tvoří zde tudíž pravou temnostní (ne jeskynní!) floru. Specielní flory jeskynní nestává, ježto všechny v jeskyních se vyskytující houby také mimo jeskyně na jiných pro ně příznivých stanovištích nalezneme.

Biologické prostředí jeskyň liší se od prostředí povrchového hlavně nedostatkem světla, poměry vlhkosti vzduchu, který je zde přesycen vodními parami, nízkou a konstantní teplotou jeho, jakož i chudostí substrátu na výživné látky.

Vlivem těchto rozdílů biologických jsou jeskynní houby podrobeny velkým změnám biologickým, morfologickým i anatomickým, jež tím více vystupují, čím dále vzdalujeme se od normálních podmínek povrchu. Jsou to následující modifikace, jež u různých druhů jednak dle jich vlastní, jednak dle charakteru prostředí nestejně se objevují:

1. prodloužení tření,
2. deformace a zakrnění klobouku,
3. zakrnění nebo zánik hymenia,
4. zánik schopnosti rozmnožovací,
5. změna zbarvení,
6. abnormální vzrůst plodnic vlivem pohybů paratonických i mechanicky vyvolaných,
7. vývoj forem myceliových na úkor produkce plodnic

Vývoj konidií u Basidiomycetů, který Maheu[66]) konstatuje, jsem nenalezl. Přicházely sice v hymeniu některých sterilních forem (*Polyporus hirsutus*, *P. annosus*, *Lenzites abietina*) tvary podobné oněm, jež Maheu pokládá za t. zv. konidie endogenní, než jak důkladné prozkoumání ukázalo, byla to pouze z hymenia vybíhající vlákna hyfová, jichž zrnitě sražená plasma činila dojem konidiových řetízků.

Pokud jde o množství druhů, je toto závislo na charakteru té které jeskyně a rozhoduje tu vedle jiných činitelů hlavně kvalita a kvantita substrátu. Avšak také různá doba roční je vlivuplným měřítkem pro vývoj jeskynních hub. Dle několikráte opakovaných celoročních pozorování seznal jsem, že největší a nejbujnější vegetace hub v jeskyních je v srpnu a začátkem září, nejchudší od ledna do dubna.

Vliv charakteru prozkoumaných jeskyň i doby roční na vegetaci hub jasně vyniká v následujícím přehledu.

---

[66]) Maheu J., p. c. p. 121, 135, 166, 175.

Předsíň jeskyně Nicové.

Polyporus hirsutus Wulf. Po celý rok.
Coprinus ephemerus Bull. IX.
Coprinus digitalis Batsch. IX.
Coprinus impatiens Fr. IX.

Jeskyně Nicová.

Trichia varia Pers. VIII.
Trichia fallax Pers. VII.—VIII.
Lycogala epidendron Fr. VIII.
Cordyceps Ditmari Quel. II.
Coprinus digitalis B. IX.
Crepidotus proboscideus Fr. VIII.
Pholiota unicolor Bull. X.
Omphalia stellata Fr. P. c. r.
Mycena galericulata Scop. VI.—VII.
Mycena farrea Fr. VIII.
Lepiota clypeolaria Bull. VIII.
Lepiota gracilenta Krombh. VIII.
Ozonium candidum Mart. P. c. r.

Jeskyně Eliščina.

Arcyria stricta Rostaf. P. c. r.
Trichia fallax Pers. P. c. r.
Comatricha Friesiana Rostaf. P. c. r.
Mucor Mucedo Bref. P. c. r.
Xylaria Hypoxylon Lin. P. c. r.
Stereum hirsutum Wild. P. c. r.
Polyporus annosus Fr. P. c. r.
Polyporus lacteus Fries. XII.—IV.
Lenzites abietina Bull. P. c. r.
Lentinus suffrutescens Brot. P. c. r.
Coprinus micaceus Bull. XII.—I.
Hypholoma fasciculare Huds. P. c. r.
Naucoria camerina Fr. VIII.
Naucoria cerodes Er. VIII.
Flammula flavida Schaeff. P. c. r.
Pluteus plebophorus Ditm. VIII.
Omphalia stellata Fr. P. c. r.
Mycena speirea Fries. XI.
Mycena galericulata Scop. VI.—VIII.
Hypha membranacea Pers. XII.—III.
Hypha elongata Pers. IX.—III.
Byssus floccosa Schreb. P. c. r.

Staré Skály.

Comatricha Friesiana Rostaf. P. c. r.
Mucor Mucedo Bref. P. c. r.
Ombrophila violacea Hedw. P. c. r.
Helotium virgultorum Vall. VII.
Rosellinia aquila Fr. P. c. r.
Xylaria Hypoxylon Linn. Mimo zimu.
Lenzites abietina Bull. P. c. r.
Hygrophorus virgineus Wulf. VI.—XI.
Coprinus micaceus Bull. XII.
Hypholoma sublateritium S. VI.—XI.
Naucoria tenax Fr. IX.
Collybia velutipes Curt. VIII.
Omphalia stellata Fr. P. c. r.
Mycena stipularis Fr. VIII.
Mycena citrinella Pers. VII.
Lepiota seminuda Fr. VIII.
Ozonium candidum Mart. P. c. r.
Byssus plumosa Humb. P. c. r.

Literatura.

Absolon K., Einige Bemerkungen über die mährische Höhlenfauna. Zool. Anz. Bd. XXIII. Nr. 612, 1900.

Id., Propast Macocha na Moravě. Praha 1904, p. 53—58.

Id., Kras Moravský. Monografie krasového] fenoménu v devonských vápencích planiny drahanské. Díl I. Praha 1907, 152 p.

Bary A. de, Vergleichende Morphologie und Biologie der Pilze, Mycetozoen und Bakterien. Leipzig 1884.

Bonnier G., La faune et la flore des Cavernes. La Revue, ser. 4, fasc. 22, p. 227—238. Paris 1906.

Brefeld, O., Ueber die Bedeutung des Lichtes für die Entwickelung der Pilze (I. Mittheilung). Sitzungsb. d. Gesell. naturforsch. Freunde zu Berlin 1877.

Bubák Fr., Zajímavá monstrosita houby Lentinus lepideus Fr. Vesmír, roč. XXXI., 1902, p. 1—2.

Buller A. H. R., The reactions of the fruit-bodies of Lentinus lepideus Fr., to external stimuli. Ann. of bot. 1906. 19, 427—438. 3. Taf. Cit. dle Bot. Zeitung.

Corda A. C. J. Pracht-Flora europäischer Schimmelbildungen. Leipzig—Dresden 1839.

Costantin M. J. et Dufour M. L., Nouvelle flore des Champignons. Troisième édit. Paris.

Čelakovský L. jun., České myxomycety. Archiv pro přírodověd. výzk. Čech. VII. díl. č. 5. Praha, 1890.

Eidam Ed., Ueber Beobachtungen an Schimmelpilzen. Jahresb. d. Schles. Gesell. für vaterländ. Cultur, 1880, p. 137.
Elfving F., Studien über die Einwirkung des Lichtes auf die Pilze. Helsingfors, 1890.
Fries E., La distribution géographique des Champignons. Ann. Soc. nat. Bot. 1861, p. 25.
Fries S., Die Falkensteiner Höhle, ihre Fauna und Flora. Württembergische naturw. Jahresb. 1874.
Fruwirth C., Ueber Höhlen. Die Pflanzenwelt der Höhlen. Zeitschr. d. Deut. u. Oesterr. Alpenvereines, Salzburg, Jahrg. 1888. Heft. 1. P. 31—33.
Id., Die Höhlen der Vereinigten Staaten von Nordamerika. Dr. A. Petermanns Mitteilungen aus Justus Perthe's Geographischer Anstalt. Herausgegeben von Prof. Dr. A. Supan. 34. Bd. 1888. Die Flora der Höhlen, p. 208.
Gilkinet A., Memoire sur le polymorphisme des Champignons. Mém. de l'Acad. 1874.
Gräntz Fr., Ueber den Einfluss des Lichtes auf die Entwicklung einiger Pilze. Leipzig 1898.
Hamann O., Europäische Höhlenfauna. Jena 1896.
Hartwig G., The subterranean World. London 1885. Chap. XIV. P. 156—159.
Hoffmann G. F., Vegetabilia in Hercyniae subterraneis collecta iconibus descriptionibus et observationibus illustrata. Norimbergae. 1811.
Hovey H. C., Celebrated American Caverns, especially Mammoth. Wyandott and Luray. Cincinnati 1896.
Id. and Call R. E., Mammoth Cave of Kentucky. Louisville 1901. P. 106—107.
Humboldt Fr. A. ab., Florae Freibergensis specimen plantas cryptogamicas praesertim subterraneas exhibens. Berolini 1793.
Knebel W. v., Höhlenkunde mit Berücksichtigung der Karstphänomene. Braunschweig 1906. P. 196.
Kolkwitz R., Ueber den Einfluss des Lichtes auf die Athmung der niederen Pilze. Jahrb. f. wissensch. Botan. Bd. XXXIII. Heft 1.
Lamarlière G. de et Maheu J., Sur la flore des Mousses des cavernes. Comp. Acad. des Sc., avril 1901.
Id., Sur la flore bryologique des grottes du Midi de la France. Bull. Soc. Bot. de Fr., t. XLVIII. 1901.
Id., Sur les Muscinées des cavernes de l'Yonne. Journ. de Bot., t. XVI. n°. 8, 1902, 1 pl.
Id., Sur les affinités géographiques des Muscinées des cavernes. Assoc. franç. pour l'avanc. des Sc., Montaban, 1902, p. 674.
Leunis J., Synopsis der Pflanzenkunde 1883—1886. I, III.
Ludwig Fr., Ueber die Phosphorescens der Pilze und des Holzes. Dissertation 1874.
Id., Ueber teratologische, durch Witterungseinflüsse bedingte Bildungen an den Fruchtköpfen der Hutpilze. Botan. Centralbl., XII. 1882, p. 136.
Id., Lehrbuch der niederen Kryptogamen. 1892.
Magnus W., Über die Formbildung der Hutpilze. Archiv f. Biotol., herausg. v. d. Gesell. naturforsch. Freunde zu Berlin. Bd. I. 1906.
Maheu J., Note sur le Champignons observés dans les profondeurs des causses Méjan et de Sauveterre. Bull. Soc. mycol. de Fr., t. XVI. fasc. 4., 1900, p. 193.
Id., Florure des avens des causses Méjan et de Sauveterre. Bull. du Mus. d'Hist. nat., 1900, n° 5, p. 254.

Id., Contribution à l'étude de la flore des causses. Rev. Ampère, oct. 1901, n° 7, p. 99.
Id., Contribution à l'étude des eaux souterraines du gard. Bull. Soc. d'et. des Sc. nat. de Nimes. 1902, p. 87.
Id., Contribution à l'étude de la flore obscuricole de France. C. R. du Congrès des Soc. savantes. Paris, 1902.
Id., Recherches anatomiques sur les Ménispermacées. Journal de Botanique, t. XVI., n° 11, 1902.
Id., Sur quelques Muscinées cavernicoles des terrains siliceux. Assoc. franc. pour l'avancement des sciences. Congrès d'Angers 1903, p. 722—726.
Id., La flore spéléologique. Revista italiana di Speleologia, n° 1. Bologna 1903.
Id., La flore souterraine des cavernes de la cure (Yonne). C. R. du Congrès de Sociétés savantes en 1903.
Id., Étude géologique et biologique (flore) des Cavernes de la haute Italienne centrale. C. R. de Congrès des Soc. savantes. Paris 1904.
Id., Contribution à l'étude de la flore souterraine de France. Annales des sciences naturelles, botanique, t. III. 9e série, Paris 1906. 189 p., 35 fig.
Martel E. A., La spéléologie ou science des cavernes. Collection scientia, 1900. Note sur la flore souterraine, p. 120.
Id., Le gouffre et la rivière souterraine de Padirac. Paris 1900. P. 171—172.
Massee G., A Revision of the Genus Cordyceps. Annales of Botany, Vol. IX. No. XXXIII. March, 1895.
Molisch H., Leuchtende Pflanzen. Jena 1904.
Nees v. Esenbeck, Die unterirdischen Rhizomorphen, ein leuchtender Lebensprocess. Verh. d. Kaiserl. Leopold.-Carol. Akad. d. Naturforscher, Bd. XI. S. 603—712. Bonn 1823.
Němec B., Ueber die Art der Wahrnehmung des Schwerkraftreizes bei den Pflanzen. Ber. d. deutsch. botan. Gesell. 1900, p. 241.
Id., Ueber die Wahrnehmung des Schwerkraftreizes bei den Pflanzen. Jahrb. f. wissensch. Bot. 1901, p. 80—178.
Id., Die Perception des Schwerkraftreizes bei den Pflanzen. Ber. d. deutsch. botan. Gesell. 1902, p. 339.
Id., Vztahy rostlin k vnějšímu světu. Sbírka přednášek a rozprav. Praha 1907.
Niessel G. v., Vorarbeiten zu einer Kryptogamenflora von Mähren und Oesterr. Schlesien. Verh. d. naturf. Vereines in Brünn. III. Bd., 1864., p. 60—193.
Phillips W., Monstrosities in fungi.
Pokorny A., Unterirdische Flora der Karsthöhlen. Verhandl. d. zool.-bot. Vereines in Wien. Bd. III. Jahrg. 1853.
Id., Zur Flora subterranea der Karsthöhlen. Schmidl, Die Grotten und Höhlen von Adelsberg, Lueg, Planina und Laas. Wien 1854. P. 221—229.
Rabenhorst L., Kryptogamen-Flora von Deutschland, Oesterreich und der Schweiz Bd. I. Pilze. Abh. I.—VIII.
Reinke J., Ueber Deformation von Pflanzen durch äussere Einflüsse. Botan. Zeit. 1904. Heft V.—VI.
Saccardo P. A., Sylloge Fungorum omnium huiusque cognitorum. Patavii 1882—1902.
Sadebeck R., Ueber äussere Bedingungen für die Entwicklung des Hutes von Polyporus squamosus. Bot. Centralbl., 1886, XXV. p. 226.
Schneider R., Über subterrane Organismen. Programm d. kön. Realschule Berlin 1885.

Schröter J., Bemerkungen über Keller- und Grubenpilze. Jahresber. d. Schles. Ges. f. vaterl. Cultur, 1883, p. 193—208.

Schulzer v. Müggenburg St., Die Fruchterzeugung an beiden Seiten bei den Polyporeen u. Boletusarten. 1877.

Scopoli J. A., Flora Carniolica exhibens plantas Carnioliae indigenas etc. Vindobonae 1760.

Id., Dissertationes ad scientiam naturalem pertinentes. Plantae subterraneae descriptae et delineatae. Pragae 1772.

Steidler E., Hymenomycetes moravici. Zeit. d. mähr. Landesmuseums V. Bd., 2. Heft, 1905.

Tavel Fr. v., Vergleichende Morphologie der Pilze. Jena 1892.

Velenovský Jos., Všeobecná botanika. Srovnávací morfologie. Díl I. Praha 1905.

Voss W., Mykologisches aus Krain. 10. Ein Beitrag zur Kenntniss der subterranen Pilze. Oesterreich. botan. Zeitschr. 1879. No. 10.

Id., Materialien zur Pilzkunde Krains. 5 Tle. (Wien. Z. bot. G.) 1879—1887.

Wankel H., Bilder aus der mährischen Schweiz und ihrer Vergangenheit. Wien 1882. P. 209.

Wettstein R. v., Beitrag zur Pilzflora der Bergwerke. Oesterr. bot. Zeitschrift. Jahrg. 1884. No. 5. u. 6.

Zopf W., Die Pilze in morphologischer, physiol., biolog. und systematischer Beziehung. Breslau 1890.



XIII.

O nových smyslových orgánech slepých isopodů.

(Titanethes herzegowinensis Verhoeff.)

Napsal Dr. Jaromír Wenig.

S tabulkou a dvěma obrázky v textu.

Předloženo v sezení 22. listopadu 1907.

I.

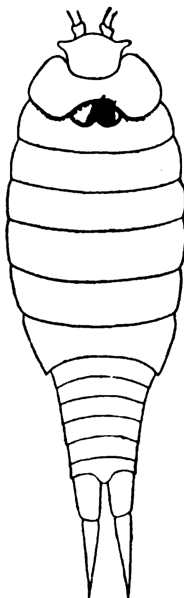
Předmětem přítomné práce jest výklad zvláštního orgánu (bezpochyby smyslového) u jeskynního zástupce isopodů *Titanethes herzegowinensis* Verhoeff, kterého na své cestě po Černé Hoře v Lipské pečině nedaleko Cetyně sbíral p. prof. Dr. Mrázek a laskavě mně ku zpracování přenechal.

Za tuto ochotu vzdávám i na tomto místě p. prof. Mrázkovi povinný svůj dík.

Titanethes herzegowinensis jest obyvatelem jeskyní v jižní Hercegovině. Žije tu v úplné temnotě hlavně na vlhkých stěnách jeskyní a nahražuje v těchto končinách druh *Titanethes albus* (tohoto nalezl Verhoeff též v pološeré části jeskyně *Divacca*). Dospělý sameček druhu *Titanethes herzegowinensis* dosahuje délky 11 *mm*, dospělá samice až 13·5 *mm*; jest na povrchu těla úplně hladký a lesklý, postrádaje hrbolků (Knötchen) na hlavě i trupu, jež shledáváme u *Titanethes albus*; u tohoto jen abdomen jest hladký. Mimo to liší se oba uvedené druhy ústroji ústními, tvarem hlavy (zadní její části) a třetího abdominálního segmentu a hlavně tím, že *samci* druhu *Titanethes herzegowinensis* mají na hřbetě na druhém článku hrudním zvláštní, veliký smyslový orgán, který Verhoeff podrobněji nepo-

psal (VERHOEFF, *„Ueber paläarktische Isopoden"*, *Zool. Anzeiger 1900* 2. Aufsatz).

Pozorujeme-li druh *Titanethes herzegowinensis* jen pouhým okem, poznáme ihned obě pohlaví zcela určitě: samečkové mají totiž hřbetní štítek na prvém článku za hlavou uprostřed hluboce do předu vykrojený, tak že týž jest uprostřed značně úzký (obr. I.). Kraje tohoto štítku jsou však do zadu značně prodlouženy a nahoru



Obr. 1.

Titanethes herzegowinensis ♂ dle celkového praeparátu, na němž vyvýšenina hřbetní tlakem sklíčka se sploštila. Po stranách hlavy viděti jest výběžky, v nichž leží statocysty. Prvý článek za hlavou jest uprostřed vykrojen, na druhém patrný jest hustý chumáč vlásků.

vztýčeny, takže se zdá, jakoby to byla zakrnělá křídla. Na následujícím článku jest patrna značná, okrouhlá vyvýšenina uprostřed hřbetu, před ní pak při pečlivém pozorování poněkud tmavší místo. Slabým zvětšením zjistíme, že toto místo jest vlastně chumáček jemných, dlouhých vlásků, neobyčejně hustě spletených, jichž konečky tu a tam převyšují konturu tohoto útvaru. Samičky postrádají těchto znaků *úplně*.

Textový obrázek I. kreslen jest dle celkového praeparátu; představuje polohu nových smyslových orgánů, *statocystů a orgánu hřbetního*, u samečka. Statocysty leží v postranních, růžkovitých výběžcích hlavy jako u *Titanethes albus*. Zadní okraj prvního článku hrudního jest hustě pokryt krátkými, tuhými, krycími brvami; těchto jest nejvíce uprostřed, tedy tam, kde jest štítek nejužší, ku krajům jich ubývá. „Křídla" jsou tlakem sklíčka dolů stlačena ze své původní, poněkud nazdvižené polohy. Rovněž vyvýšenina na následujícím článku jest stlačena, tak že chomáček umístěný na jejím předním sklonu vyniká značně do popředí. Přední okraj druhého hrudního článku jest směrem do zadu vykrojen a uprostřed, nad chomáček vybíhá ve hrot. I tento okraj jest, jak z obrázku vidno, ochrannými, tuhými brvami hustě posázen. Účel zdvižených „křídel" jest patrný: chrání jemný smyslový orgán, ležící na předním sklonu vyvýšeniny následujícího segmentu. Touto vyvýšeninou kryt jest zmíněný orgán i ze zadu.

To jsou okolnosti, jež možno ve směru tomto shledati pouhým okem nebo slabým zvětšením; pro bližší poznání obou orgánů jsou ovšem serie nezbytny.

I. Statocysty.

Již na celkových praeparátech, jež byly obyčejným boraxovým karmínem probarveny a náležitě vyjasněny, můžeme tyto orgány pozorovati. Leží ve zmíněných již postranních výběžcích hlavy těsně pod tenkou vrstvou chitinu; na povrchu tohoto jsou roztroušeny tuhé krycí brvy.

Statocysty jeví se nám jako kulovité shluky jader, i povrchní pojná jádra orgánu možno dobře rozeznati. Jádra hypodermis sáhají zpravidla pouze ku statocystě nevstupujíce mezi tuto a obal chitinový. Při vhodném osvětlení možno spatřiti i nerv k váčku přistupující.

U exemplářů, které podrobíme proceduře parafinové, odtáhne se obyčejně hypodermis i s váčkovitým orgánem od chitinu, tak že mezi oběma povstane mezera. Jest to patrno na *obr. 1 a 2*. Jak z obrázků těchto jest zřejmo, neliší se podstatně statocysty u *Titanethes hersegowinensis* od týchž orgánů u *Titanethes albus*. Jsou o něco menší, tvaru buď úplně kulatého neb mírně podlouhlého; buněčné jejich stěny mají četná veliká jádra s jadérky ostře odlišenými. Na peri-

1*

ferii orgánu jsou roztroušena sploštělá pojná jádra, skoro úplně černající po železitém haematoxylinu M. Heidenheinově. Dutiny ve váčcích jsou celkem menší než u *Titanethes albus*, u něhož statocysty jsou, pokud jsem seznal, ze všech isopodů nejvíce vyvinuty; rovněž konkrece uvnitř váčků jsou drobné a v malém jen počtu přítomny (*ob. 2*).

Innervaci statocystů u *Titanethes herzegowinensis* zdaří se pozorovati toliko na řezech určitým směrem vedených. Nerv, velice jemný, postupuje výčnělkem a rozšiřuje se zpravidla před statocystou, v niž přechází. Při tom pamatovati třeba, že nerv přistupuje k váčku téměř tangenciálně, tak že na řezech, vedených středem váčku, přímé spojení obou nepozorujeme (*ob. 1*). —

Jak tedy ze všeho patrno, nevyznačují se statocysty u našeho druhu ničím zvláštním, podobajíce se orgánům těm u ostatních isopodů suchozemských. Orgány tyto, jež možno beze vší pochyby označiti jako statocysty, jsou největší u obou druhů *Titanetha* mnou pozorovaných, pak u našeho druhu *Platyarthrus Hoffmannseggi*, tedy u druhů úplně slepých, menší jsou již u druhu *Haplophthalmus elegans*, jenž má orgány zrakové značně zakrnělé. Máme tedy ve statocystech suchozemských isopodů pěkný příklad kompensace dvou různých smyslových orgánů.

II. Hřbetní smyslový orgán.

Jak již na počátku uvedeno, vyskytuje se tento podivný orgán pouze u samečků; rovněž poloha jeho byla již naznačena. Při hotovení serií vedl jsem řezy příčné i podélné, jichž kombinací získán obraz organisace celého ústroje; k barvení užil jsem haematoxylinu dle M. Heidenheina, nebo ještě lépe dvojitého barvení eosin — Delafieldův haematoxylin, při čemž zvláště eosin osvědčil se výborně ku tinkci smyslových elementů.

Nejdříve věnujme pozornost řezům příčným. Tyto vedeny počátkem prvého článku hrudního neukazují nic zvláštního. Postupujeme-li však do zadnějších partií tohoto segmentu, vidíme, že počíná se na řezech objevovati úzká dlouhá štěrbina, ležící rovnoběžně s povrchem těla. Vzdálenost její od hřbetní hypodermis činí asi pětinu vzdálenosti od této — k rouře zažívací. Štěrbina tato jest vyložena slabounkou vrstvou chitinu a kontura její jest na straně dorsální rovná, na ventrální však rozmanitě zprohýbaná (podobně jako na *ob. 4*, tento

kreslen jest však dle řezu z partie zadnější). Kol dokola jest štěrbina obklopena obyčejným pletivem tělním, v němž tu a tam roztroušeny jsou známé rosetovité žlázy; střed hřbetu jest mírně dolů prohnut a pokryt krátkými jemnými brvami (*ob. 3*), po stranách pak jest hřbet zdvižen v jakési vyvýšeniny, jichž podstatnou výplní jsou mocné svazky svalů dorsoventrálních i podélných. Krycích brv na povrchu těchto vyvýšenin jest méně než uprostřed.

Na dalších příčných řezech vidíme, že štěrbina stále se zvětšuje, spodní, zprohýbaná kontura vykazuje po pravé i levé straně hluboký, ostrý výběžek dolů a zaujme v brzku tvar, jaký zobrazen na *ob. 3 h*: jest nahoře nejširší a i spodní její kontura jest bez záhybů; chitinová vrstva zde dole počíná ponenáhlu tloustnouti. Ku spodní straně štěrbiny přisedají nyní silné svaly dorsoventrální (*obr. 3 m*). — Postupujíce dále, vidíme, že vrstva pletiva nad štěrbinou jest stále tenčí a tenčí, až konečně objeví se mělký žlábek uprostřed hřbetního povrchu, první to hranice mezi oběma na počátku zmíněnými „křídly"; štěrbina jednoduše vychází na povrch.

Obě křídla úplně již rozestouplá vidíme na *obr. 4.*; na povrchu jsou jemně a hustě obrvena a dotýkají se dosud navzájem dlouhými, tlustými brvami, které mnohdy až háčkovitě spolu souvisí a barví se haematoxylinem skoro černě, kdežto okolní chitin jest pouze slabě zabarven. Spodní zprohýbaná stěna štěrbiny se ponenáhlu vyklenuje a přechází v nekrytou část hřbetu druhého hrudního článku. Zmíněná štěrbina leží tedy pod úzkou střední částí prvého článku, jenž po obou stranách do zadu vybíhá v ochranná křídla.

Obr. 5. znázorňuje řez vedený zase o něco dále; kraje obou křídel vzájemně se již nedotýkají, kryjí ale stále, aspoň částečně, povrch hřbetu, který jest již značně nahoru vypouklý a po obou stranách tvoří dolů převislý záhyb, vyplněný svalstvem a nemnohými jádry hypodermálními. Mezi křídly a vyklenutým hřbetem jest mezera *h*, jejíž kontura na řezech jest laločnatá, všelijak zprohýbaná, zpravidla tak, jak ukazuje *obr. 5.* Hypodermis medianní části hřbetní jest poněkud jiná než jinde pod povrchem těla. Jádra její (*vhp*) jsou zde totiž zmnožena, ve dvou až třech vrstvách uložena a velmi drobná; barví se též velmi intensivně, takže při slabých zvětšeních jeví se nám jako souvislý, tmavomodrý pruh. Jinde pod povrchem jsou jádra hypodermis větší, řídčeji rozložena a nebarví se tak temně. Ve změněné hypodermis hřbetu jsou též, a to hlavně po stranách, větší jádra, směrem dorsoventrálním protažená a trochu šikmo k povrchu postavená; ta jsou jen v jedné vrstvě uložena. Pod touto částečně změ-

němou hypodermis jest obyčejné pletivo tělní, prostoupené rosetovitými žlazami a svalstvem.

Další řezy ukazují tytéž poměry až na změny velmi nepatrné (na př. nepatrna jest změna tvaru laločnaté dutiny pod křídly). Blížíme se však již onomu místu, kde, jak na počátku práce uvedeno, umístěn jest hustý chumáč brv na předním sklonu význačné hřbetní vyvýšeniny. Na povrchu hřbetu, dosud normálně vypuklého, počínají se objevovati jemné, rozmanitě zakroucené, dosud nepříliš dlouhé krycí brvy, a to na ploše dosti veliké, i na místech přikrytých okraji křídel; brvy ty barví se u své base skoro úplně černě. Brvy tyto jsou uprostřed stále delší, i najdeme jich na dalších řezech hustý chumáč (*obr. 6.*); volnými konci přečnívají vysoko nad okraj křídel již značně od sebe rozestouplých.

Ostatní poměry jsou na těchto řezech téměř naprosto stejné jako na řezech předcházejících.

Popsané brvy jsou vesměs brvami pouze krycími, neboť nikde neprostupují chitinem a nejsou v žádném spojení s buňkami smyslovými. Dříve zmíněná pozměněná hypodermis trvá stále, jest asi ve vztahu ku stále silnější vrstvě chitinu, již na povrchu hřbetu pozorujeme.

Další řezy zasahují již počátek hřbetní vyvýšeniny samé. Táž zdvihá se z počátku mírně uprostřed hřbetu mezi křídly značně již od sebe vzdálenými. Jest pokryta silnou vrstvou chitinu, na niž přecházejí se všech stran hřbetu husté brvy krycí; tyto i celý povrch jsou konsistence značně křehké, takže ne vždy podaří se vše v náležitém stavu na praeparátu udržeti. Ve vyvýšenině pod chitinem jsou hypodermální jádra značně zmnožena, takřka ji vyplňujíce, jež jsou zřetelnou blanou oddělena od spodního tělního pletiva. Nyní pozorovati možno velmi četné rosetovité žlázy. Jinak jest hřbet stále stejného tvaru jako na obr. 6.

Vyvýšenina stoupá nyní rychle, takže ji řezy zasahují již skoro v celé její výši; všude kolem leží drobounká tříšť křehounkých brv nožem roztříštěných. Dospívajíce k vrcholu vyvýšeniny, pozorujeme, že tato není již nahoru vypouklá, nýbrž naopak tlustá vrstva chitinová prohlubuje se mírně dolů, takže vzniká tvar jakési mělké misky (*obr. 7.*). Jader hypodermis ubylo již značně. Horní kontura misky jest nerovná a odtud vyčnívá do značné výše mohutný chumáč silných brv, vlastně *tyčinek smyslových;* železitý haematoxylin barví je skoro úplně černě, jsou však bohužel tak křehké, že se málo kdy podaří zachovati je neporušeny.

Vrstva chitinová pod smyslovými tyčinkami vykazuje při silnějších zvětšeních pruhování ve směru dorsoventrálním; poměry tyto objasní nám nejlépe praeparáty, k jichž barvení užito bylo eosinu. Na těch vidíme, že smyslové tyčinky *prostupují* stěnou misky dolů a jsou takto příčinou zmíněného dorsoventrálního pruhování chitinu. Na *obr. 7.* jest nakreslena mískovitá prohloubenina s tyčinkami ji prostupujícími.

Na nejbližších řezech zastihujeme stále zmíněnou misku s tyčinkami smyslovými, avšak těsně pod ní objevuje se hustá skupina zvláštních jader. To jsou jádra buněk smyslových (*obr. 8.*). Tato jádra jsou značně prodloužená, vřetenovitá a značně úzká; jsou postavena všecka svou dlouhou osou kolmo na povrch těla a barví se jak haematoxylinem, tak i jinými barvivy tak intensivně, že na mnohých strukturu vůbec nelze zjistiti, pouze v některých lze chromatin rozeznati. Největší množství těchto dlouhých jader jest po obou stranách misky, méně přímo pod ní samou. Sledujeme-li seskupení jejich směrem dolů, ku basi celé hřbetní vyvýšeniny, pozorujeme, že jim ubývá stále na délce a že počet jich jest stále menší, až konečně znenáhla přecházejí v obyčejná, kulovitá jádra hypodermální, uložená v jediné vrstvě pod chitinovým povrchem (*obr. 8.*).

Ježto mezi miskou a buňkami smyslovými není hypodermis a jádra buněk smyslových ponenáhlu přecházejí v obyčejná jádra hypodermis, lze souditi, že buňky smyslové vznikly z buněk hypodermálních. Souvislost tyčinek smyslových s buňkami smyslovými (*obr. 11. a 12.*) lze lépe pozorovati na řezech podélných než na řezech příčných, i bude o věci té později ještě zmínka učiněna.

Dosud nebylo lze postřehnouti stopy *innervace* tohoto podivného orgánu. Na dalších příčných řezech zastihujeme již zadní okraj misky, jádra smyslových buněk vidíme stále, ač již v menším počtu; v těchto místech objeví se nám prvé začátky innervace přicházející ze spodních vrstev pletiva. Pod smyslovými buňkami počínají se jeviti nepatrné proužky vláken nervových, které mizí ventrálně mezi obyčejnými buňkami pletiva tělního a rosetovitými žlazami stále hojně se vyskytujícími. Tyto nervové praménky leží mezi mohutnými svazky podélních tělních svalů (*obr. 8.*) a rozplétají se značně do šířky, blížíce se buňkám smyslovým. Pokračování a mohutnění této innervace nacházíme na dalších řezech příčných.

Zatím zmizela již miska na povrchu vyvýšeniny a tato se ponenáhlu opět vyklenuje. Z ní vyčnívá stále množství smyslových tyčinek, ale mnohem *nižších*, než jaké viděli jsme v misce. U všech

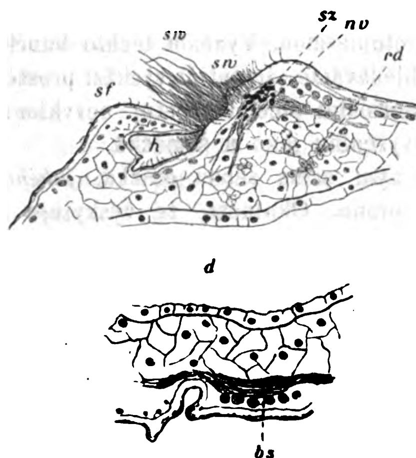
lze zjistiti i na praeparátech železitým haematoxylinem barvených, že prostupují vrstvou chitinovou pod nimi ležící a že spojují se s buňkami smyslovými, tyto pak stýkají se s vlákny nervovými. Čím dále do zadu postupujeme, tím hustší a mohutnější jsou praménky nervové. Směrem dolů zúžují se tyto v úzké proužky, jež táhnou se po obou stranách roury zažívací (*d*), pod kterou leží břišní páska. Direktního spojení svazečků vláken nervových s touto nepodařilo se mi zjistiti, ač nelze téměř o něm pochybovati, uvážíme-li směr, kterým k elementům smyslovým přicházejí. Výjimkou shledal jsem, že praménky nervové přistupují k buňkám smyslovým též ze předu, jak znázorněno jest na ob. 11. (řez podélný).

Postupujeme-li ku dalším řezům, pozorujeme, že smyslové tyčinky na povrchu se více neobjevují, též smyslové buňky a praménky nervových vláken již zmizely; povrch hřbetu vyklenuje se znenáhla a pokryt jest jen řídkými brvami krycími. Řez z partie ještě další zobrazuje ob. 10.: vyvýšenina přešla prostě v normální hřbet zvířete. Vidíme tu mohutné svazky dorsoventrálních svalů, běžících poněkud šikmo, i svalů podélných (*m*, *lm*) a velmi četné žlázy v pletivu roztroušené.

Tím vyčerpali jsme vše, co na příčných řezech možno pozorovati. Přehledný obraz celého smyslového orgánu poskytují nám řezy *podélné*. K barvení těchto užil jsem mimo železitého haematoxylinu Heidenhainova i kombinace eosinu a haematoxylinu Delafieldova. Na ob. 11. znázorněn jest řez vedený podélně právě středem hřbetní vyvýšeniny. Chitinová vrstva má na předním svahu dvě prohloubeniny, horní mělkou, dolní značně hlubší; jsou od sebe ostrou hranou odděleny. Dolní hlubší jest prve popsaná chitinová miska, ze které směrem vpřed vyčnívá chumáč dlouhých smyslových tyčinek. Tyto po užití eosinu mají vzhled tyčinek skleněných, jsou skoro průhledné a velmi křehké, tak že na řezech velmi snadno se tříští. Tyčinky tyto jsou u kořene značně silné, zúžují se však distalně a vybíhají v jemné vlákno. Při silných zvětšeních vidíme, že prostupují stěnou misky dolů k intensivně zbarveným jádrům — jsou to vlastně prodloužené, nad povrch vyčnívající buňky smyslové. Nad těmito elementy, tedy v hořejší mírné prohlubině, sestaveny jsou *kratší* tyčinky smyslové. Tyto jsou vesměs stejně dlouhé a tak hustě vedle sebe seskupeny, že tvoří souvislý lem nad povrchem těla (na ob. 11. jest jich zobrazeno mnohem méně). Krátké tyčinky pronikají ještě zřetelněji než dlouhé spodinou svou ku jádrům smyslovým, jsou to zase podivně utvářené smyslové buňky. Ob. 12. *a*) *b*) ukazuje dvě

takové isolované, immersí pozorované buňky; ty, které jsou na vyvýšině nejdoleji, jsou rovné, zadnější však jsou poněkud do zadu ohnuté. Tento ohyb, který jest u posledních buněk největší, pozorujeme právě v místě, kde tyto prostupují chitinovou vrstvou. Barva této jest v celém rozsahu, kudy buňky smyslové jí prostupují, hnědá, čímž liší se od chitinu jinde na povrchu těla. Jádra buněk smyslových jsou po zmíněném dvojitém barvení zbarvena sytě masově a tak intensivně, že nelze na nich vůbec struktury znamenati; jsou nejhustěji uložena v těch místech, kde jest rozhraní mezi dlouhými a krátkými smyslovými buňkami.

Jak již uvedeno a na obrázku naznačeno, míří všechna tato jádra svou dlouhou osou ku povrchu těla, poloha ta jest přirozeně



Obr. 2.

podmíněna úzkým tvarem příslušných buněk (obr. 12.). Mezi jádry viděti jest husté pletivo jemných vláken nervových, jež s buňkami souvisí. Tato vlákna přistupují k buňkám v několika pramáncích ze spodních partií těla. Na podélném řezu středem hřbetu zastihneme jen horní, rozšiřující se konce těchto praménků, neb (obr. 9.) probíhají po stranách těla, nikoli prostředkem. Na obr. 13. vidíme čtyři praménky za sebou prostupovati pletivem těla; řez, dle něhož obrázek ten kreslen, pochází z postranní části těla. Jak patrno, přicházejí nervová vlákna k orgánu většinou ze zadu.

Těsně pod vrstvou smyslových jader probíhá pletivem široký sval podélný; nějakou souvislost jeho se smyslovým orgánem nemohl jsem konstatovati.

Textový obrázek II. naznačuje schematicky podélný řez tělem právě uprostřed; *s f* jest průřez úzké střední části prvého článku hrudního (srovnej obr. I.). Zde stýkají se obě křídla, jež pak dále do zadu vyvýšeninu s obou stran kryjí. Dále vidíme zde: dutinu *h*, jejíž příčné průřezy jsou patrny na ob. 3. a 4., chumáč smyslových elementů krátkých i dlouhých *sw*, jádra buněk smyslových *ss*, a innervaci *nv*. Pod zažívací rourou *d* táhne se páska břišní *bs*.

Jest pozoruhodno, že hřbetní smyslový orgán nalézáme jen u samečků; u samic není ani vyvýšeniny ani ochranných křídel. Na příčných řezech vidíme i u samic štěrbinu podobně jako u samců; jest značně širší ve směru dorsoventrálním než u těchto, ale směrem vzad rychle se snižuje. Pod její spodinou, mezi oběma pruhy dorsoventrálních svalů, shledal jsem okrouhlý shluk zvláštních, dlouhých buněk s čirou protoplasmou. Význam těchto buněk jest nejasný. Na dalších řezech shledáváme, že dutina vychází prostě na povrch, spodina její přechází v normální plochu hřbetu, nevyklenujíc se v onu charakteristickou vývyšeninu jako u samečků.

Naskytá se nyní sama sebou otázka, *jakého významu* jest popsaný smyslový orgán. Okolnost, že vyskytuje se toliko u jednoho pohlaví, zdá se nasvědčovati tomu, že má nějaký vztah k funkcím pohlavním. V říši živočišné vidíme přečetné případy, kde pohlavní dimorfismus jeví se tím, že samčí pohlaví jest složitěji organisováno a že projevuje zpravidla větší agilnost než samičky.

Zdálo by se snad, že hřbetní orgán jest ústrojím hmatacím v tom případě, žije-li *Titanethes* pod kameny a jinými předměty, jako většina našich druhů; vyčnívajícími tyčinkami na hřbetě mohli by totiž tito isopodi ohmatávati spodní plochu předmětu, pod kterým žijí. Avšak *Titanethes* a jiní druhové jeskynní nežijí ukryti pod kameny, nýbrž pobíhají volně v podzemních prostorách. Nemajíť, žijíce v prostředí temném a vlhkém, zajisté příčiny, vyhledávati si útulek pod různými předměty jako naši domácí druhové, již nalézají tam nutné pro sebe vlhko i temnotu. Ke hmatu slouží ostatně přečetné brvy, tu silnější, tu slabší, roztroušené téměř po celém povrchu těla. Proto nelze míti za to, že hmat byl by nějak zvláště soustředěn na tak malé místo povrchu tělního a v orgán tak jemný a zajisté velmi citlivý.

Ze všeho nejspíše lze domnívdti se, že běží zde o orgán sluchový; tyčinkovité buňky, vyčnívající daleko nad povrch těla, na pjaté chitinem a na proximálním konci spojené s vlákny nervovými, mohly by zcela dobře býti pochopeny jakožto elementy smyslu sluchového.

Zbývá ještě třetí domněnka, že snad máme zde co činiti s orgánem, jímž samec čichá blízkost samičky.

Přesný výklad pravého stavu věci jest na podkladě *morfologickém* ovšem nemožný; výklad ten bude možný teprve po důkladném pozorování fakt *biologických* a *embryologických* u těchto zástupců korýšů. Ale v každém případě jistě zajímavým jest zjevem, že objevují se *nové* smyslové orgány tam, kde na jiné straně vlivem okolností potence smyslové ubývá; míním zde kompensaci očí a statocystů. *Titanethes herzegowinensis* jest mimo to příkladem druhu, u něhož pohlaví samčí jest vyznačeno větší smyslovou činností než pohlaví druhé.

Jest pravděpodobno, že dalším podrobným studiem podzemních forem isopodů nalezeny budou ještě jiné smyslové orgány dosud neznámé. Zdá se nasvědčovati tomu práce Verhoeffova „*Über paläarktische Isopoden*" (*Zoologischer Anzeiger 1901*). V práci té pojednává autor o dvou nových druzích *Titanetha* pocházejících z jeskyní moravského Krasu; jsou to *Titanethes Absoloni* Verhoeff a *Titanethes nodifer* Verhoeff. O tomto dočítáme se mimo jiné: „Das 4. Caudalsegment trägt *bei* ♂ *und* ♀ jederseits einen grossen, höchst eigentümlichen Höcker (*vielleicht der Sitz eines unbekannten Organs*), der schräg nach aussen steht. Er ist unten und aussen halbkugelig ausgehöhlt, oben mit einer tiefen Grube versehen und hinten mit einem niedergedrückten Feld, in welchem einige Unebenheiten zu bemerken sind. In Zusammenhang mit diesen Höckern sind auch die Seiten des 3. Caudalsegments ganz ungewöhnlich entwickelt, der Hinterrand ist zur Aufnahme der Höcker jederseits stark eingebuchtet und die starken und hinten spitzen Epimerenzipfel greifen um die Höcker herum." Podrobnější zprávy Verhoeff nepodává; mám za to, že i zde jde o orgán *smyslový*.

Jak z kusého popisu Verhoeffova vysvítá, byl by u *Titanethes nodifer* orgán ten *společný oběma pohlavím*, a na rozdíl od druhu *Titanethes herzegowinensis* umístěn na *čtvrtém kaudálním* segmentu a *párovitý*.

V případě, že podaří se mi získati potřebný materiál, pokusím se věc tu objasniti důkladněji.

Literatura.

Verhoeff, „*Über paläarktische Isopoden*," *zool. Anzeiger* 1900, 1901.

Výklad vyobrazení.

Veškerá vyobrazení týkají se druhu *Titanethes herzegowinensis.*

Označení.

n — nerv,
hp — hypodermis,
m — dorsoventrální svaly,
lm — podélné svaly,
d — zažívací roura,
h — hřbetní dutina prvého článku,
f — křídla,
w — stýkající se brvy ochranné,
whp — změněná hypodermis,
sw — smyslové tyčinky — prodloužené smyslové buňky,
sz — smyslové buňky,
nv — pletivo nervových vláken,
rd — rosetovité žlázy.

Obr. 1. Řez postranním výběžkem hlavy; statocysta s pojnými jádry a blízko ní nerv. (Reichert, imm. X. ok. II.).

Obr. 2. Řez týmž výběžkem o něco dále; nerv spojuje se se statocystou.

Obr. 3. Příčný řez prvním článkem před rozstupem křídel; blízko pod povrchem dutina *h*.

Obr. 4. Řez o něco dále vedený; viděti jest zprohýbanou spodinu dutiny, křídla *f* se již rozestupují a dotýkají se jen tuhými brvami *w*.

Obr. 5. Křídla nesouvisí již pospolu, pod nimi klene se povrch hřbetu; zvláštní tvar prostoru pod křídly.

Obr. 6. Řez další partií; na hřbetě uprostřed chomáč dlouhých, tenkých krycích brv.

Obr. 7. Další řez ve výši, kde leží „miska" s daleko vyčnívajícími smyslovými tyčinkami *sw*; tyto prostupují chitinem dolů.

Obr. 8. Řez ještě další (kreslena jen jedna polovina). Nahoře četná dlouhá jádra buněk smyslových; směrem dolů přecházejí poznenáhla v jádra hypodermis (Heidenhein).

Obr. 9. Na povrchu spatřujeme již jen krycí brvy, ze spodu přistupují nervové praménky, rozplétají se (*nv*) a spojují se s buňkami smyslovými *sz*.

Obr. 10. Poslední příčný řez, na němž smyslový orgán již není zasažen. V pletivu přečetné rosetovité žlázy.

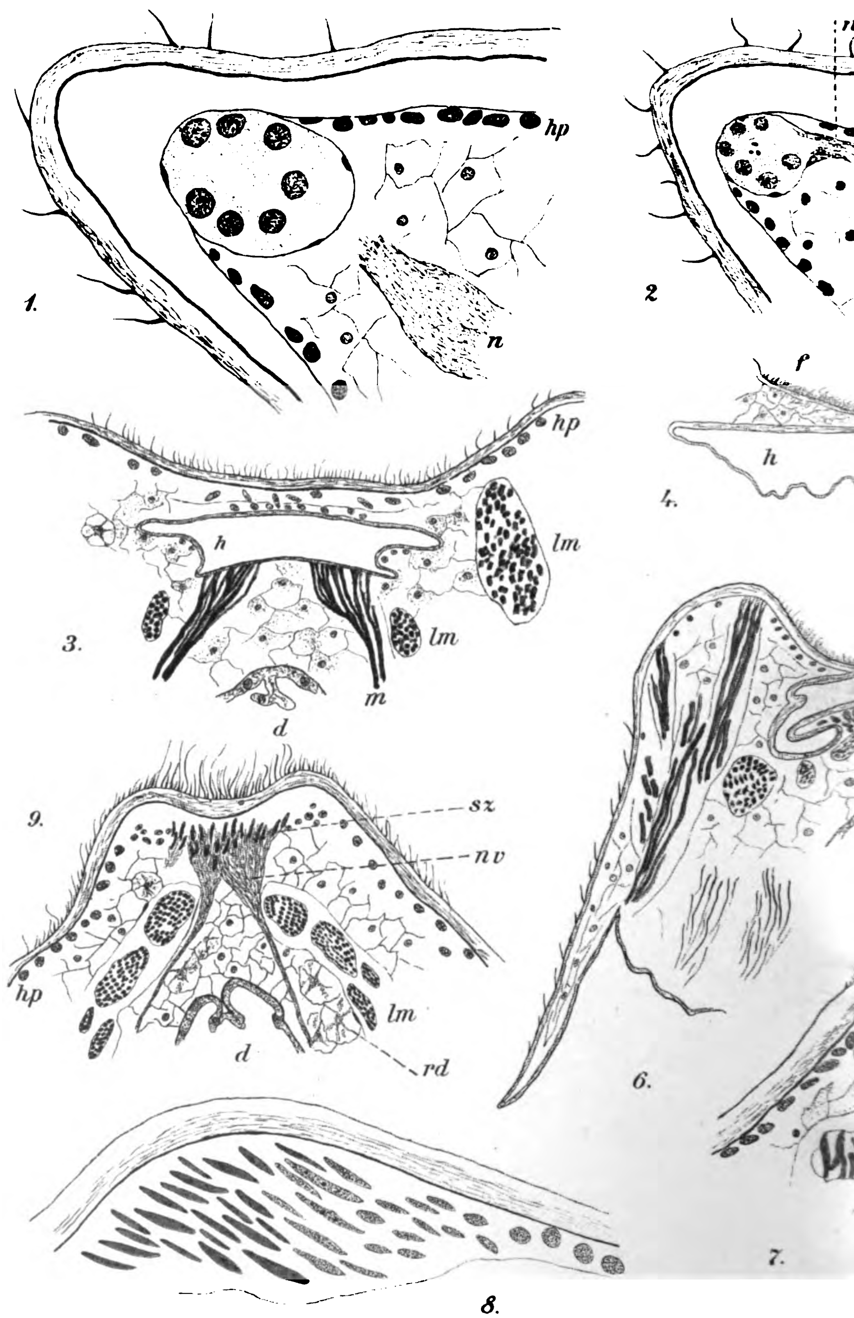
Obr. 11. Podélný řez středem hřbetu; na předním svahu vyvýšeniny z prohlubin vyčnívají smyslové tyčinky *sw* dvojího druhu (krátké a dlouhé); pod nimi jádra smyslových buněk, vlákna nervová a tenký podélný sval.

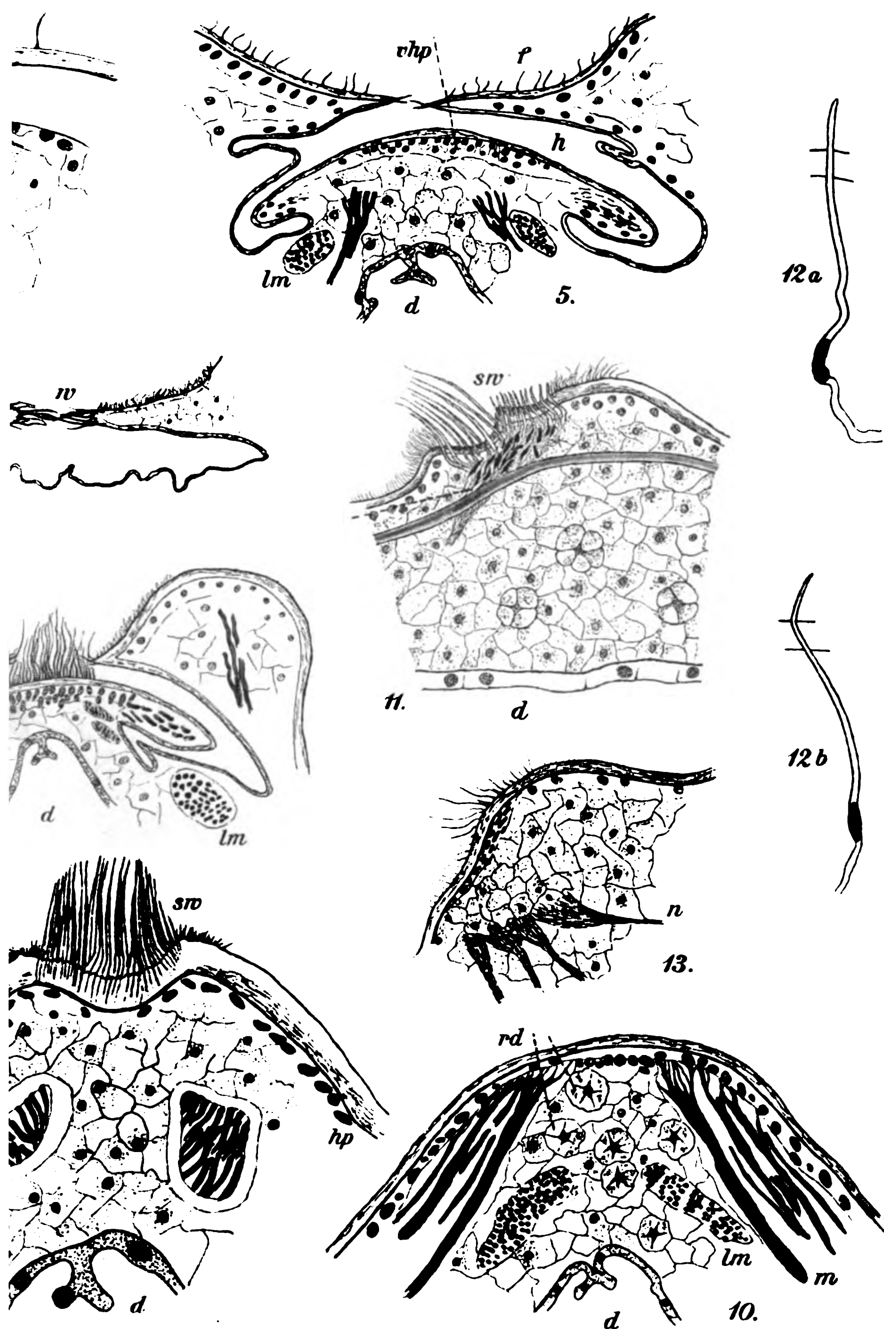
Obr. 12. *a* rovná buňka smyslová s jádrem, *b* táž buňka zahýbající se vzad v místě, kde prostupuje povrchem těla. Takovéto elementy jsou umístěny nejvýše na vyvýšenině.

Obr. 13. Podélný řez vyvýšeninou, a sice její pravou stranou; zasaženy jsou čtyři praménky nervové přistupující ze zadu ku přednímu svahu.

V *Praze*, v říjnu 1907.

WENIG





Lith. Farský v Praze.

XIV.

Několik pokusů o účinku mechanického chvění na kohaerer.

Sepsal Jindřich Procházka, suppl. učitel české reálky v Brně.

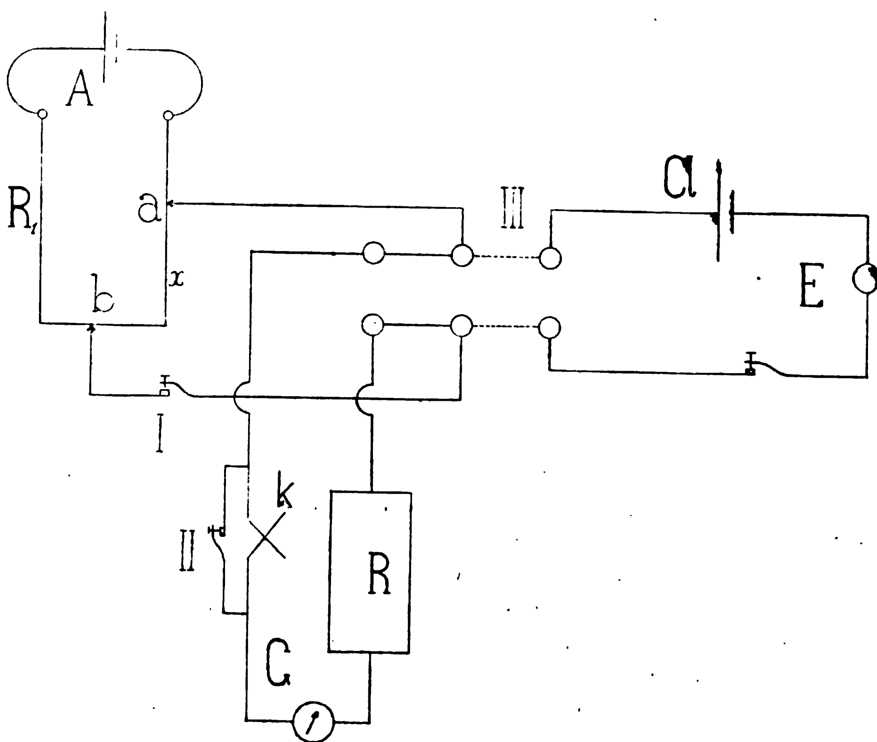
Se 4 obrazci v textu.

(Předloženo v sezení dne 28. června 1907.)

Chtěje zkoušeti vliv mechanických účinků na kohaerer, užil jsem kohaereru, skládajícího se ze dvou tyčinek aluminiových. Jedna z nich přidělána byla pevně uprostřed hořejší desky resonanční skříňky od ladičky, tím, že byla sevřena ve sloupcích připevněných na skříňce; druhá tyčinka, hořejší, byla spojena s ocelovou vzpruhou, připevněnou po straně skříňky a svírala s tyčinkou prvou úhel pravý. Tyčinky byly k sobě přitlačovány mikrometrickým šroubem sférometru, jehož hrot zasahoval do důlku v hořejší tyčince a otáčením v pravo nebo v levo zvětšován neb zmenšován tlak. Výška závitu šroubového byla 0·5 *mm* a hlavice šroubu rozdělena na 100 dílů, při čemž dělení šlo v levo, takže většímu číslu v údajích odpovídá tlak menší.

Jako zdroje elektrického užito akkumulatoru, jehož elektromotorická síla srovnávána s článkem Clarkeovým pomocí kapillárního elektrometru a shledána stálou 2·01 Volt. Aby účinná elektromotorická síla mohla se měniti, zařazen kohaerer s galvanometrem do vedlejší větve. Galvanometr byl aperiodický se zvonkovým magnetem o odporu 213 Ω; jednomu millimetru škály odpovídá proud 0·97 mikroampère. Celkové uspořádání pak bylo následující (obr. 1.). Proud z akkumulatoru A vede se rheostatem R_1 o celkovém odporu 1000 Ω odvětvo-

vacími body a b, mezi nimiž jest odpor x, ku klíči III. K druhým svorkám klíče připojena v pravo větev s článkem Clarkeovým (Cl) a kapillárním elektrometrem E k určení elekromotorické síly akkumulatoru, v levo pak vede se proud ke kohaereru k a rheostatem R ke galvanometru G. Klíč II. slouží k tomu, aby bylo lze kohaerer vypnouti ke kontrole malého odporu kohaereru.



Obr. 1.

Je-li N úchylka na galvanometru při otevřeném klíči II., N_0 při zavřeném klíči a předpokládajíce přímou úměrnost mezi intensitou proudu galvanometrem procházejícího a úchylkou (jak graduací stroje bylo zjištěno), obdržíme pro odpor kohaereru r výraz

$$r = \frac{N_0 - N}{N} \left(R_1 + \frac{x\,R}{x + R_1} \right)$$

z něhož se odpor snadno vypočítá.

Mechanické otřesy, jichž účinek zkoumán, byly způsobovány ladičkou toho tonu, na nějž skříňka resonovala, tím že rozechvěná ladička byla přiblížena k otvoru skříňky, nebo postavena na konsolu, na níž stál kohaerer, anebo postavena přímo na skříňku.

Byl-li odpor kontaktu postupným zvyšováním tlaku učiněn malý, anebo byl-li odpor jeho malý předchozím účinkem elektrické jiskry, zvětšoval se mechanickými otřesy. Byl-li však kontakt adiustován na odpor velký, pak ač na jiskru byl velice citlivý, neb stačila skoro neviditelná indukční jiskra Wagnerova kladívka, aby jej uvedla na odpor malý, mechanický účinek neměl pravidelně vlivu žádného, ani když ladička byla postavena přímo na resonanční skříňku. Klesnutí odporu dostavilo se jen po silném mechanickém účinku na př. klepáním na skříňku a jen v řídkých případech a nutno je přičísti porušení kontaktu, po případě výměně stykových míst za jiná, sousední. Tutéž příčinu má pravděpodobně několikrát vyskytnuvší se úkaz, že za trvání mechanického otřesu odpor klesl, ale hned zase vrátil se na odpor veliký.

Dále studován byl účinek přerušovaného proudu. Vycházeje při tom od známé zkušenosti, že při rostoucí elektromotorické síle a rostoucím tlaku dostavuje se malý odpor i bez indukčního působení jiskry, zkoumal jsem účinek přerušovaného proudu tím způsobem, že

a) pro danou elektromotorickou sílu hledal jsem tlak, při němž dostavil se malý odpor jednak při proudu stálém, jednak přerušovaném a

b) pro daný tlak hledal jsem elektromotorickou sílu, při níž odpor sám klesne na malý a to opět při proudu, jednak stálém, jednak přerušovaném.

Proud přerušován byl mechanicky otáčením ozubeného kolečka asi 300krát v jedné sekundě.

V prvém případě zvětšován tlak, až se dostavil malý odpor (odečtení na hlavici šroubu s_1), pak zase zmenšován, až byl odpor velký (odečtení s_2), což opakováno několikrát po sobě; totéž pak při proudu přerušovaném; příslušná odečtení s'_1, s'_2. Při tom neklesal ani nevzrůstal odpor plynule, nýbrž skokem. Ukázkou pozorování jest následující tabulka (tab. I.), kdež pozorování konána při elektromotorické síle 1·21 Volt.

Tab. I.

s_1	s_2	s_2-s_1	s'_1	s'_2	$s'_2-s'_1$
64	77	13	63	76	13
69	73	4	62	69	7
62	67	5	62	65	3
64	75	11	52	75	23
52	72	20	67	77	10
67	72	5	46	75	29
58	77	19	43	67	24
40	64	24	34	62	28
28	57	29	16	56	40
15	46	31	15	43	28
17	36	19	15	45	30
15	39	24	8	44	36
13	37	24			

Průměrné hodnoty z několika řad takových pozorování při téže elektromotorické síle 1·21 Volt ukazuje tab. II.

Tab. II.

s_1	s_2	s_2-s_1	s'_1	s'_2	$s'_2-s'_1$
41·8	60·2	18·4	37·0	61·0	24·0
72·1	89·1	17·0	66·0	83·0	17·0
46·2	84·0	37·8	37·0	76·5	39·5
54·0	69·4	15·4	51·6	70·5	18·9

Z této tabulky dá se souditi, že tlak, při němž nabývá kontakt odporu malého, jest (v mezích pozorovacích chyb) týž, ať se užije proudu stálého nebo přerušovaného; podobně se i odpor velký dostavuje v obou případech při témž tlaku. Rozmezí tlakové, v němž odpor zůstává malý, jest pak ovšem též stejné. Snad tyto tlaky jsou pro

přerušovaný proud poněkud vyšší, rozdíly tyto však leží v mezích pozorovacích chyb, takže bezpečného závěru z nich činiti nelze.

Vložení samoindukce (7 Henry) do kruhu proudového nemělo žádného rozhodného výsledku.

Pozorování provedená při různých elektromotorických silách ukazuje následující tab III.

Tab. III.

E_{Volt}	s_1	s_2	s'_1	s'_2
0·201	62	82	75	82·5
0·402	72	85	75	83
0·603	75	84	74	84
0·804	72	82	73	83·5
1·005	74	83	71	83
1·206	71·5	83	78	83

Z ní jde, že tlak, při němž odpor se stává malým, i tlak, při němž kontakt nabývá opět velkého odporu, jest na elektromorické síle nezávislý.

Pokud se týče pozorování, při nichž při stálém tlaku zvyšována elektromotorická síla, až se dostavil malý odpor, byl průběh pozorování pravidelně takový, že při malém tlaku nedostavil se odpor malý ani při elektromotorické síle 3·5 Volt, při tlaku pak vyšším ihned při ems. 0·1 neb 0·2 Volt. Jen v několika málo případech dostavil se odpor malý též v mezích 0·8—1·2 Volt.

Shrneme-li pozorování konaná na kontaktu dvou aluminiových tyčinek, musíme přiznati tomuto kohaereru, je-li kontakt pečlivě adiustován, velkou a bezpečnou citlivost na elektrické vlny a snadný a bezpečný návrat k velkému odporu mechanickým otřesem, nehodí se však ke studiu příčin těchto úkazů, neboť pohybujeme se zde mezi dvěma extremy, odporem nekonečným a nullovým. Příčina toho pravděpodobně tkví v příliš tenké povrchové vrstvě a z toho plynoucí pak neurčitosti podmínek na kontaktu. Tím se stává kvantitavní studium skoro nemožným, neboť veličina proměnná, odpor, buď se vůbec nemění, zůstávajíc nekonečnou, nebo se změní až v druhý extrém, klesajíc na nullu.

S neurčitostí vrstvy souvisí i neurčitost kritické elektromotorické síly, neboť kontakt jednou jakkoli užitý stává se naprosto jiným a kontakty na místech sousedních naprosto spolu nesouhlasí. O veliké proměnlivosti kontaktu svědčí veliké difference při pozorováních na témž kontaktu.

V tenkosti vrstvy mají asi též základ malá tlaková rozmezí mezi odporem nekonečným a nullovým a jest pravděpodobno, že s nullovým odporem současně nastává porušení povrchové vrstvy, aneb jinak, že odpor malý dostavil se tehdy, když vrstva tlakem byla porušena a když nastal kontakt čistého kovu s čistým kovem. V této okolnosti mají asi původ měření dobře spolu souhlasící v tab. III.

Pokud se týče obdobných pozorování Thöldteových, možno potvrditi jen, že mechanickými otřesy se odpor kohaereru, byl-li náležitě adiustován, zvětšoval. Zmenšení odporu nastalo jen v řídkých případech při zvlášť silném mechanickém účinku a nutno je přičísti porušení vrstvy. Že nějaká změna povrchové vrstvy nastává, o tom svědčí častěji pozorované unavení kohaereru po delším upotřebení téhož stykového místa; podobně se to jeví v tab. I., kde odpor malý a velký dostavuje se stále při větším tlaku. Nemožno však s Thöldteem souhlasiti v tom, že by způsobená vodivost byla úměrna intensitě mechanických kmitů; různé hodnoty pro odpor, jež obdržel, potvrzují spíše pozorování Vlad. Nováka a B. Macků, ukazující stupňovité změny odporu.

Pozorování Thöldteova mají spíše ráz nahodilosti, neb povaha povrchové vrstvy a povaha pohybu kontaktu, na nichž odpor závisí, nemohou pro neznámost svou býti vzaty v úvahu a nemohou tedy býti podkladem všeobecných závěrů a tím méně lze z nich odvozovati po případě dle nich modifikovati theorie kohaereru. —

Poněvadž kohaerer z tyčinek aluminiových neukázal se právě vhodným ku zkoumání těchto úkazů, zvoleny formy jiné. Na rameno ladičky, komorního *a*, připevněna kruhová destička pokrytá vrstvou oxydu mědi jako jedna elektroda, druhou pak elektrodou byl hrot měděný, připevněný na vzpruze a s hora přitlačovaný k desce mikrometrickým šroubem sférometru, jako při pokusech předešlých. Ve chvění byla uváděna ladička připevněná dobře na konsole (visící na hlavní zdi budovy) resonancí pomocí druhé ladičky stejného tonu, která byla připevněna na stativu blíže konsoly stojícím a to tak, že otvory resonančních skříněk obou ladiček byly proti sobě; tato druhá ladička rozkmitávána byla smyčcem. Ostatní uspořádání bylo jako dříve.

Pozorován opět kritický tlak, při kterém nastane odpor malý (tlak s_1) a velký (tlak s_2) a zkoumána jeho závislost na elektromoto-

rické síle. Jako dříve značí s_1 a s_2 odečtení na hlavici šroubové v 0·005 *mm*, a menším číslům přísluší větší tlak. Z tabulky IV. je patrný vliv elektromotorické síly zcela určitě; odpor malý i velký dostavoval se při větší elektromorické síle při tlaku daleko menším než při menší elektromotorické síle. Avšak i zde podléhal kontakt trvalým změnám, což vidno při zpětném postupu od větší elektromorické síly k menší, kde zmenšení tlaku už tak nevyniká.

Tab. IV.

Ems. Volt	s_1	s_2	$s_2 - s_1$
0·101	1·5	17·1	15·6
0·201	9·7	22·5	12·8
0·603	12·2	33·0	20·8
1·206	23·0	41·0	18·0
1·809	29·5	41·0	11·5
1·809	29·5	40·5	11·0
1·206	25·5	40·5	15·0
0·603	27·5	40·5	13·0
0·201	25·1	39·5	14·4
0·101	26·1	37·5	11·4

Dále zkoumán vliv přerušovaného proudu na kritický tlak; provedena řada pozorování tlaků (s_1, s_2) při proudu stálém a potom zas při proudu přerušovaném (tlaky s'_1, s'_2). Výsledky podává tab. V., kdež měření konána při elektromotorické síle 2·01 Volt.

Tab. V.

s_1	s_2	s'_1	s'_2
91·8	100·0	101·9	113·4
97·1	107·0	101·8	110·8
103·1	106·7	94·5	113·8
101·2	103·9	102·0	112·2
103·2	112·0	107·0	112·4
103·9	111·0	102·2	112·6
103·0	110·4	105·0	112·8
108·0	114·5	106·0	112·8
105·8	112·0	102·3	113·0
102·7	109·0	104·9	113·0
		102·3	113·0

Průměrné hodnoty tlaků s pravděpodobnými chybami jsou:

$s_1 = 101{\cdot}98 \pm 0{\cdot}99, \quad s'_1 = 102{\cdot}72 \pm 0{\cdot}66$

$s_2 = 108{\cdot}65 \pm 0{\cdot}91, \quad s'_2 = 112{\cdot}70 \pm 0{\cdot}15;$

rozdíly jich vzhledem k pravděpodobným chybám jsou velice malé. Zdá se sice, že tlak, při němž odpor klesne a zase stoupne, jest poněkud menší při proudu přerušovaném, ale výsledek tento, zvlášť při s_1 a s'_1, kdy odpor klesne, není zcela jistý.

Poněvadž vrstva oxydu snadno se porušovala, pokryta destička vrstvou jodidu mědi a zkoumána závislost odporu na tlaku a elekromotorické síle. Pozorování konána tím způsobem, že při určitém tlaku měněna elektromotorická síla a odečtena příslušná úchylka na galvanometru, což opakováno při ostatních tlacích. Výsledky podává tab. VI., kde v prvém řádku uvedeny jsou tlaky (odečtení na sférometru) a v prvém sloupci udány jsou elektromotorické síly ve voltech, ostatní čísla pak značí příslušné úchylky na galvanometru.

Tab. VI.

	50	45	35	25
0·201	0·0	0·0	0·0	0·0
0·402	5·0	6·0	7·8	8·4
0·603	21·8	22·3	24·4	26·0
0·804	40·6	40·6	42·6	44·6
1·005	59·4	59·8	61·5	63·6
1·206	78·7	79·2	80·7	83·0

Na základě těchto úchylek galvanometru byly vypočítány příslušné odpory kohaereru v ohmech, jak udány jsou v následující tabulce VII.

Tab. VII.

	50	45	35	25
0·201	∞	∞	∞	∞
0·402	73500	59600	43500	39600
0·603	18500	17800	15400	13800
0·804	10200	10200	9200	8300
1·005	7200	7100	6600	6000
1·206	5500	5400	5100	4700

Ukazuje se zde jasně závislost odporu na elektromotorické síle, že odpor se vzrůstající *ems* klesá nejprve rychle, pak zvolna a též že odpor klesá s přibývajícím tlakem.

Utvoříme-li ještě součiny z odporů a příslušných úchylek na galvanometru, jež jsou úměrny intensitě proudu procházejícího kohaererem, obdržíme hodnoty odpovídající rozdílům napjetí na koncích kohaereru (tab. VIII.)

Tab. VIII.

	50	45	35	25
0·201				
0·402	39	36	32	33
0·603	40	40	38	36
0·804	41	41	39	37
1·005	43	43	41	38
1·206	43	43	42	39

Z této tabulky jest viděti, že se stoupající elektromotorickou silou vzrůstá sice s počátku též poněkud rozdíl potenciálný na koncích kohaereru a při *ems* asi 1 voltu blíží se hodnotě stálé. Zvláště se to jeví při menším tlaku (50) než při tlaku větším (25), ač i zde přírůstek rozdílu napjetí proti přírůstku účinkující elektromotorické síly jest nepatrný.

Při dalších měřeních bylo užito galvanometru d'Arsonvalova a vedení proudu bylo celkem uspořádáno tím způsobem, jak naznačeno na obrazci (obr. 2.).

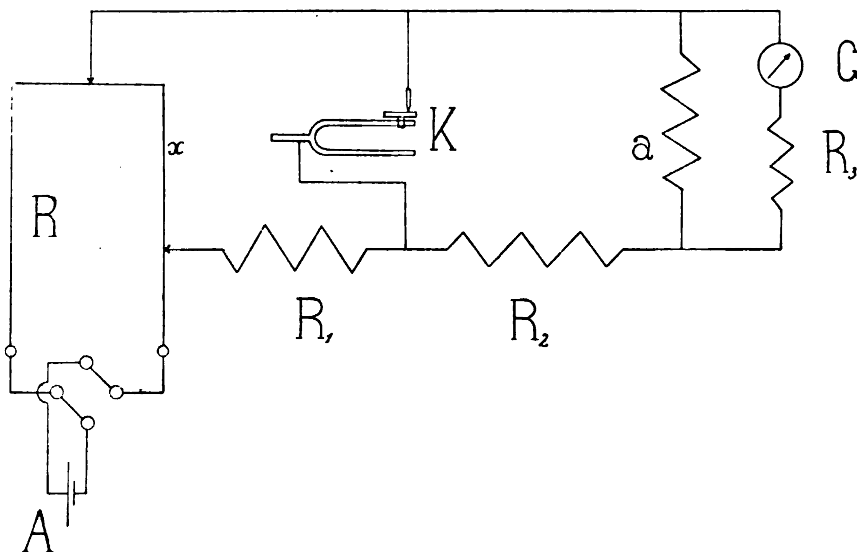
Proud z akkumulatoru *A* vede se do rheostatu *R*, kde změnou odporu *x* měněna působící elektromotorická síla; odtud se proud vede ke kohaereru *K* a ke galvanometru *G*, jehož citlivost dala se regulovati odporem *a*. R_1 R_2 a R_3 značí pak vložené odpory, jichž velikost za měření se neměnila. Kohaerer jako dříve skládal se z destičky měděné, připevněné na rameni ladičky, pokryté vrstvou jodidu mědi a z měděného hrotu. Druhá ladička, pomocí níž uváděn resonancí kontakt ve chvění, byla rozkmitávána nárazy koule, zavěšené na dvou nitích.

Jelikož kohaerer zařazen jest ve vedlejší větvi, vzrůstá intensita proudu procházejícího galvanometrem, zvětšuje-li se odpor kohaereru, tak že větší úchylce na galvanometru odpovídá též větší odpor kontaktu.

Zkoumána opět závislost odporu kohaereru na tlaku a elektromotorické síle, pročež prováděna měření dvojí, jednak

a) měněn byl tlak při konstantní elektromorické síle, jednak

b) měněna elektromotorická síla při konstatním tlaku.



Obr. 2.

Intensita nárazu nemohla býti dosti dobře měněna, aby se dala aspoň poněkud přesně vyjádřiti; pouze ze zvětšení výše, s níž koule dopadla, dá se souditi o intensivnějším chvění. A budiž hned předem podotknuto, že z kvalitativných pokusů, založených na změně intensity, chvění jde, že účinek s rostoucí mohutností chvění též roste.

Vliv chvění kontaktu a tlaku na odpor jeho zkoumán tím způsobem, že při určité elektromotorické síle a tlaku (*s*) odečtena úchylka na galvanometru n_0, pak uvedena ladička ve chvění, čímž úchylka se změnila, pravidelně vzrostla na n_1; tento vzrůst dál se někdy rychle, někdy dosti zvolna. Když ladička dozněla, úchylka se změnila, pravidelně klesla na n_2; a tento postup opakován něko-

likrát po sobě. Při tom dosti často bylo pozorováno, že po doznění ladičky nastala ještě malá okamžitá změna úchylky v prvním směru, tedy že pravidelně ještě poněkud vzrostla.

Výsledek pokusů postupnou změnou tlaku získaných při ems. 1·21 volt illustrován jest tabulkou IX.

Tab. IX.

$s = 0·04\ mm$			$s = 0·03\ mm$			$s = 0·02\ mm$			$s = 0·01\ mm$		
n_0	n_1	n_2	n_0	n_1	n_2	n_0	n_1	n_2	n_0	n_1	n_2
17	122	72	12	95	7	100	750	70	320	3000	120
	+ 105	+ 55		+ 83	− 5		+ 650	− 30		+ 2680	− 200
76	134	79	12	64	8	100	690	80	205	3010	40
	+ 58	+ 3		+ 52	− 4		+ 590	− 20		+ 2805	− 165
83	120	50	12	108	7	120	600	80	190	3000	0
	+ 37	− 33		+ 96	− 5		+ 480	− 40		+ 2810	− 190
55	125	51	13	103	7	95	690	100	90	3010	95
	+ 70	− 4		+ 90	− 6		+ 595	+ 5		+ 2920	+ 5
56	128	53	12	143	3	100	680	115	95	3020	40
	+ 72	− 3		+ 131	− 9		+ 180	+ 15		+ 2935	− 55
58	138	54	12	183	1						
	+ 80	− 4		+ 171	− 11						
60	149	57	11	125	3						
	+ 89	− 3		+ 114	− 8						
54	110	50	11	107	5						
	+ 56	− 4		+ 96	− 6						
55	112	62	11	190	0						
	+ 57	+ 7		+ 179	− 11						
65	127	62									
	+ 62	-3									

Zde značí *s* snížení hrotu sférometru v setinách *mm* a čítáno jest od posice, kde nebyl ještě kontakt.

n_0 znamená úchylku před působením nárazu,

n_1 maximální úchylku, jež během chvění nastala; číslo pod ní udané znamená rozdíl $n_1 — n_2$ a má tedy význam dočasné změny intensity chvěním vyvolané;

n_2 značí úchylku, kde se galvanometr ustálil po chvění neb i během chvění; číslo pod ní udané jest rozdíl $n_2 - n_0$ a má tedy význam trvalé změny chvěním způsobené.

Z tabulky i diagramu jest patrno:

1. chvěním intensita proudu se zvětšuje,
2. zvětšení toto jest dočasné, trvajíc jen po dobu chvění,
3. s rostoucím tlakem zvýšení intensity rapidně ubývá.

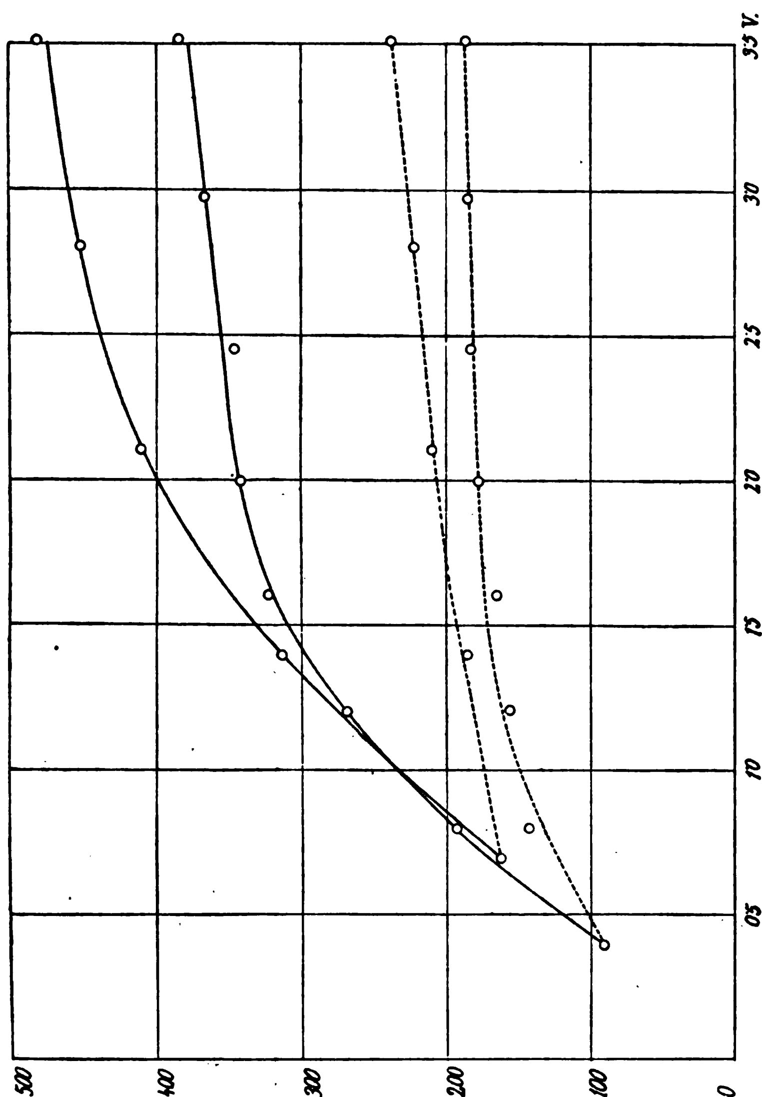
Mimo to jest z tabulky patrno, že při středním tlaku, když kontaktu již déle bylo užito, dostavují se často (jak velká řada měření zde neuvedených dokazuje) nepravidelnosti jevící se tím, že účinek chvění zůstává trvalým (že tedy intensita trvale se změní), a mimo to obrácením úkazu, t. j., že místo vzrůstu nastává dočasné klesnutí intensity.

Při některých měřeních šla i změna positivní a negativní střídavě jedna za druhou (tab. X.), ze všech měření dohromady nedá se však nějaké pravidlo odvoditi a nutno proto změnu k menším hodnotám považovati za následek vlivů rušivých, způsobených snad porušením vrstvy a tím, že kontakt nezůstává přesně na témž, resp. úplně aequivalentním místě vrstvy.

Tab. X.

n_0	n_1		n_2	
77	3		8	
		− 74		− 69
8	21		12	
		+ 13		+ 4
12	5		5	
		− 7		− 7
5	77		73	
		+ 72		+ 68
73	3		6	
		− 70		− 67
6	24		17	
		+ 18		+ 11
17	4		5	
		− 13		− 12
5	5		5	
		0		0

Další pozorování týkají se účinku elektromotorické síly a tab. XI. *a*, *b* (viz str. 14.) a diagramm (obr. 3.), ukazují dvě řady pozorování, při nichž zůstával tlak konstantní a měněna (zvyšována) postupně elekromotorická síla.



Obr. 3.

Na diagrammu znamenají křivky čárkované původní intensitu (arithm. střed v tabulce u každé skupiny vypočítaný), čáry plné intensitu změněnou účinkem chvění; oboje křivky jsou velice zajímavé.

Tab. XIa.

Ems	n_0	n_1	$\frac{n_1-n_0}{n_0}$
0·402	96	96 0	0
0·804	143	194 51	
	143	192 49	
	141	194 53	
	142	193 51	0·35
1·206	155	269 114	
	156	270 114	
	157	265 108	
	156	268 112	0·72
1·608	164	325 161	
	164	322 158	
	165	322 157	
	165	323 158	0·96
2·01	170	357 187	
	176	332 156	
	177	338 161	
	176	332 156	
	175	340 165	0·94

Ems	n_0	n_1	$\frac{n_1-n_0}{n_0}$
2·46	187	343 156	
	182	347 165	
	178	341 166	
	182	345 163	0·90
2·98	186	370 184	
	190	368 178	
	183	366 183	
	180	364 184	
	182	357 175	
	184	365 181	0·98
3·51	199	399 200	
	190	393 203	
	195	396 201	1·03

Tab. XIb.

Ems	n_0	n_1	$\frac{n_1-n_0}{n_0}$
0·70	162	162 0	0
1·40	186	307 121	
	185	318 133	
	185	311 126	
	185	312 127	0·69
2·11	205	412 207	
	207	410 203	
	208	401 193	
	207	407 200	0·97
2·81	223	467 244	
	220	450 230	
	219	440 221	
	221	452 231	1·04
3·51	241	472 231	
	244	495 251	
	232	467 235	
	231	484 253	
	237	479 242	1·02

Čárkované udávají, že s rostoucí elektromotorickou silou vystoupí intensita rapidně na určitou hodnotu a dále mění se jen nepatrně, jest to známý úkaz, že elektromotorická síla na koncích kohaereru zůstává konstantní, nepatrné stoupání nutno přičísti jednak odporu přívodních drátů, jednak neproměnnému odporu kohaereru. Plně vytažené křivky ukazují, že změny intensity přibývá s rostoucí elektromotorickou silou z počátku též rapidně, pak však pouze ponenáhlu. Srovnáme-li změnu intensity s intensitou původní (utvořením poměru $\frac{n_1 - n_0}{n_0}$), vidíme, že změna intensity dostupuje hodnoty intensity původní, t. j. intensita mění se na dvojnásobnou. Výsledek tento odpovídal by úkazu na kohaereru již pozorovanému, že totiž na koncích kohaereru panuje určitá elektromotorická síla, resp. její násobky.

Dále pozorován byl vliv směru proudu. Opět při různém tlaku a různé elektromotorické síle pozorován účinek chvění na odpor kontaktu, ale zároveň byl kommutován proud; pozorování konána střídavě při směru proudu od hrotu k desce (hrot +) nebo směru opačném (hrot —).

Z dlouhé řady pozorování uvádím jen tabulku následující (tab. XII.) a dle ní sestrojený diagramm (obr. 4.). n_0 a n_1 mají význam jako dříve a jsou průměrem vždy ze 3 až 5 pozorování.

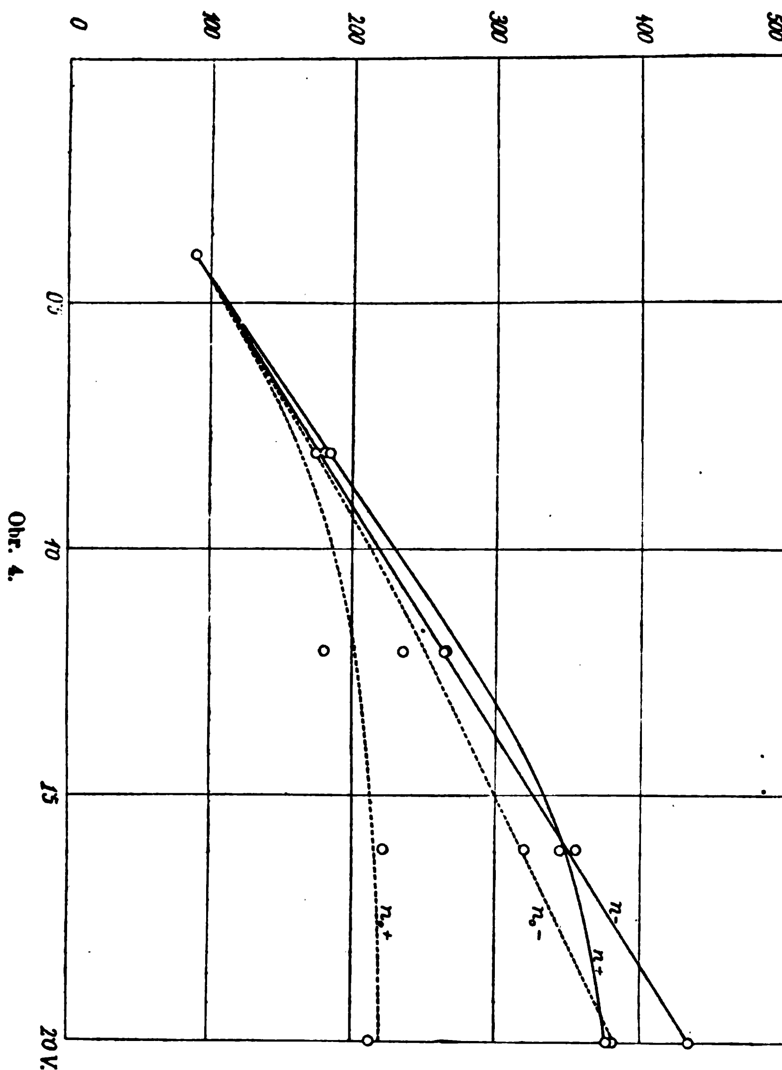
Tab. XII.

Ems =		0·402	0·804	1·206	1·608	2·01 Volt
Hrot +	n_0	91	173·5	181·3	221·0	213·8
	n_1	91	185·8	264·7	356·0	376·4
	n_1-n_0	0	12·3	83·4	135·0	162·6
Hrot —	n_0	91	180·5	236·7	320·5	381·3
	n_1	91	183·1	264·3	343·8	434·6
	n_1-n_0	0	2·6	27·6	23·3	53·3

Pro hrot + jest tvar křivek týž jako dříve, pro hrot — však jest rovnovážná poloha značně vyšší, t. j. odpor kontaktu jest pro tento směr proudu menší (resp. elektromotorická síla na koncích ko-

haereru jest menší), a změna odporu chvěním způsobená jest značně menší než pro směr proudu od hrotu k vrstvě.

Srovnávání účinků vespolek jest obtížné, neboť změnou směru



Obr. 4.

proudu kontakt pravděpodobně se značně změní a tato změna teprve časem mizí. Byl-li ku př. zapjat proud o ems. 1·206 Volt tak, že hrot byl kladný, byla úchylka původně 184 a postupně klesala na 181,

179 atd.; při kommutaci proudu (hrot záporný) byla úchylka 203 a zase postupně rostla na 255.

Zjev tento souvisí s tím, že při hrotu + úchylka sama sebou se neustále zmenšuje (vrstva polarisuje); zmenšování toto se chvěním ještě urychluje. Při hrotu záporném se sice též úchylka zmenšuje (vrstva polarisuje), avšak mnohem pomaleji. Byla-li vrstva před tím polarisována proudem při hrotu kladném, pak při kommutaci na hrot záporný odpor se zvětšuje, t. j. snaží se nabýti té hodnoty, kterou by měl, kdyby byl býval ihned spojen na hrot záporný. Postup tento děje se zase ponenáhlu, chvěním se však urychluje. Z uvedeného patrno, že kommutací proudu zavádí se do pozorování nový úkaz, účinek předcházejícího spojení, čímž se celý zjev velice komplikuje. Proto také jednotlivá pozorování vespolek dobře nesouhlasí. Celkem však možno říci, jak z horní tabulky patrno, že pro směr proudu od desky k hrotu jest odpor kontaktu na chvění značně méně citlivý než pro proud při hrotu kladném.

Celkový výsledek těchto pokusů jest asi následující: Odpor kohaereru z tyčinek aluminiových mechanickými otřesy se nezmenšoval, nýbrž jen zvětšoval. Tlak, jehož působením odpor náhle klesá nebo při němž kontakt nabývá opět velkého odporu (tlak kritický), jest nezávislý na elektromotorické síle a je týž při proudu přerušovaném jako při stálém.

Při kontaktu měděné desky pokryté oxydem mědi a měděného hrotu kritický tlak s rostoucí elektromotorickou silou klesal, při zpětném postupu však zůstával skoro stálý. Závislost jeho na přerušování proudu zůstává v mezích pozorovacích chyb.

Na kohaerer z desky pokryté jodidem mědi a hrotu měděného mělo chvění účinek dvojí, jednak dočasný, jevící se pravidelně vzrůstem odporu, jenž po doznění opět klesl, jednak trvalý, jevící se tím, že odpor nevrátil se úplně na původní hodnotu; někdy však odpor chvěním klesl a někdy střídavě se zvětšoval a zmenšoval. Změna odporu pak byla větší při silnějším chvění.

Při změně působící elektromotorické síly ukázalo se, že se vzrůstající ems. rozdíl potentialový na koncích kohaereru s počátku též stoupá a blíží se pak určité konstantní hodnotě, jež při chvění kontaktu se zdvojnásobuje proti hodnotě rozdílu napjetí při kontaktu v klidu.

Směr proudu má pak ten vliv, že odpor kontaktu při směru proudu od desky k hrotu jest značně menší, resp. rozdíl napjetí na

koncích kohaereru jest menší než při směru od hrotu k desce; mimo to jest kontakt v prvém případě na chvění značně citlivější než v druhém.

Ku konci dovoluji si vysloviti svůj nejsrdečnější dík p. prof. Dr. V. Novákovi za zájem, s kterým celou práci sledoval a panu assistentovi dru B. Macků za neobyčejnou ochotu a obětavost, s jakou mi byl při práci nápomocen.

Brno, fysikální ústav české techniky 1907.

XV.

Neues über Graptolithen

von **Prof. Ph. Počta.**

Mit 1 Tafel.

Vorgelegt in der Sitzung am 28. Juni 1907.

Seit langer Zeit befasse ich mich mit fossiler Mikrofauna des böhmischen Silurs, indem ich die an kleine Fossilien reichen Kalksteine zu Dünnschliffen verarbeite und dieselben einer mikroskopischen Untersuchung unterziehe.

Auf diese Weise ist es mir geglückt, die vorher unentschiedene Frage über die Anfangskammer von Orthoceras zu lösen.[1])

Diese Art von Untersuchung liefert eine ungeahnte Menge kleiner Versteinerungen, welche oft von besonderem Interesse sind. Immer aber haftet an dieser Methode die Unvollkommenheit, dass nur ausnahmsweise die in verschiedener Richtung durch die Fläche des Dünnschliffes geführten Durchschnitte der fossilen Körper eine nähere Bestimmung zulassen. Dieser missliche Umstand ist insbesondere in jenen Fällen am meisten zu bedauern, wo es sich um vollkommen neue, bisher nirgends angeführte und darum schwer zu deutende Formen handelt. Es erübrigt hier nichts, als durch häufige Untersuchung der Durchschnitte bekannter Fossilien das Auge einzuüben und auf Grund der auf diese Weisse gesammelten Erfahrungen die ganze Gestalt der sich nur in Durchschnitten darbietenden Formen konstruiren zu trachten.

---

[1]) Sitzungsberichte d. königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Prag, 1902.

In folgenden Zeilen will ich einige neue Erscheinungen, welche geeignet sind, unsere Kenntnisse silurischer Graptolithen zu bereichern, näher besprechen.

Die zahlreichen Dünnschliffe, welche mir den Anlass zu diesem Berichte gaben, stammen alle von einem Gestein.

Die Grenzen zwischen den zwei Barrande'schen Horizonten e_1 (Litener Graptolithenschiefer) und e_2 (Budňaner Kalksteine) sind bekanntlich nicht scharf ausgeprägt, sondern es entwickeln sich die Kalksteinbänke des oberen Horizonts allmählig aus den Schiffern in der Weise, dass in den oberen Lagen der Graptolithenschiefer rundliche oder ellipsoidische, gewöhnlich etwas zusammengedrückte Kalkkonkretionen erscheinen, welche nach oben immer häufiger sich einstellen und endlich in Kalksteinbänke übergehen. Diese Kalkkonkretionen, welche gewöhnlich reich an Versteinerungen sind, kommen in verschiedenen Dimensionen vor.

Gewöhnlich messen sie 10 bis 20 *cm* in der längeren Axe, es gibt aber Fundorte, welche durch Kalkkonkretionen von bedeutend grösserem Ausmasse bekannt sind.

Einer von diesen Fundorten ist die Gegend zwischen Beraun und Lištice, welche durch den vor einigen Jahren erfolgten Bau einer neuen Strasse erschlossen wurde.

Die westliche Böschung an der Strasse zeigt ein sehr lehrreiches Profil der Graptolithenschiefer und zahlreicher Diabasergüsse, sowie einige sehr interessante Kontakterscheinungen beider dieser Gesteine. An einigen Orten ist nämlich ersichtlich, dass die sonst schwarzen Graptolithenschiefer in unmittelbarer Nähe von Spiliten ausgebrannt sind und ihre Farbe in eine weisse geändert haben.

Dass in dieser Lehne Prof. F. Slavík vor Jahren ein für das böhmische Silur neues Gestein (Datholit) konstatiert hat, sei hier nur nebenbei erwähnt.

An diesen Stellen erscheinen in den Graptolithenschiefern eingebettete Kalkkonkretionen von besonders ungewöhnlicher Grösse. Es sind dies kopfgrosse, ja zuweilen bis beinahe 1 *m* in der längeren Axe méssende Kugeln mit feinkörniger Oberfläche und oft mit gut angedeuteter Schichtung. Sie bestehen aus dunklem, dichtem und etwas bituminösem Kalke, welcher viele Versteinerungen enthält. Von ihnen sind am zahlreichsten Graptolithen vertreten und zwar volle oder, wie man zu sagen pflegt, „körperliche“ Stämme. Sie nehmen gewöhnlich in der Mitte des Knollens eine flache, 2—3 *cm* dicke

Schichte ein, wogegen die übrige Kalksteinmasse nur vereinzelnt einige Bruchstücke verschiedener Versteinerungen enthält.

Es scheint, dass Kolonien von Graptolithen in direkter Verbindung mit der Entstehung dieser Knollen stehen. Die Reste dieser Tiere dürften in den schlammigen Ablagerungen, aus welchen die Graptolithenschiefer entstanden sind, zu Konzentrationspunkten des im Wasser gelösten Kalkes geworden sein. Dies wird auch durch die innige Verbindung der Graptolithenkolonien mit einer neuen verwandten Form, welche unten näher beschrieben wird, bestätigt.

Das mir vorliegende, zu Dünnschliffen verarbeitete Material stammt demnach von einem einzigen Fundorte und zwar aus den grossen Kalkknollen, welche beim Baue der Strasse Beraun-Lištice gefördert wurden und welche ich teils selbst gesammelt, teils vom Herrn E. Hojka in Beraun erhielt.

Da einige von den in den Durchschnitten sich darbietende Bilder von solch kompliziertem Baue sind, dass das Zeichnen derselben mit der Hand äusserst mühsam, wenn nicht unmöglich wäre, habe ich die Wiedergabe mittelst Mikrophotographie vorgezogen.

Die Knollen enthalten zahlreiche Arten von Graptolithen. Dor. Perner gibt zwar in seiner bekannten Arbeit[2]) von Lištice nur diese Formen gerader Monograptidae

Monograptus Jaeckeli Pern.
— *latus* MCoy und
— *testis* Barr

an, aber ich glaube noch mehrere andere Arten erkannt zu haben.

Die häufigste Form unter allen scheint mir auch nach der von Dor. Perner veröffentlichten Diagnose zu *Monogr. priodon* Bronn anzugehören, denn schon die vollkommen gerade Gestalt des Stammes spricht für diese Ansicht, obzwar ich mir der ausserordentlichen Schwierigkeit, diese älteste Graptolithenart von der neuen Form Perners, *Monogr. Jaeckeli,* abzuscheiden, wohl bewusst bin.

Die Fläche des Dünnschliffes traf die Graptolithenstämme und auch die übrigen kleinen Versteinerungen in verschiedenen Richtungen, was ebenfalls für einen ungünstigen Umstand erklärt werden muss, da nur die centralen Durchschnitte eine Orientierung über die Gestalt der Formen zulassen.

---

[2]) Studie o českých graptolithech. Část III. B. Česká akademie cís. Frant. Josefa pro vědy, slovesnost a umění. 1899.

Dessen ungeachtet habe ich einige interessanten Bilder beobachten können, welche ich hier näher beschreiben will.

Es sind dies in erster Reihe Durchschnitte, welche, wie ich glaube, nähere Auskunft über die Fortpflanzung von Graptolithen liefern.

In einem Dünnschliffe, dessen Partie in Fig. 1 abgebildet ist, traf der Schnitt zufälliger Weise eine aus einer Zelle entspringende Knospe. Der Stamm dieses Exemplares ist nicht gerade in der Mitte durchgeschnitten, da die Axe des Hydrosoms nicht getroffen wurde; die Fläche des Schnittes geht neben der Axe vorbei und die hintere peridermale Wand zeigt dieselbe, oder etwa noch geringere Dicke wie die übrigen Wände der Hydrotheken. Da aber die Form einzelner Zellen, sowie ihr Mündungshals fast gar nicht verzeichnet erscheinen, ist anzunehmen, dass der Schnitt nur unbedeutend von der Mediane ablenkt.

Aus einer von den Hydrotheken zweigt etwa im rechten Winkel vom Stamme eine Knospe ab, deren inneres Ende sehr gut wahrzunehmen ist.

Die Knospe ragt nur mit kleinem Teile ihrer Länge in die mütterliche Hydrotheka ein; unten verbindet sich ihr Periderm mit jenem der mütterlichen Zelle, verlängert sich aber noch in gerader Richtung in das Innere dieser Zelle.

Oben ist die peridermale Wand der Knospe nicht direkt mit der Wand der mütterlichen Zelle verbunden, sondern es ist hier ein leerer Raum zwischen beiden Wänden ersichtlich. Der grösste Durchmesser der mütterlichen Zelle beträgt etwa 0·6 *mm*, der Durchmesser der Knospe am inneren Rand 0·23 *mm* und erreicht weiter die grösste Breite von etwa 0·36 *mm*.

Gleich hinter der Zellenöffnung, durch welche die Knospe heraustritt, ist sie durch eine senkrechte Scheidewand abgeteilt; nach Aussen zu wird der Durchmesser der Knospe grösser (0·36 *mm*) und es erscheint im Durchschnitte eine senkrecht auf die Wand der Knospe stehende Lamelle, die vielleicht eine neue Teilung andeutet. Das äussere Ende der Knospe scheint sackartig geschlossen zu sein.

Die Form dieses Ende ist nicht deutlich, da fremde Bruchstücke peridermaler Graptolithenwand dasselbe verdecken.

Zwischen den unzähligen Graptolithenstöcken kommen weiters sehr zahlreiche, kugelförmige Gebilde vor, welche in nächster Beziehung zu Graptolithen stehen.

Die Deutung dieser kleinen Fossilien ist sehr schwierig. Die hauptsächlichsten Merkmale ihres Auftreten sind:

Sie stehen mit Graptolithenstämmen in innigster Beziehung und befinden sich sehr zahlreich nur in der die Mitte der Knollen einnehmenden Lage zwischen einzelnen Stöcken.

Die Wand dieser Kugeln nimmt allmählig, wie weiters näher angegeben wird, immer mehr ein Material auf, welches in den Dünnschliffen vollkommen der peridermalen Masse der Graptolithen gleicht. Es ist das dieselbe schwarze, an den Kanten oder in den dünnsten Lagen braun durchscheinende Masse, wie sie die Stämme und Zoecien der Graptolithen aufbaut. Der innigste Zusammenhang dieser Gebilde mit Graptolithen ist demnach ausser Zweifel gestellt. Neben diesen Merkmalen haben mich noch ihre Form und dann die Veränderungen, welche der Bau dieser Fossilien erleidet, bewogen, sie als Propagationsgebilde (Eizellen?) anzusehen. Sie sind kugelförmig, da alle Durchschnitte regelmässig kreisrund erscheinen. Von ihrer kugelrunden Form können uns auch noch jene Fälle überzeugen, in welchen der Schnitt, beinahe tangentiell geführt, nur eine kleine Partie der Kugel getroffen hat und ihre Wölbung sehen lässt. Diese Erscheinung wird weiter unten noch näher besprochen.

Die Wand dieser Kugeln ist ursprünglich aus einem anderen Material als aus chitinösem Periderm aufgebaut, nimmt jedoch in verschiedenen Verhältnissen peridermale Masse auf, so dass in dieser Richtung mehrere Stadien, die wohl einzelnen Wachstumsstuffen entsprechen, unterschieden werden können.

Es muss vorerst die Frage erörtert werden, welche von diesen Stufen als jüngere und welche als fortgeschrittenere angesehen werden sollen.

Da das Ende des ganzen Entwickelungsprozesses nur der Aufbau eines chitinösen Hydrosoms sein kann, so leuchtet ein, dass die Stadien ohne oder nur mit sehr wenig peridermaler Masse als jüngere, jene aber, welche bereits bedeutendere Ablagerungen einer chitinösen Masse zeigen, als in der Entwickelung und somit im Alter fortgeschrittenere erklärt werden müssen.

Dem, was oben erörtert wurde, gemäss können wir nachstehende Stufen erkennen:

Die kugelrunde Zelle besitzt 2 konzentrische Wände aus einer anderen Masse als aus Chitin.

Die Beschaffenheit des Materiales, welches in diesem Stadium die Wände aufbaut, kann jetzt nicht mehr konstatiert werden. Die

Masse unterscheidet sich nur durch etwas dunklere Farbe von dem sie umgebenden kalkigen Gestein der Knolle.

Da der feinkörnige Kalkstein auch die feinsten Versteinerungen erhalten hat, ist es möglich, dass die Wand in diesem Stadium nur ein Häutchen war.

Die Zellen haben zweifache Konturen und sind demzufolge mit doppelter Wand umgeben. Der Durchmesser der inneren Wand beträgt 0·2 bis 0·3 *mm*, derselbe bis zur äusseren Wand gemessen 0·23 bis 0·38. Es beträgt also der Abstand dieser 2 Wände von einander etwa $^1/_7$ bis $^1/_4$ des ganzen Durchmessers. Fig. 3 stellt den Durchschnitt einer solchen Kugel dar.

Die weitere Entwickelung schreitet in der Weise fort, dass die äussere Wand allmählig verschwindet und die weiteren Veränderungen nur auf der inneren Wand stattfinden. Das Schwinden der äusseren Wand ist an einigen der photographierten Bildern gut zu sehen (Fig. 2, 4 und 5).

Die weiteren Veränderungen an der inneren Wand der Zellen bestehen darin, dass in dieser Wand die chitinöse peridermale Masse erscheint und allmählig sich anhäuft. Zuerst erscheint diese Masse in der Form eines Gitters, welches in der inneren Wand entsteht. An den Durchschnitten ist dieses Gitter dadurch erkenntlich, dass die innere Wand eine kreisrunde Linie von Punkten bildet (Fig. 6 und 7, angedeutet auch in Fig. 4, 8 und and.). Viele Durchschnitte, welche noch die äussere Wand erhalten haben, zeigen schon diese Beschaffenheit zum Beweise, dass das Entstehen des Gitters in den frühesten Stadien eintrifft. Andere wenige Durchschnitte, deren Fläche zufälliger Weise die kugelrunde Zelle nur tangentiell traf, oder auch Bilder der Zellen, welche, wie es scheint, überhaupt nicht geschnitten wurden, zeigen das Gitterwerk in bedeutenderen Partien (Fig. 9 und 10).

Die weitere Entwickelung besteht darin, dass die gegitterte innere Wand immer mehr peridermales Material aufnimmt und sich in eine feste, ziemlich dicke Hülle verändert. Hier schwindet auch die äussere Wand gänzlich und hinterlässt keine Spur. Die Erhaltungsweise dieser Zellen mit chitinöser Wand ist eine verschiedene. Nur selten ist diese Wand in ihrer Gänze erhalten und der Durchschnitt hat die Form eines dicken Kreises (Fig. 11 und 12). Gewöhnlich zerreisst die chitinöse Hülle in unregelmässige Bruchstücke, wobei der Verlauf der inneren Wand gut zu beobachten ist (Fig. 13 bis 17).

Das Ende dieses Prozesses, so weit ich ihn beobachten konnte, ist, dass die Zelle selbst von Stücken peridermalen Materials sich fast vollkommen füllt (Fig. 18).

Die am meisten fortgeschrittene Stadien zeigen Häuflein von peridermaler Masse, an welchen jedoch die ursprüngliche kugelige Gestalt der Zellen noch gut zu erkennen ist (Fig. 19).

Eine Regelmässigkeit in den Konturen der Peridermalfetzen konnte nirgends beobachtet werden und die weiteren Schicksale dieser Zellen sind nicht bekannt.

Es sei hier noch bemerkt, dass diese Zellen, welche ich für Propagationsgebilde von Graptolithen ansehe, von den sogen. Gonangien, welche unter dem Namen *Dawsonia* beschrieben wurden, vollkommen verschieden sind. Die meisten der mit diesem Namen belegten Formen sind inarticulate Brachiopoden, einige von ihnen, wie z. B. die von Nicholson[3]) abgebildeten, sind überhaupt unbestimmbar.

In den beschriebenen Knollen ist weiters eine sehr interessante Erscheinung zu sehen, welche vielleicht die Art und Weise des Entstehens der Knollen erklären könnte.

Die zahlreichen Graptolithenkolonien nehmen in den Knollen eine mittlere Schichte von etwa 2—3 *cm* Dicke ein und sind mit eigenartigen langen Fäden umgeben, ja man könnte sagen, umgewickelt. Diese Fäden, welche einem Haarschopfe ähnlich sind, bestehen aus derselben peridermalen Masse wie die Stöcke der Graptolithen selbst und das ist der Grund, dass ich sie in die Verwandschaft von Graptolithen und zwar in die von Nicholson[4]) *Dendroidea* benannte und von Hopkinson und Lapworth[5]) unter den Namen *Cladophora* errichtete Gruppe stelle.

Mit blossem Auge sind sie im Gestein nicht bemerkbar, sie färben höchstens das Gestein dunkler, als es sonst zu sein pflegt.

Im Dünnschliffe erscheinen sie als lange, beinahe parallel verlaufende Fasern, welche meist in Stücke gebrochen sind (Fig. 20). Sie sind in der ganzen Länge gleich breit, etwa 0·05 bis 0·06 *mm*, und bestehen aus peridermaler schwärzlichen, dort wo sie durch die Fläche des Dünnschliffes in dünne Lagen geschnitten sind, bräunlichen bis dunkelgelben Masse und zeigen sonst wenig Struktur. Sie enthalten kleine rundliche Zellen, die insbesondere an einigen Stellen gut sichtbar sind.

---

[3]) A Manual of Paleontology. 1899. Vol. I. Fig. 95.

[4]) Monograph of british Graptolitidae, 1872.

[5]) Quarterly Journal of Geological Society, XXXI, 1875.

Die Zellen waren, wie es scheint, dünnwandig, in der Faser vollständig eingebettet und nirgends auf die Oberfläche derselben hervortretend.

Daraus ist zu entnehmen, dass die einzelnen Zoecien keine verlängerte Mündung hatten, sondern sich einfach im Niveau der Oberfläche öffneten. Auch von einer Axe ist nirgends keine Spur.

Diese Merkmale waren für mich massgebend und haben mich bestimmt, die beschriebenen Fasern zu den Cladophoren zu stellen.

Es sei hier noch bemerkt, dass diese neue Form auch schon in der Struktur von unseren übrigen Cladophoren sich untercheidet und bisher nicht bekannt war.[6]) Die bei den übrigen hierher gehörigen Formen übliche sogen. „strickförmige" Drehung der Fasern, wie ich[7]) sie bei den meisten unseren Arten typisch entwickelt vorfand, fehlt hier gänzlich.

Die beschriebene Form steht im innigsten Zusammenhange mit Graptolithen und den sie enthaltenden Knollen, denn es scheint, dass der durch Umwickelung der Graptolithenstöcke entstandene Klumpen eben den Anlass zur Bildung der Knolle gab.

Obzwar bei der wenig typischen Beschaffenheit der Fasern die Einreihung dieser neuen Form in die bisher bekannten Familien der Cladophoren nicht leicht durchgeführt werden kann, glaube ich dennoch schon des interessanten Vorkommens wegen eine neue Gattung aufstellen zu dürfen und benenne sie *Graptotrichus involvens.*

Weiters möchte ich noch auf ein Vorkommen eines anderen Fossils aufmerksam machen. *Retiolitidae*, eine Familie der eigentlichen Graptolithen (Rhabdophora Hopkinsons), zeichnen sich bekanntlich durch ein Perisom aus, welchem ein maschiges Gitterskelet zu Grunde liegt. In den Graptolithenschiefern (e_1) sind an vielen Fundorten diese Skelete gut erhalten, wobei die eigentliche, die Maschen des Skeletes ausfüllende peridermale Wand zerstört ist. Im böhmischen Silur sind das insbesondere die Arten *Retiolites Geinitzianus* Barr und *Stomatograptus grandis* Holm, welche in gewissen Schieferlagen fast immer in solchem Erhaltungszustande vorkommen.

Mit diesen Skeleten sind unregelmässige verlängerte Klumpen von dunklen, vollkommen undurchsichtigen Fasern zu vergleichen,

---

[6]) Mein Freund Herr C. Wiman in Upsala, einer der besten Kenner der Graptolithen, dem ich einen Dünnschliff mit dieser Form zur Ansicht sendete, bestätigte mir, dass auch er bisher etwas ähnliches nicht gesehen habe.

[7]) Système silurien du centre de la Bohême, Vol. VIII., Partie 1re 1894. sieh insbesondere die Abb. Taf. 4 Fig. 2a, 8a, Taf. 6 Fig. 3 und Taf. 9 Fig. 11.

welche in den Knollen vorkommen. Einzelne Fasern sind verschiedener Dicke und bilden ein sehr unregelmässiges Gewebe, in welcher Hinsicht sie von den Skeleten der obenangeführten Graptolithen sich gleich unterscheiden.

Im Dünnschliffe ist unter dem Mikroskope immer nur eine Lage dieser Fasern gut wahrzunehmen und es muss, um das ganze Gewebe durchsehen zu können, der Abstand des Linsenfokus oft geändert werden. Daraus ergibt sich, dass eine Photographie dieses Gebildes an Klarheit sehr zu wünschen übrig lässt, nachdem aber eine direkte Zeichnung des im Mikroskope sich darbietenden Bildes wegen seines komplizierten Baues ebenfalls unmöglich ist, bleibt nichts anderes übrig, als sich mit der Photographie zu begnügen (Fig. 21).

Eine nähere Bestimmung dieser peridermalen Skelete wäre gewagt, aber aus ihrem Baue ist zu ersehen, dass hier eine ganz neue Form vorliegt. Das Skelet bildet hier nicht eine Grundlage für eine dünne peridermale Wand, wie dies der Fall bei den genannten Familien ist, sondern der ganze Graptolithenstock scheint aus einer peridermalen auf das Skelet gestützten Masse zu bestehen. Weder Zellenöffnungen noch Zellen selbst konnten beobachtet werden.

Neben diesen Skeleten kommen noch andere, dichtere und aus dickeren, vollkommen undurchsichtigen Fasern gebildete vor. In den Durchschnitten durch diese dichtere Skeletart sieht man nur spärliche spaltenförmige Maschenöffnungen, wogegen der übrige Teil aus schwarzer Masse besteht.

Diese Skelete haben weiters noch insoweit Interesse, als im Kieselschiefer vom Heil. Adalbert bei Miröschau kleine schwarze Fasern gefunden wurden,[8]) welche Bruchstücken solcher Skelete am meisten ähnlich sind.

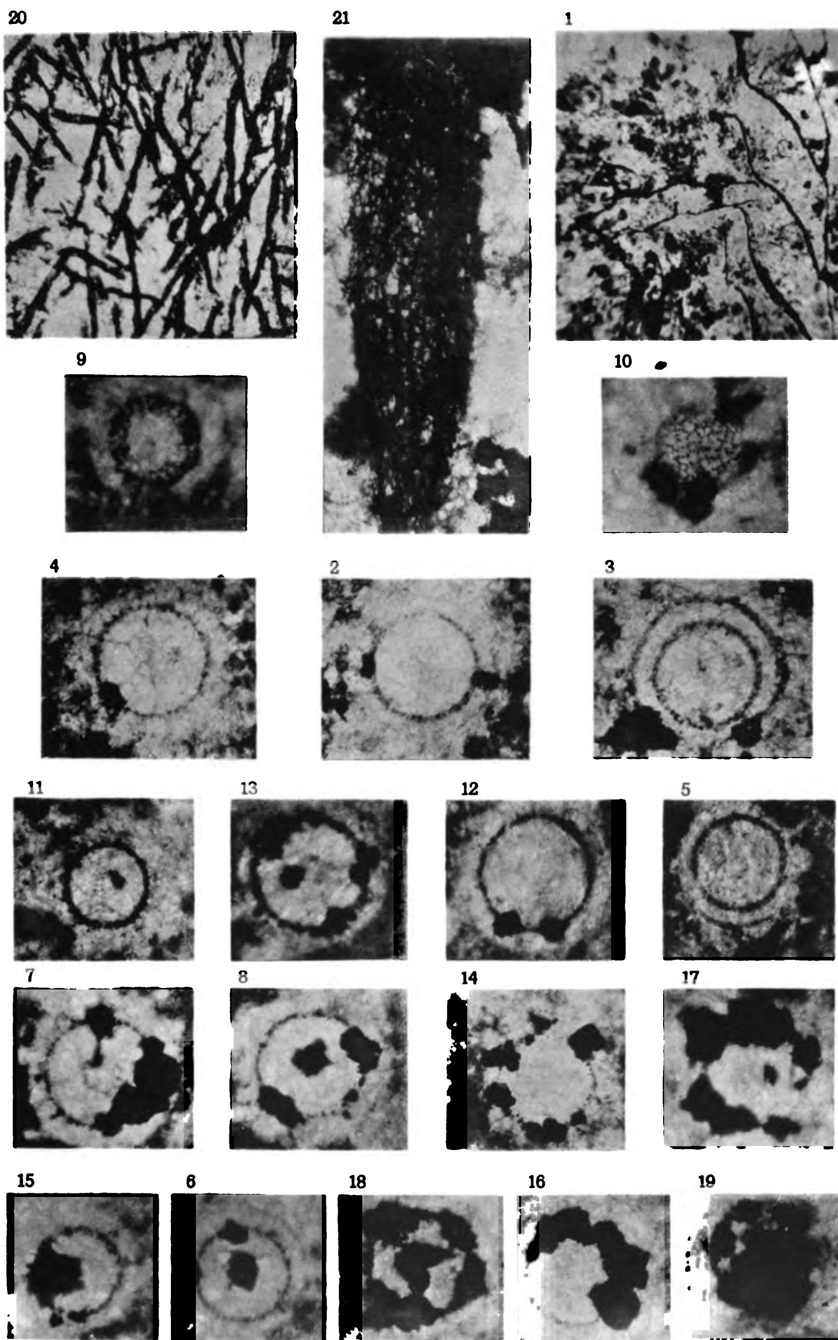
Erklärung der Tafel.

1. Durchschnitt eines Teiles vom Graptolithenstock mit Knospe; 14m. vergr.
2—20. Verschiedene Stadien der Propagationsgebilde von Graptolithen; 46m. vergr.
20. *Graptotrichus involvens* nov. forma 24m. vergr.
21. Peridermales Skelet; 46m. vergr.

---

[8]) Sieh C. r. Purkyně. Kamenouhelné pánve u Mirošova a Skořice. Část I. pag. 9. Rozpravy české Akad. cís. Frant. Josefa pro vědy, slovesnost a umění 1904.

Prof. Ph. Počta: Neues über Graptolithen.



Autor mikrophotogr.

XVI.

Ueber die Variabilität und Localformen bei Palaemonetes varians Leach aus vier verschiedenen Localitäten.

(Eine statistisch-vergleichende Studie.)

(Aus dem zoologischen Institute der böhmischen Universität Prag.)

Von Dr. **Artur Brožek** in Prag.

Mit 8 Textfiguren und einer Tafel.

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. Juni 1907.)

Die Garneele *Palaemonetes varians* Leach ist eine in mancher Beziehung höchst interessante Decapoden-Form, welche auch bereits einer ganzen Reihe verschiedener Arbeiten als Objekt zu Grunde lag. Sehr auffällig ist bei dieser Species ihr grosser Formen-Reichtum und insbesondere die Plasticität ihrer Gesammtform den äusseren elementaren Existenzbedingungen gegenüber.

Es bestätigen dies z. B. die ziemlich grossen Organisationsunterschiede einander entsprechenden Entwickelungsstadien und überhaupt der ungleiche Entwickelungsgang der Süsswasser- und Salzwasser-Form von *Palaemonetes varians* (1, 2.). Einen anderen Beleg bietet die sehr ausgedehnte Variabilität der Species-Charaktere bei einzelnen Localformen, d. h. die beträchtliche Anzahl der verschiedenen Abweichungen (Varianten) eines Merkmals — z. B. der Zahl der oberen Rostralzähne — von dem localtypischen (normalen) Verhalten (von der Mittel-Variante). Parallell mit der ausgedehnten geographischen Verbreitung (7, 8, 3) und den auf verschiedenen Localitäten obwaltenden biologischen Verhältnissen ist es bei *Palaemonetes* zur Ausbildung einzelner Localformen gekommen.

Die einzelnen „normalen" Localtypen sind hier freilich nicht isolirt, sondern hängen durch ihre Varianten so zu-

sammen, dass die einzelnen für eine Localität „typischen“ oder „normalen“ Formen auf einer anderen (bezw. benachbarten) Localität als blosse Varianten (Abweichungen von typischer Form) auftretten.

Was die geographische Verbreitung im Allgemeinen anbelangt, sei hier bemerkt, dass sich die Brackwasser- und Salzwasser-Formen mehr über die nördlichen, kälteren, die Süsswasserformen dagegen über die südlichen, wärmeren Localitäten (z. B. solche im Mittelmeergebiete) ausbreiten. [7. pag. 703.]

Die vorliegende Arbeit soll für die oben allgemein angedeuteten Sätze durch eine statistisch-vergleichende Betrachtung, — welcher ein Material aus vier ganz verschiedenen Localitäten zu Grunde liegt — einen genauen mathematischen Beweis liefern.

Die Localitäten sind:

1. *Lago di Castello* (Albanersee); Italien; — Süsswasserform,
2. *Zogajsko Blato* bei Ulcinj; Montenegro; — Süsswasserform,
3. *Skutarri*-See; Montenegro; — Süsswasserform,
4. *Plymouth*; England, Salz-Brackwasserform.

Die statistischen Angaben über die betreffenden Localtypen vom *Palaemonetes* habe ich theils der vorliegenden Litteratur, theils meinem eigenen Material entnommen.

Nach J. E. V. Boas gründlichen Untersuchungen [2] differiren die oben erwähnten zwei Hauptformen (die nördliche, Brackwasserform u. die südliche, Süsswasserform) in der Eigrösse, durch die Extremitätenorganisation bei larvalen Stadien und durch den postembryonalen Entwickelungsgang so weit, dass diese Verschiedenheiten zur Aufstellung von zwei besonderen *Palaemonetes*-Arten ganz hinreichend wären. Dagegen sind bei Süsswasser- und Brackwasserform die Organisationsunterschiede im erwachsenen Zustande so klein und minderwertig, dass wir diese zwei Haupttypen als blosse Varietäten derselben Art betrachten können. Boas hat für seine vergleichende Arbeit eine dänische (aus der nächsten Umgebung aus Kopenhagen) und eine italienische (aus Neapel) *Palaemonetes*form benutzt. Als Unterschiede zwischen der Salz- und Süsswasserform führt Boas: 1. Die Gestalt und Contour der blattförmigen, seitlichen Erweiterung am Basalgliede der 1. Antenne; 2. die Gestalt und Form des lamellösen Exopodit's der 2. Maxille. — 3. Bewaffnung der Maxillarpalpen und die ungleiche Grösse des Basalgliedes bei 3. Thoraxfusspaare und auf ihm gelegener Genitalöffnung. 4. Gegenseitige Zähnchenzahl der Mandibelnkauladen. 5. Verschiedene Eigrösse. Leider sind alle

die von Boas angeführten Organisationsunterschiede im erwachsenen Zustande für die statistische Forschung entweder sehr schwierig verwendbar oder überhaupt unwendbar. Aber auch aus den Abbildungen Boas erhellt, dass infolge einer individuellen Formvariabilität der nördliche Typ mit dem südlichen durch Varianten verbunden ist, und eine genaue Unterscheidung beider Typen nicht möglich ist.

Ein anderer für die Species wichtiger Charakter ist *die Zahl der oberen und unteren Rostralzähne.* Ihre Variabilität ist wohlbekannt, leicht zugänglich (zählbar) und wurde deswegen schon von manchen Autoren besprochen. Unsere Arbeit handelt hauptsächlich von dieser Variabilität, denn die Zahl und die Variation der unteren Zähne gering ist und zeigt qualitativ übereinstimmende Variationsverhältnisse. Bei der ersteren lassen sich ganz gut nicht nur die individuellen Eigenthümlichkeiten der Localformen, sondern auch der Zusammenhang und die Ausbildung von Localtypen deutlich erkennen.

I.

Palaemonetes varians Leach vom Albanersee (Lago di Castello.)

Die älteste Mittheilung über die variirende Zahl der Rostral zähne bei *Palaemonetes varians* hat Ed. v. Martens, bereits im J. 1857 veröffentlicht. Das *Martens*'sche Material stammte aus dem Albanersee. Dasselbe zählte 105 Exemplare, wahrscheinlich beiderlei Geschlechtes. Meinen Berechnungen nach zeigte sich diese Zahl 105 Individuen für die theoretischen Ausrechnungen ziemlich gut hinreichend. An diesen 105 Exemplaren fand *Martens* am Rostrum:

bei	59	Ex.	oben	6,	unten	2	Zähne,
„	22	„	„	5	„	2	„
„	10	„	„	7	„	2	„
„	5	„	„	6	„	3	„
„	3	„	„	7	„	3	„
„	2	„	„	6	„	1	„
„	1	„	„	8	„	2	„
„	1	„	„	6	„	4	„
„	1	„	„	5	„	1	„
„	1	„	„	4	„	2	„

Diese *Martens*'schen Daten bilden also die Grundlage zu unseren eigenen Berechnungen. Für die Variation der oberen Rostralzähne ergiebt sich daraus die folgende empirische Variationsreihe:

Varianten (Zahl der oberen Zähne):	4	5	6	7	8
Frequenzen („ „ Individuen):	1	23	67	13	1

Die empirische Maximalfrequenz gehöret der Variante 6. Auf Grund dieser Reihe habe ich die Variationskonstanten*) folgenderweise ausgerechnet. Die Variation der oberen Rostralzähne ist also gegeben durch die:

A) Allgemeinkonstanten:

$$n = 105;\ M = 5{\cdot}9048;\ \varepsilon = 0{\cdot}6403;$$
$$E_M = 0{\cdot}0421;\ E\varepsilon = 0{\cdot}0298;$$
$$\nu_1 = -0{\cdot}0953;\ \nu_2 = 0{\cdot}4190;\ \nu_3 = -0{\cdot}0953;\ \nu_4 = 0{\cdot}6476.$$
$$\mu_1 = 0{\cdot}\quad \mu_2 = 0{\cdot}5766;\ \mu_3 = 0{\cdot}0228;\ \mu_4 = 1{\cdot}1107.$$
$$\beta_1 = 0{\cdot}0026;\ \beta_2 = 3{\cdot}3405;\ F = 0{\cdot}6732;$$
$$F(\mu_2)^3 = 0{\cdot}1290;\ \text{Typus V. (IV.)}$$

Infolge der Werte von β_1, β_2 und F**) gehöret in unserem Fall die betreffende Variationskurve dem speciellen Fall des IV. *Pearson*'schen Typus der Wahrscheinlichkeitskurve d. h. dem V., symmetrischen Typus.

$$A = +0{\cdot}0210;\ d = 0{\cdot}0134;\ s = 20{\cdot}8369.$$

---

*) Es bedeutet: n, die Zahl der untersuchten Individuen.
M, theoretischer Mittelwert eines Merkmals, zugleich die Basis der Schwerpunktsordinate. (y_c).
ε, der Variabilitätsindex.
E_M, E_ε, der Wahrscheinlichkeitsfehler von M, ε.
ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, Hilfskonstanten.
μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, die sog. Kurvenmomente (in unserer Berechnung sind es die „modificierten" K.-M.)
β_1, β_2, F, die Konstanten für Kurventypus.
y_o, y_c, y_m, die Ausgangs-, Schwerpunkts-, und die Maximal-Ordinate.
A, der Asymmetrie-Index.
d, s, die Hilfskonstanten.
V, f, y, Variante, empir. und theor. Frequenz.
$\triangle\%_0$, der Deckungsfehler des emp. und theor. Variations-Polygons.

**) $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 3$, $F = 0$, und $F.\mu_2{}^3$ bewegt sich innerhalb der Grenzen ± 1. [5; pag. 20; 6; pag. 31.]

B) Specialkonstanten:

$y_0 = 65{\cdot}42$; $\log y_0 = 1{\cdot}815715$;

y_e liegt bei M; d. i. $5{\cdot}9048 \doteq 5{\cdot}9$;

y_m „ „ $(M - d)$ d. i. $5{\cdot}8914 \doteq 5{\cdot}9$.

Die Kurvenformel des V. (IV.) Typus ist:

$$y = 65{\cdot}42 \,.\, e^{-\frac{x^2}{2\,.\,0{\cdot}6403^2}}$$

Die Übereinstimmung der Theorie mit Empirie geht aus folgender Berechnung (nach *Duncker*'s Methode):

V	f (emp.)	y (theor.)	$x = V - M$	$\delta = f - y$	$\frac{(\pm\delta_n)(\mp\delta_{n+1})}{\sqrt{\delta_n^2} + \sqrt{\delta_{n+1}^2}}$
3 (supponirt)	0	0·0	— 2·9048	0·0	
4	1	0·8	— 1·9048	0·2	— 0·17
5	23	24·1	— 0·9048	— 1·1	— 0·74
6 ($V_{max.}$)	67	64·7	+ 0·0952	2·3	— 1·10
7	13	15·1	1·0952	— 2·1	— 0·53
8	1	0·3	2·0952	0·7	
9 (sup.)	0	0·0	3·0952	0·0	
	$n = 105$;	$\Sigma(y) = 105{\cdot}0$		+ 3·2	— 2·54
				— 3·2	
				$\Sigma(\sqrt{\delta^2}) = 6{\cdot}4$	

$$\triangle = 1{\cdot}83\% \left[\text{also} < \frac{100}{\sqrt{n}} = 9{\cdot}76\%\right]$$

Die Localform des *Palaemonetes varians* aus dem Albanersee ist also charakterisirt durch Variationskonstanten:

$M = 5{\cdot}9048$, $\varepsilon = 0{\cdot}6403$, $A = + 0{\cdot}0210$, $n = 105$, $\triangle\% = 1{\cdot}83\%$

$$y = 65{\cdot}42 \,.\, e^{-\frac{x^2}{2\,.\,\varepsilon^2}}$$

Nach diesen Resultaten wurde die Variation der Albanerform graphisch dargestellt (Taf. I. fig. α.) durch die Konstruktion des procentualischen*), empirischen und theoretischen Variationspolygons.

*) Die aufgetragenen emp. und theoretischen Einzelfrequenzen entsprechen nämlich ihren Werten nach der Aequation $n : 100 = f : f'$ und $n : 100 = y : y'$. Bei der Konstruktion wurde die Frequenzeneinheit $i = 2\,mm$, die Varianteneinheit $u = 10\,mm$ genommen.

II.

Palaemonetes varians Leach aus Plymouth.

Weitere Angaben über die Variation der Rostralzähne finden sich bei Weldon. (1890.) [9]. Dieser Autor benützte für seine statistische Untersuchungen 915 Exemplare. Von diesen zeigten 432 eine einfache, 483 eine zweigespaltene Rostralspitze.

Die Zahl der oberen Rostralzähne war 1 in 2 Fällen,
2 „ 18 „
3 „ 123 „
4 „ 372 „
5 „ 349 „
6 „ 50 „
7 „ 1 „

Wentrale Zähne fehlten in 3 Fällen,
1 Zahn war vorhanden „ 276 „
2 Zähne waren „ „ 630 „
3 „ „ „ „ 6 „

Nach diesen Angaben ergiebt sich für die Variation der oberen Rostralzähne folgende, empirische Variationsreihe von Varianten (V) und Frequenzen (f):

V:	1	2	3	4	5	6	7
f:	2	18	123	372	349	50	1

Diese wurde schon zweimal von G. Duncker theoretisch berechnet, das erstemal im J. 1899. [5.], worauf dann bald die zweite (etwas verschiedene)*) Berechnung im J. 1900. [10.] folgte. Für unsere Vergleichszwecke seien hier die wichtigsten Variationskonstanten der Plymouth'schen Form (nach der ersten Arbeit Dunckers)**) angeführt.

Die Variation der oberen Rostralzähne bei *Palaemonetes varians* ist also gegeben durch die:

A) Allgemeinkonstanten:

$$n = 915; \quad M = 4{\cdot}3137; \quad \varepsilon = 0{\cdot}8627.$$
$$E_M = 0{\cdot}0568; \quad E_\varepsilon = 0{\cdot}0402.$$

*) Infolge der Benutzung der unveränderten Kurvenmomente (μ).

**) [5.] pag. 11; pag. 71, 72.

$\beta_1 = 0{\cdot}0722$; $\beta_2 = 3{\cdot}1647$; $F = 0{\cdot}1127$; (Typ. IV.)
$A = -0{\cdot}1293$; $s = 111{\cdot}40$; $d = -0{\cdot}1116$.

B) Specialkonstanten

des IV. *Pearson*'schen Typus der Wahrscheinlichkeitskurve:

$m = 56{\cdot}7$; $md = -6{\cdot}3263$; $a = 6{\cdot}4775$;

$v = 109{\cdot}054$; $v/s = tg\,\varphi$; $\sphericalangle\,\varphi = 44^{0}23'\,25''$;

y_0 liegt bei $(M - md) = 10{\cdot}6400$;

y_c „ „ $M = 4{\cdot}3137$; $y_c = 425{\cdot}9$;

y_m „ „ $(M - d) = 4{\cdot}4253$; $y_m = 427{\cdot}6$.

Die Kurvenformel des IV. Typus ist dann:

$$y = y_0 (\cos\vartheta)^{2\,.\,56\cdot7}\,.\,e^{-109\cdot54\,\vartheta},$$ wo ist:

$$\log y_0 = 0{\cdot}48480 - 18$$ (Näherungswert);

$$tg\,\vartheta = \frac{x}{6{\cdot}4775}.$$

Die Übereinstimmung der Theorie mit Empirie geht wieder aus der Berechnung folgender Tabelle hervor:

$V.$	f (emp.)	y (theor.)	$x = V - (M - md)$	$\delta = f - y$	$\frac{(\pm\delta_n)(\mp\delta_{n+1})}{\sqrt{\delta_n^2} + \sqrt{\delta_{n+1}^2}}$
− 1 (supponirt)	0	0·0	− 11·6400	0·0	
0 („)	0	0·1	− 10·6400	− 0·1	} − 0·09
1	2	1·3	− 9·6400	+ 0·7	
2	18	17·5	− 8·6400	+ 0·5	} − 0·46
3	123	128·1	− 7·6400	− 5·1	
4 (Vmax)	372	382·5	− 6·6400	− 10·5	} − 6·51
5	349	331·9	− 5·6400	+ 17·1	} − 2·77
6	50	53·3	− 4·6400	− 3·3	} − 0·58
7	1	0·3	− 3·6400	+ 0·7	
8 (supponirt)	0	0·0	− 2·6400	0·0	
	$n = 915$;	$\Sigma(y) = 915{\cdot}0$;		+ 19·0;	− 10·41
				− 19·0	
				$\Sigma(\sqrt{\delta^2}) = 38{\cdot}0$;	

$$\triangle = 1{\cdot}51\,\% \left[\text{also} < \frac{100}{\sqrt{n}} = 3{\cdot}31\,\%\right]$$

Die Variabilität der Zahl der oberen Rostralzähne für die englische Palaemonetes-Form ist also charakterisirt durch:

$$M = 4{\cdot}3137;\quad \varepsilon = 0{\cdot}8627;\quad n = 915;\quad A = -0{\cdot}1293;\quad \triangle = 1{\cdot}51\%;$$

$$y = y_o\,(\cos\vartheta)^{2\,.\,56{\cdot}7}\,.\,e^{-109{\cdot}54\,\vartheta},\ \text{wo}$$

$$\log y_o = 0{\cdot}48480 - 18\ \text{ und }\ tg\,\vartheta = \frac{x}{6{\cdot}4775}\,.$$

Auf Grund dieser empirischen und theoretischen Frequenzenwerte (f, y) habe ich (Tafelfig. β.) einen empirischen und theoretischen, procentualischen Variationspolygon konstruirt. Auch jetzt, wie in dem vorhergehenden Fall wurde als Frequenzeneinheit die Länge $i = 2$ *mm*, als Varianteneinheit die Länge $u = 10$ *mm* genommen.

III.

Palaemonetes varians Leach aus Zogajsko Blato bei Ulcinj (Dulcigno) in Montenegro.

Das Material aus dieser Lokalität wurde von Prof. Mrázek im Sommer 1906 gesammelt.

Von den 735 Exemplaren benutzte ich zu statistischen Zwecken 700 Individuen beiderlei Geschlechtes und behufs bequemer und genauer Beobachtung der Variation sowohl der Zahl der Zähne als auch anderer Merkmale des Schnabels habe ich alle 700 Rostra bei 10 maliger Vergrösserung mittelst Abbé-schen Zeichenapparat gezeichnet. So konnte ich auch verschiedene Eigenthümlichkeiten in der Ausbildung des Schnabels wie Breite, Länge, Form, Krümmung seiner Längsachse, einzelne Unregelmässigkeiten u. s. w. gut beobachten und vergleichen.

Für die Variation der Zahl der oberen Rostralzähne lassen sich folgende empirische Daten in eine Variationsreihe zusammenstellen.

Varianten:	4	5	6	7	8	9
Frequenzen:	3	83	343	224	41	6

Zahl der untersuchten Individuen $n = 700$.

Auf Grund dieser Reihe*) berechnete ich folgende theoretische

*) Weil es nicht ausgeschlossen war, dass der Sexualdimorphismus bei der Zahl der oberen (und unteren) Rostralzähne auftritt, habe ich bei allen untersuchten Exemplaren auch das Geschlecht beobachtet und besonders für jedes Geschlecht eine empirische Variationsreihe von Varianten und Frequenzen aufgestellt. Aus Identität beider Reihen, namentlich ihrer procentualischen Frequenzen und der zugehörigen Mittelwerte M ♀ mit M ♂ (und beider mit M), erkennt man gut, dass Geschlecht keinen Einfluss auf die Ausbildung des Schnabels ausübt. Die Reihen mit ihren Mittelwerten für die oberen Rostralzähne sind nämlich:

Variationskonstanten einer einheitlichen Variationskurve. Die Hauptresultate meiner Rechnungen sind:

A) die **Allgemeinkonstanten**:

$n = 700;\quad M = 6{\cdot}3357;\quad \varepsilon = 0{\cdot}8090.$

$E_M = 0{\cdot}0206;\quad E_\varepsilon = 0{\cdot}0146.$

$\beta_1 = 0{\cdot}0524;\quad \beta_2 = 3{\cdot}2275;\quad F = 0{\cdot}2978;$ (Typus IV.)

$A = +0{\cdot}1045;\quad s = 43{\cdot}8234;\quad d = 0{\cdot}0845;$

B) Die **Specialkonstanten**

des IV. *Pearson*'schen Typus der verallgemeinerten Wahrscheinlichkeitskurve:

$m = 22{\cdot}9117;\quad md = 1{\cdot}9362;\quad a = 4{\cdot}9285;$

$v = -17{\cdot}2149;\quad v/s = tg\,\varphi;\quad \sphericalangle\,\varphi = -21^\circ\,26'\,46'';$

y_0 liegt bei $(M - md) = 4{\cdot}3995;$

y_c „ „ $M = 6{\cdot}3357;\quad y_c = 350{\cdot}8.$

y_m „ „ $(M - d) = 6{\cdot}2512;\quad y_m = 352{\cdot}9.$

Die Kurvenformel des IV. Typus ist dann:

$y = y_0\,(\cos\vartheta)^{2\,.\,22{\cdot}9117}\,.\,e^{-(-17{\cdot}2149\,\vartheta)}$, wo bedeutet

$\log y_0 = 1{\cdot}174553$ (Näherungswert) und

$$tg\,\vartheta = \frac{x}{4{\cdot}9285}.$$

Die Übereinstimmung zwischen empirischen und theoretischen Daten geht wieder aus Berechnung folgender Tabelle hervor:

	Varianten:	4	5	6	7	8	9	
♀	Frequenzen:	3	56	239	156	31	4;	n ♀ = 489.
♀	% „ :	0·6155	11·4519	48·8753	31·9018	6·3395	0·8180;	M ♀ = 6·3438.
♂	Frequenzen:	0	27	104	68	10	2;	n ♂ = 211.
♂	% „ :	0·0000	12·7962	49·2891	32·2275	4·7393	0·9479;	M ♂ = 6·3175.

V	f (emp.)	y (theor.)	$x = V - (M - md)$	$\delta = f - y$	$\frac{(\pm \delta_n)(\mp \delta_n + 1)}{\sqrt{\delta_n^2} + \sqrt{\delta_n^2 + 1}}$
3 (supp.)	0	0·0	− 1·3995	0·0	
4	3	3·2	− 0·3995	− 0·2	
5	83	86·0	+ 0·6005	− 3·0	− 2·21
6 (Vmax)	343	334·6	+ 1·6005	+ 8·4	− 3·24
7	224	229·3	+ 2·6005	− 5·3	
8	41	43·2	+ 3·6005	− 2·2	− 1·14
9	6	3·6	+ 4·6005	+ 2·4	− 0·18
10 (supp.)	0	0·2	+ 5·6005	− 0·2	
11 (supp.)	0	0·0	+ 6·6005	0·0	
	$n = 700$;	$\Sigma(y) = 700·1$;		− 10·9 : + 10·8	− 6·77
				$\Sigma(\sqrt{\delta^2}) = 21·7$	

$$\triangle = 1·07\% \left[\text{also} < \frac{100}{\sqrt{n}} = 3·78\%\right]$$

Die Variabilität der oberen Rostralzähne für *Palaemonetes*-Varietät aus Zogajsko Blato ist charakterisirt durch:
$M = 6·3357$; $\varepsilon = 0·8090$; $n = 700$; $A = + 0·1045$; $\triangle = 1·07\%$

$$y = y_0 (\cos \vartheta)^{2 \,.\, 22·9117} e^{17·2149\, \vartheta}, \quad \text{wo ist}$$

$$\log y_0 = 1·174553 \quad \text{und}$$

$$tg\, \vartheta = \frac{x}{4·9285}.$$

Entsprechend diesen Zahlenwerten konstruirte ich auf Figur γ ein procentualisches, emp. und theor. Var.-Polygon.

Die Variabilität der oberen Zähne geschieht ganz unabhängig von den ebenfalls variirenden unteren Zähnen. Wir erkennen es leicht aus dem Korrelationsschema, wie auch aus allen Textfiguren unserer Arbeit.

	Varianten 4	5	6	7	8	9	Obere Zähne
Varianten 1	1	—	1	2	1	—	5 (Frequenzen)
2	2	80	318	206	38	5	649
3	—	2	21	15	2	1	41
4	—	1	2	1	—	—	4
5	—	—	—	—	—	—	0
6	—	—	1	—	—	—	1
Untere Zähne	3	83	343	224	41	6	$700 = n$
	Frequenzen						

Die Abbildungen Fig. 1. bis 11. sind alle bei 5maliger Vergrösserung gezeichnet und beweisen ganz genau die Unabhängigkeit der Zahl der oberen Zähne von der Breite und hauptsächlich auch von der Länge des Schnabels. Die Reihe enthält alle Varianten unserer Zählung, nämlich 4, 5, 6, 7, 8, 9 in Verbindung mit der häufigst auftretenden Variante für untere Zähne (2).

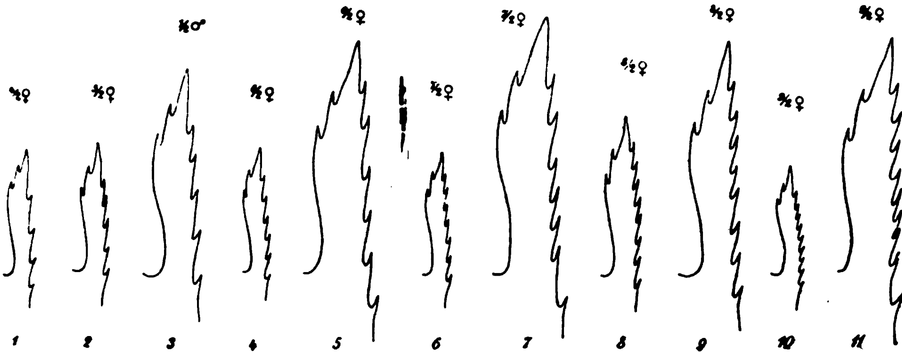


Fig. 1. Die Rostra von *Palaemonetes varians* mit variiender Zahl der oberen Zähne. (No. 1.—11.) Vergrösserung: $^5/_1$.

Die nächste Serie (Fig. No. 12. bis 16.) enthält die Schnabel mit variirender Zahl der unteren Zähne und realisiret die in unserer Beobachtung gegebenen Varianten für die unteren Zähne 1, 2, 3 und 4. Die letzte Abbildung (fig. 16.) ist bei meinem Beobachtungs-

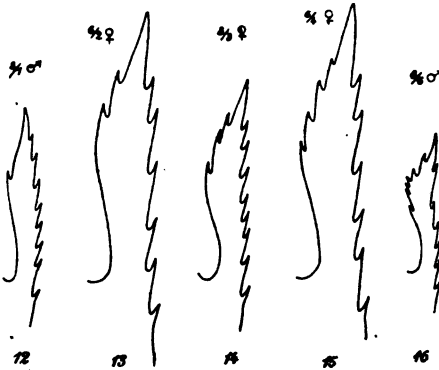


Fig. 2. Rostra von *Palaemonetes varians* mit variirender Zahl der unteren Zähne. (No. 12.—16.) Vergrösserung: $^5/_1$.

material ein einziger, besonderer Zufall, welchen wir durch abnormale (— für die montenegrische Localform —) sehr starke Vermehrung der Zähne erklären können.

Die dritte Serie mit Abbildungen No. 17. bis 26. (dieselbe Vergrösserung wie früher) soll die Krümmung der Längsachse des Schnabels darstellen. Ausser dem geraden Schnabel, der häufigst vorkommt, finden wir bei vielen Individuen, dass die Längsachse entweder nach unten oder wieder aufwärts gekrümmt ist. Die beiden zuletzt erwähnten Extreme sind wieder die seltensten Fälle.

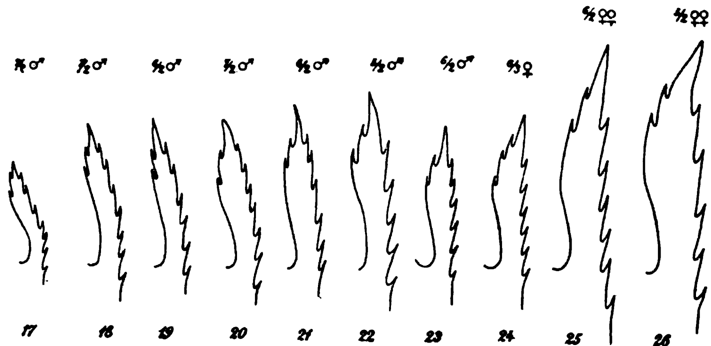


Fig. 3. Krümmung der Längsachse auf einer Rostral-Reihe von *Palaemonetes varians.* (No. 17.—26.) Vergrösserung: $^5/_1$.

Die Breite des Schnabels ist auch ein sehr viel variabler Charakter, gerade wie die Länge. Es waren unter den untersuchten Exemplaren bald lange und schmale, bald kurze und breite Rostra; beide Extreme hatten wieder eine ganze Reihe von Überganskombinationen.

Zu anderen Eigenthümlichkeiten der Ausbildung des Schnabels gehöret die Entstehung neuer (oberen wie auch unteren) Zähne, welche die folgende Reihe von Abbildungen No. 27. bis 41. enthält. Als unregelmässige Bildungen können wir zunächst eine Verdoppelung der Zähne durch die Spaltung anführen. Auf der Fig. 27. bemerkt man eine nur teilweise Spaltung eines der oberen Zähne, während auf der nächsten Abbildung (Fig. 28.) es schon zu einer vollkommenen Spaltung gekommen ist und wir da statt eines Zahnes, zwei neue, dicht nebeneinander gestellte Zähne finden. Dasselbe gilt auch für die unteren Zähne, wie man es auf Fig. 29. u. 30. sieht. Die Spaltung in Verbindung mit direkter Interpolation und Ausbildung selbständiger Zähne ist eben der Hauptgrund der ungleichmässigen Verteilung der Zähne des oberen und unteren Rostral-Randes, denn sie lässt sich auch am Besten gerade bei solchen Individuen erkennen, welche den grösseren Varianten (der montenegrischen Localität) zugehören. (Fig. 31., 32.) Eine andere Ursache solcher Unregel-

mässigkeiten ist auch das Verschwinden einzelner Zähne in sehr verschiedenem Umfang. Einzelne Zähne sind entweder nur als blosse Wellenlinien des Randes entwickelt (Fig. 33., 34., 35.), oder fehlen ganz (Fig. 36.), so dass es dann zu einer Unterbrechung der Reihe kommt (Fig. 37., 38.). Durch ein solches auf mehrere Zähne ausgedehntes Verschwinden lässt sich bei einigen Individuen (Fig. 39., 40., 41.) die abnormale, zu grosse Entfernung des 1. Zahnes von der Spitze des Schnabels erklären. (Dies ist in gleichem Maasse sowohl für die oberen als auch für die unteren Zähne giltig.)

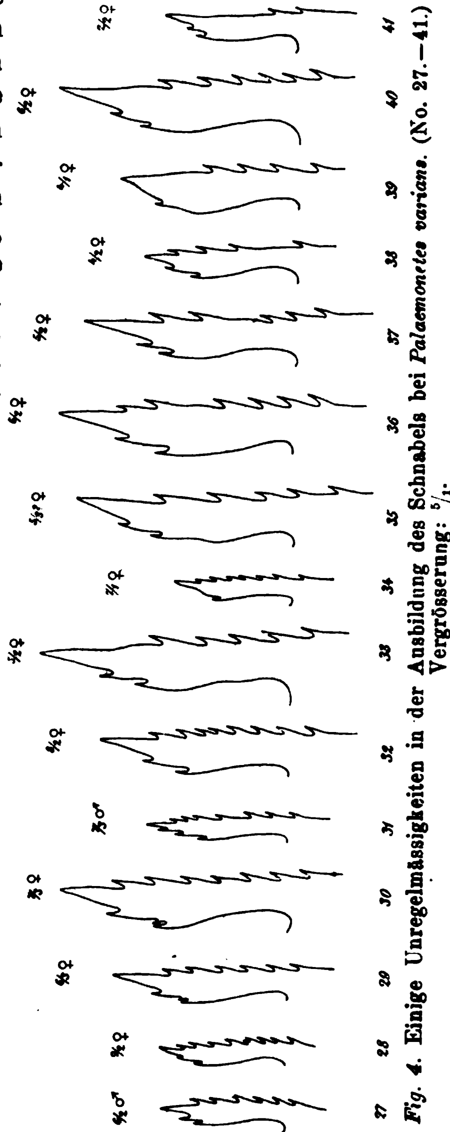


Fig. 4. Einige Unregelmässigkeiten in der Ausbildung des Schnabels bei *Palaemonetes varians*. (No. 27.—41.) Vergrösserung: 5/1.

Weldon erwähnt in seiner Arbeit 483 Exemplare (unter 915), die eine gespaltene („bifid") Rostralspitze besassen.*) Weil ich diesen Fall auch bei meinem Material beobachten konnte, wenn auch nicht so häufig wie Weldon, wendete ich dieser Erscheinung meine Aufmerksamkeit zu und gelang auf Grund sorgfältiger Beobachtung zur Überzeugung, dass es hier um einen ganz kleinen Zahn handelt, welcher bald auf oberem, bald auf unterem Rostralrande in geringer auch variirender Distanz von der Spitze entspringt. Diesen Fall stellen die Abbildungen No. 42. bis 46. für den oberen, und die Figuren No. 47. bis 51. für den unteren Rand vor. Der oben erwähnte kleine Zahn ist morphologisch ganz gleich anderen normalen Rostralzähnen, er besitzt sogar an seiner Basis, vorne 1—2 kleine Borsten gleich wie die normalen Zähne,

*) Vergl. auch *Th. Barrois* [7].

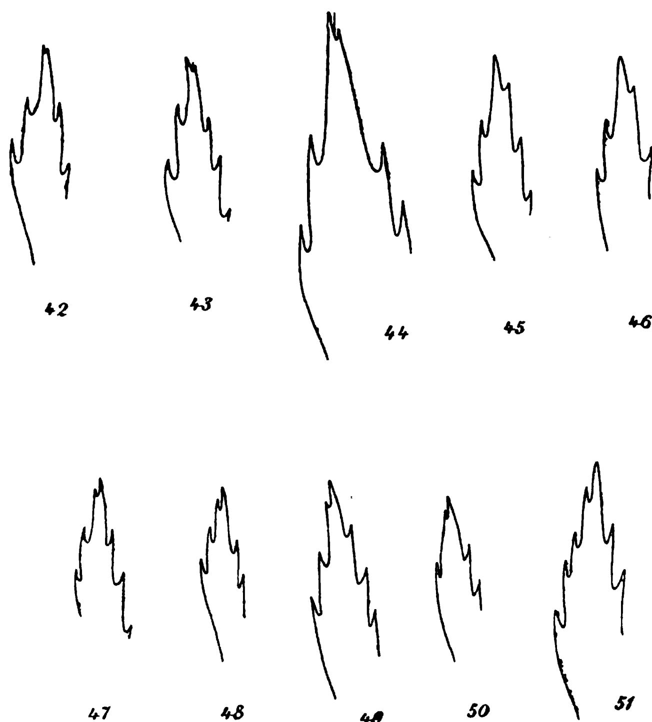


Fig. 5. Die sog. „Spaltung“ der Rostral-Spitze. (No. 42.—51.) Vergrösserung: $^{10}/_{1}$.

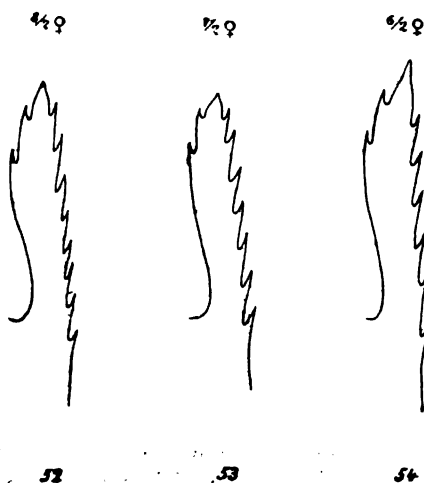


Fig. 6. Rostra mit breiter Spitze. (No. 52.—54.) Vergrösserung: $^{10}/_{1}$.

welche zwischen sich an ihrer Basis mehrere und stärkere Borsten tragen. (Siehe die Fig. 43., 44.)

Die Breite der Spitze ist auch ein sehr variabler Charakter. Wir können normal breite (Fig. 7.), schmale (Fig. 21., 23., 42.) und breite (Fig. 26., 39., 52., 53., 54.) Typen entscheiden, wenn auch nicht genau, denn es gibt unter diesen drei oben genannten Typen eine ganze Reihe von Übergängen. Der normal breite Typus ist zugleich auch der häufigste.

Wie die Zahl der oberen zu den unteren Zähnen in keiner Beziehung war, so lassen sich auch keine allgemeine Regeln aufstellen für ihre gegenseitige Stellung. Schon Martens traf bei dieser Gelegenheit an Schwierigkeiten bei der Beschreibung dieses Merkmals. Bei unserem Material war der 1. Zahn der oberen Reihe im häufigsten Fall gleich entfernt von der Spitze wie der 1. untere. Es war aber auch dieses Kriterium einer ungeheuer grossen Variabilität unterworfen, welche durch das Auftretten der oben erwähnten Unregelmässigkeiten in der Ausbildung der Zähne noch komplicirt wurde. Einige verschiedene, gegenseitige Stellungen der Zähne versuchte ich durch die punktirten Linien auf den Textfiguren No. 55. bis 70. auszudrücken.

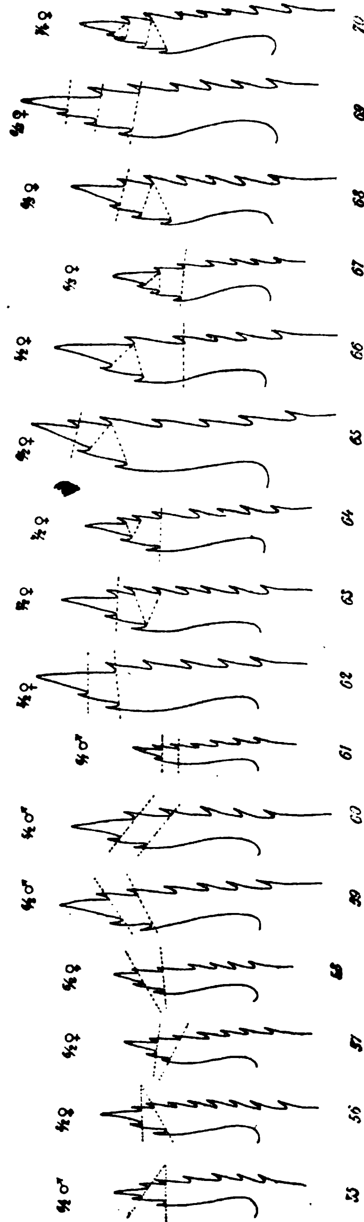


Fig. 7. Gegenseitige Stellung der Rostralzähne bei *Palaemonetes varians*. (No. 55.—70.) Vergrösserung: $^8/_1$.

IV.

Palaemonetes varians Leach aus Skutarri-See.

Prof. Dr. Al. Mrázek fand im J. 1902 *Palaemonetes varians* im *Skutarri*-See im Delta des Flusses *Morača*. Aber das gesammelte Material war, wie ich übrigens schon in einer früheren Arbeit [3.] bemerkt habe, zu gering (— 6 Individuen —) für eine statistische Untersuchung. Jüngst bekam ich ein neues Material: 146 Individuen beiderlei Geschlechtes, welches im J. 1906. gesammelt und mir zur Bearbeitung übergeben wurde.*)

Meine Untersuchungen über die Variabilität der oberen und unteren Rostralzähne führten erstens zur Aufstellung folgendes Korrelationsschemas.

		Varianten					
		5	6	7	8	Obere Rostralzähne	
Varianten	2	11	55	44	8	118	Frequenzen
	3	1	9	13	5	28	
Untere Zähne		12	64	57	13	146 = *n*, Zahl d. Individuen.	
		Frequenzen					

Aus dieser Tabelle folgt für Variabilität der oberen Zähne folgende empirische Variationsreihe:

V:	5	6	7	8
f:	12	64	57	13

Dieselbe habe ich wie in früheren Abschnitten theoretisch bearbeitet und kam zu diesen Resultaten:

Für Varietät aus *Skutarri-See* gelten:

A) die Allgemeinkonstanten:

$$n = 146;\quad M = 6{\cdot}4863;\quad \varepsilon = 0{\cdot}7696.$$
$$E_M = 0{\cdot}0430;\quad E_\varepsilon = 0{\cdot}0304;$$

*) Für die Überlassung des ganzen *Palaemonetes*-Material aus beiden in unserer Arbeit erwähnten, montenegrischen Localitäten spreche ich Herrn Prof. Dr. Al. Mrázek meinen innigsten Dank aus.

$\beta_1 = 0{\cdot}0039$; $\beta_2 = 2{\cdot}7415$; $F = -0{\cdot}5287$; (Typus. II.) *)
$A = +0{\cdot}0382$; $s = 19{\cdot}7193$; $d = 0{\cdot}0294$.

B) Die *Specialkonstanten* des II. *Pearson*'schen Typus der verallgemeinerten Wahrscheinlichkeitskurve sind:

$$m = 8{\cdot}8597; \quad a = 3{\cdot}5031;$$

$$y_0, y_c, y_m \text{ liegt bei } M = 6{\cdot}4863;$$

die Kurvenformel des betreffenden (II.) Typus für unseren Zufall ist:

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{3{\cdot}5031^2}\right)^{8{\cdot}8597};$$

wo Logarithmus für die Ausgangsordinate (y_0) ist:

$$\log y_0 \; {}^{**}) = 1{\cdot}86\,2760; \quad y_0 = y_c = y_m = 72{\cdot}9.$$

Die Übereinstimmung zwischen Empirie und Theorie geht wieder aus der Berechnung von folgenden Werten hervor.

V	f (emp.)	y (theor.)	$x = V - M$	$\delta = f - y$	$\frac{(\pm\delta_n)(\mp\delta_{n+1})}{\sqrt{\delta_n^2} + \sqrt{\delta_{n+1}^2}}$
4 (supp.)	0	0·2	− 2·4863	− 0·2	
5	12	12·6	− 1·4863	− 0·6	− 0·49
6 (Vmax)	64	61·3	− 0·4863	+ 2·7	− 1·44
7	57	60·1	+ 0·5137	− 3·1	− 0·92
8	13	11·7	+ 1·5137	+ 1·3	− 0·09
9 (supp.)	0	0·1	+ 2·5137	− 0·1	
	$n = 146$;	$\Sigma(y) = 146{\cdot}0$		− 4·0	− 2·94
				+ 4·0	
				$\Sigma(\sqrt{\delta^2}) = 8{\cdot}0$	

$$\triangle = 1{\cdot}73\% \left(\text{also} < \frac{100}{\sqrt{n}} = 8{\cdot}28\%\right)$$

*) Nämlich $\beta_1 = 0$, $\beta_2 < 3$ und F negativ [5; pag. 20].

**) Berechnet nach der Formel:

$$y_0 = \frac{n}{a} \cdot \frac{\Gamma(m + 1{\cdot}5)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)} . \text{ [5., pag. 68.]},$$

in welcher das Zeichen Γ die *Euler*'sche Funktion der betreffenden Zahl bedeutet.

Demnach stehen also die Variationsverhältnisse dieses Merkmals bei dieser Localform sehr nahe denjenigen, welche für die Form aus Zogajsko Blato konstatirt wurden. Es sind da nur theoretische und zugleich noch sehr geringe Unterschiede angetroffen, so dass wir aus diesem Grund beide Localtypen (nämlich aus Scutarri-See und Zogajsko Blato) als identisch zu bezeichnen berechtigt sind.



Fig. 8. (*a*—*e*). Einige Unregelmässigkeiten in der Ausbildung des Schnabels bei *Palaemonetes* aus Scutarri-See.

Während der Untersuchung bin ich auf einzelne interessante Eigenthümlichkeiten in der Ausbildung der Zähne, wie auch des ganzen Schnabels gekommen und ich habe sie gleich beisammen auf der Textfigur 8. aufgezeichnet. So zeigen die Abbildungen *a*, *b*, *c* und *d* verschiedene Stufen der Spaltung und Verdoppelung der Zähne; die Abbildungen *e* und *f* vorstellen zwei besonders ausgebildeten Rostra, das eine mit regenerirter Spitze, das andere mit abnormalem Einschnitt (x) des unteren Randes der Rostralspitze.

Die sog. „gespaltenen" Rostralspitzen habe ich ausnahmsweise und sehr selten bei einigen Individuen beobachtet.

V.

Zusammenfassung der Resultate über die Variation der oberen Rostralzähne bei Palaemonetes.

Wollen wir einige Zahlenwerte über die Variation dieses Merkmals entsprechend den vier vorigen Abschnitten übersichtlich zusammenstellen, so bekommen wir folgende Tabelle:

Var.-Konstanten		Localitäten			
Symbol	Name	Plymouth	Lago di Castello	Zogajsko Blato	Skutarri-See
M	Mittelwert	4·3137	5·9048	6·3357	6·4863
ε	Var. Index	0·8627	0·6408	0·8090	0·7696
A	Asymm.-Index d. Var.-Kurve	— 0·1293	+ 0·0210	+ 0·1045	+ 0·0382
	Typus der Var.-Kurve	IV.	V.	IV.	II.
β_1	Haupt-konstanten des Typus	0·0722	0·0026	0·0524	0·0039
β_2		3·1647	3·3405	3·2275	2·7415
F		0·1127	0·6732	0·2978	— 0·5287
n	Zahl d. Indiv.	915	105	700	146

Die Angaben dieser Tabelle bestättigen und zum Teil auch ergänzen die von *Duncker* aufgestellten Ansichten über die Bedeutung der Variationswerte für Biologie und Entwickelungsmechanik. [11., pag. 214., 215.] *Palaemonetes varians* zeigt nämlich ein beträchtliches

Adaptationsvermögen.*) Es kommt zur Entstehung verschiedenster Varietäten, welche nach ihren, zu einzelnen variirenden Merkmalen gehörigen Mittelwerten gut erkennbar sind und durch sie auch vertretten werden können.

So hat *Palaemonetes varians* auf 3 verschiedenen Localitäten auch 3 durchaus verschiedene mit 3 besonderen Mittelwerten charakterisierte Varietäten ausgebildet.**) Deswegen können wir den Mittelwert als morfologische Konstante, als Varietäten-Wert schätzen. Während die drei (5·9, 6·3, 6·5) den südlichen *Palaemonetes*-Typen gehörige Mittelwerte weit entfernt sind von dem der nördlichen Form gehörigen Mittelwert, stimmen sie dagegen fast untereinander. Alle diese 4 Mittelwerte sind aber nicht voneinander getrennt, isolirt, sondern stehen im innigsten Zusammenhang durch die Abweichungen vom Mittel, d. h. durch ihre Varianten so, dass Variante, welche bei einer Varietät als blosse Abweichung auftritt, gleich schon bei anderer Varietät zu Mittelwert erhoben wird und umgekehrt, dass Variante, die bei einer Gelegenheit als Mittel vorkommt, schon *gleichzeitig* bei benachbarter Localvarietät zur Abweichung sinkt. So kommt die Variante 4 bei *Palaemonetes* aus Plymouth als Mittel auf, aber bei der Form aus Zogajsko Blato und Lago di Castello als blosse Abweichung. Dagegen das Mittel 5·9, und 6·— der südlichen Formen befindet sich als Abweichung (Variante) der englischen Varietät. Wenn wir also die oben erwähnten, für einzelne Varietäten geltende Mittelwerte mit den Varianten vergleichen, welche einem Variationsumfange des gesammten Material's***) zugehören würden, sind wir zu der Behauptung berechtigt, dass die Varietäten-Mittelwerte progressiv alle mögliche Varianten (besonders die theoretischen: 5·9, 6·3, 6·5) des gesammten Variationsumfanges durchlaufen. Es stimmt dies auch mit den pro-

*) Wie tief verschiedene Lebens-Bedingungen in die Entwickelung und Morphologie eingreifen, beweist die Boas'sche Arbeit über den ungleichen Entwickelungsgang der Süss- und Salzwasser-Form. [2.]

**) Wenn wir nämlich die Form aus *Skutarri*-See als keine besonders verschiedene Localvarietät von der aus Zogajsko Blato bezeichnen wollen.

***) Die empirische Variationsreihe des totalen Materials wäre:

V:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f:	2,	18,	123,	376,	467,	524,	295,	55,	6.

gressiv zusammengestellten Localitäten (nämlich vom Norden nach Süden).*)

Während die Mittelwerte unserer 4 Varietäten, als ihre morphologischen Konstanten, untereinander verschieden sind, bleiben dagegen fast vollständig gleich ihre Variabilitätsindices (ε), welche *Duncker's* Anschauungen nach als Konstanten der physiologischen Reaktionsfähigkeit eines Merkmals bei seiner Anpassung an manigfaltige, biologische Elementarbedingungen aufzufassen sind. Der Übereinstimmungsgrad zwischen Indices, welche den vier verschiedenen Varietäten derselben Art angehören, ist unserer Arbeit nach keineswegs grösser, wie wir es vielleicht erwarten als der, welcher für zwei verschiedene Arten derselben Gattung giltig ist. *Palaemonetes varians* aus Plymouth besitzt nämlich für die Variation der Zahl der oberen Rostzalzähne $\varepsilon = 0{\cdot}8627$, während *Palaemonetes vulgaris* $\varepsilon = 0{\cdot}8145$ zeigt (10, pag. 624.) So kann man also bei *Palaemonetes* keinen Unterschied bemerken im Übereinstimmungsgrad der Indices für Varietäten derselben Art und der Indices für Arten derselben Gattung.**)

Mit diesen Verhältnissen hängt auch zusammen die Erscheinung, dass Variationsumfänge bei allen 4 unseren *Palaemonetes* Varietäten fast gleiche Zahl von Varianten besitzen (—6—), wenn auch Varianten

---

*) Unseren Berechnungen nach müssen im geographischen Gebiete auch Varietäten mit der Mittel-Variante *5* vorhanden sein, welche zwischen den nördlichen und südlichen *Palaemonetes*-Varietäten sich befinden. Es stimmen wirklich mit dieser Forderung die Angaben von Th. Barrois, welcher unsere Form in Nordfrankreich bei *Pas-de Calais* in Brackwasser fand. Schade, dass der Autor aus seinem grossen Beobachtungsmaterial für Beschreibung der Variation der Rostralzähne nur 30 Individuen gewählt hat [7].

Nach Barrois war das Rostrum einfach 21mal,
am Ende zweispitzig 9mal.

Die Zahl der oberen Rostralzähne betrug	4	5	6
	in 2 Ex.	20 Ex.	8 Ex.

Die der untern 2 in 27 Ex., 3 in 3 Exemplaren.

Dieses, wenn auch statistisch ganz ungenügendes Beobachtungsmaterial, spricht doch für Richtigkeit unserer Behauptung.

**) Diese Reaktionsfähigkeit ist ein für Art, resp. Varietät specifisches, aktives, inniges Grundcharakter. Wenn wir diesen Gedanken zu den oben erwähnten Sätzen anschliessen, gelangen wir zu einer wahrscheinlichen Annahme, dass eben im Schwanken dieser Reaktionsfähigkeit und dem entsprechend auch der ähnlichen Indices-Werte ein Moment zur möglichen Artveränderung enthalten und angedeutet sei.

eines Umfangs qualitativ ganz verschieden (und mit anderem Mittelwerte versehen) sind als die des anderen.

Von besonderem Interesse sind auch die *Asymmetriefactoren* (A). Während die Variation der nördlichen und südlichen Localformen verschiedene Typen (IV., V., II.) der verallgemeinerten Wahrscheinlichkeitskurve folgt, sind die Asymmetriefactoren ihren Zahlenwerten nach klein und *quantitativ* fast gleich (zufällig in unseren Beispielen); ihre qualitativen *Werte sind dagegen verschieden.* Die nördlichen Varietäten besitzen nämlich bei Variation der Zahl der oberen Rostralzähne negative Asymmetrie, was besagen soll, dass ihre Mittelwerte und die grössere Zahl der Abweichungen auf kleinere Varianten fällt, während die südlichen Local-Varietäten dagegen eine positive Asymmetrie aufweisen, d. h. sie enthalten ihre Mittelwerte und grössere Zahl von Abweichungen unter den grösseren (höheren) Varianten.

Auf unserer Konstruktion der Var.-Polygone ist dieser Umstand besonders gut zu betrachten: so bei Fig. β (— siehe Tafel I. —) steht die Schwerpunktsordinate (y_0) mit ihrem Fusspunkt (M) links (— negative Asymmetrie —) von der Maximalordinate (y_m) und ihrem Fusspunkt (A); dagegen auf Fig. γ) ist diese Stellung gerade umgekehrt (— positive Asymmetrie —).*)

VI.

Einige Schluss-Bemerkungen über die Variation der Zahl der unteren Rostralzähne bei Palaemonetes varians.

Weil alle Variationsverhältnisse dieses Merkmals, welches ganz unabhängig und quantitativ verschieden von den oberen Zähnen in der Zahl variirt (Siehe pag. 16.), qualitativ mit den Verhältnissen,

---

*) Es wäre eine höchst interessante Aufgabe nach Verschaffung eines grösseren, als des unseren auf 4 Beobachtungen hingewiesenen, statistisch-hinreichenden Vergleichungsmaterial näher zu verfolgen, ob vielleicht der Grund dieser Eigenthümlichkeit nicht in Zugehörigkeit der Var.-Kurven, α, β, γ, ... etc. als partialen Kurven zu einer einheitlichen (Siehe Anmerk. pag. 20, 24.), durch Summation einzelner Frequenzen entstandenen Totalkurve besteht, welche dann die Variation dieses Merkmals bei *Palaemonetes varians* (— ohne Rücksicht auf seine Lokalvarietäten —).aus seinem ganzen Verbreitungsgebiete beherrscht.

welche in vorigen Abschnitten mitgeteilt sind, übereinstimmen, wollen wir sie auf dieser Stelle nur in Gründzügen übersichtlich näher verfolgen. Aus Untersuchung der Variation der Zahl der unteren Rostralzähne können wir für unsere Localvarietäten folgende empirische Variations-Reihen zusammenstellen:

Die Reihe von Varianten und Frequenzen für *Palaemonetes varians aus Plymouth* ist:

V	:	0	1	2	3
f	:	3	276	630	6;

die empirische Maximalfrequenz gehöret der Variante 2. —

Für *Palaemonetes* aus *Lago di Castello* stellt sich die Reihe als folgt:

V	:	1	2	3	4
f	:	3	93	8	1;

da steht wieder die Maximalfrequenz empirisch bei der Variante 2.

Für *Palaemonetes*form aus *Zogajsko Blato* geltet die Reihe:

V	:	1	2	3	4	5	6*)
f	:	5	649	41	4	0	1

Die empirische Maximalfrequenz befindet sich bei Variante 2. —

Endlich die Variationsreihe für *Palaemonetes varians* aus *Skutarri*-See ist:

V	:	2	3
f	:	118	28

Es steht da die empir. Maximalfrequenz bei der Variante 2.

Auf Grund dieser Reihen habe ich folgende Hauptkonstanten der betreffenden Wahrscheinlichkeits-Kurven berechnet und ähnlich, wie im vorigen Abschnitt in eine Tabelle zusammengestellt.

---

*) Dieser Fall gehöret einer sehr seltenen Ausnahme; in der empir. Reihe steht auch vor 6 eine Variante mit Null-Frequenz. Dies ist eben das Exemplar No. 16. in den Textfiguren.

Var.-Konstanten		Localitäten			
Symbol	Name	Plymouth	Lago di Castello	Zogajsko Blato	Skutarri-See
M	Mittelwert	1·6984	2·0667	2·0686	2·1918
ε	Var. Index	0·4799	0·3720	0·3267	0·3937
A	Asymmetrie-Factor der K.	— 0·2654	+ 0·1766	+ 0·2596	+ 0·3811
	Typus der Var.-Kurve	I.	IV.	IV.	I.
β_1	Haupt-konstanten des Typus	0·1166	0·3228	1·3578	0·2733
β_2		2·6694	4·6486	8·6680	2·9430
F		— 1·0110	+ 2·3288	+ 7·2626	— 0·9389
n	Zahl. d. Indiv.	915	105	700	146

Mit Bezug auf frühere Resultate und Folgerungen sind besonders wichtig die Konstanten M, ε, A.

Die Mittelwerte (M) sind:

1. alle untereinander verschieden, wie auch nicht so bedeutend als bei den oberen Zähnen;

2. ihre Zahlenwerte vergrössern sich progressiv (übereinstimmend den Localitäten vom Norden zu Süden) und durchlaufen so von geringeren zu höheren die Varianten des Gesammt-Variationsumfanges; *)

*) Dieser wäre:

V :	0	1	2	3	4	5	6
f :	3	284	1490	83	5	0	1

3. sind sie untereinander durch ihre Abweichungen (= Varianten), so verbunden, dass sie durch diesen Umstand wieder die continuirliche morphologische Veränderung der Einzelvarietäten beweisen.

Die 4 Variabilitätsindices (ε) behaupten durch ihre allgemeine Übereinstimmung die Zugehörigkeit aller Varietäten derselben Art und unterstützen gleichfalls wieder die Annahme von ihrer theoretischen Bedeutung.

Damit steht auch die gleiche Zahl der (emp.) Varianten bei einzelnen Variationsumfängen (mit Ausnahme des letzten Fall's), nämlich 4 in Verbindung.

Endlich besitzen die Asymmetrieindices (A) für Plymouth'sche und Montenegrische Varietät fast gleiche Zahlenwerte. Gegen diesen ist die Asymmetrie des Albanischen und aus Skutarri See *Palaemonetes* klein. Der Unterschied besteht bei diesen allen (4) Asymmetriefactoren wieder in ihrer *Qualität*: nämlich, dass den südlichen Varietäten eine positive, den nördlichen eine negative asymmetrische Variation gehöret. Es sind hier also bei einem ganz selbständig variirenden Merkmal bei *Palaemonetes varians* dieselben qualitativen Verhältnisse angetroffen, die für ein anderes Merkmal giltig sind.

Gleich gut wie die theoretischen Konstanten erklären das die auf Taf. I. konstruirten, procentualischen emp. Var.-Polygone, nämlich die Fig. δ für Varietät aus Plymouth, Fig. ε, für die Form aus dem Albanersee (Lago di Castello), für Varietät aus Zogajsko Blato die Fig. ζ, und die Fig. ϑ für *Palaemonetes* aus Skutarri-See.

Litteratur.

1. Paul Mayer: „Carcinologische Mittheilungen". IX. Die Metamorphosen von Palaemonetes varians Leach. — in: Mitth. Zool. Stat. Neapel, II. B. 1881.

2. J. E. V. Boas: „Kleinere carcinologische Mittheilungen". 2. Ueber den ungleichen Entwickelungsgang der Salzwasser und der Süsswasserform von Palaemonetes varians. Zool. Jahrb. 1889. Abth. f. Syst. IV. Band.

3. A. Brožek: „Variačně-statistická zkoumání na Atyaëphyra Desmarestii (Joly) z jezera Skadarského. II. Část: Meristika a vnější organisace." In: „Věstník král. čes. spol. nauk." Praha. 1905. XII.

4. Ed. V. Martens: „Ueber einige Fische und Crustaceen der süssen Gewässer Italiens." In: Wiegmann's Arch. f. Nat. 23. Jhg. 1857.

5. G. Duncker: „Die Methode der Variationsstatistik." — Leipzig. 1899.

6. C. B. Davenport: „Statistical methods with special reference to biological variation." Second, revised edition. New-York. 1904.

7. Th. Barrois: „Note sur le Palaemonetes varians Leach, suivie de quelques considérations sur la distribution géographique de ce crustacé." In: „Bull. de la Soc. Zool. de France. 1886. XI.

8. Adriano Garbini: „Appunti di carcinologia veronese." Verona. 1895.

9. W. F. R. Weldon: „Palaemonetes varians in Plymouth." Journ. Mar. Biol. Assoc. Un. Kingd. N. S. Vol. I. 1890.

10. G. Duncker: „On variation of the rostrum in Palaemonetes vulgaris Herbst." In: The Amer. Nat. Vol. XXXIV. No. 404. 1900.

11. G. Duncker: „Wesen und Ergebnisse der variationsstatistischen Methode in der Zoologie." Verhandl. d. deutsch. zool. Ges. 1899.

Tafelerklärung.

Fig. α, β, γ, η. Procentualische, empirische (—) und theorotische (- - - -) Var.-Polygone über die Anzahl der oberen Rostralzähne bei Palaemonetes varians Leach aus dem Albaner-See (Lago di Castello) (α), Plymouth (β), Zogajsko Blato bei Ulcinj (γ) und aus Skutarri-See (η).

Fig. δ, ε, ζ, ϑ. Procentualische, empirische Var.-Polygone über die Anzahl der unteren Rostralzähne bei Palaemonetes varians aus Plymouth (δ), Albanersee (ε), Zogajsko Blato (ζ) und Skutarri-See (ϑ).

NB. Es bedeuten in diesen Diagramen:

M, Mittelwert;

A, Asymmetriefaktor;

y_o, die Ausgangs, y_c, die Schwerpunkts-, y_m, die Maximalordinate, der Var.-Kurve;

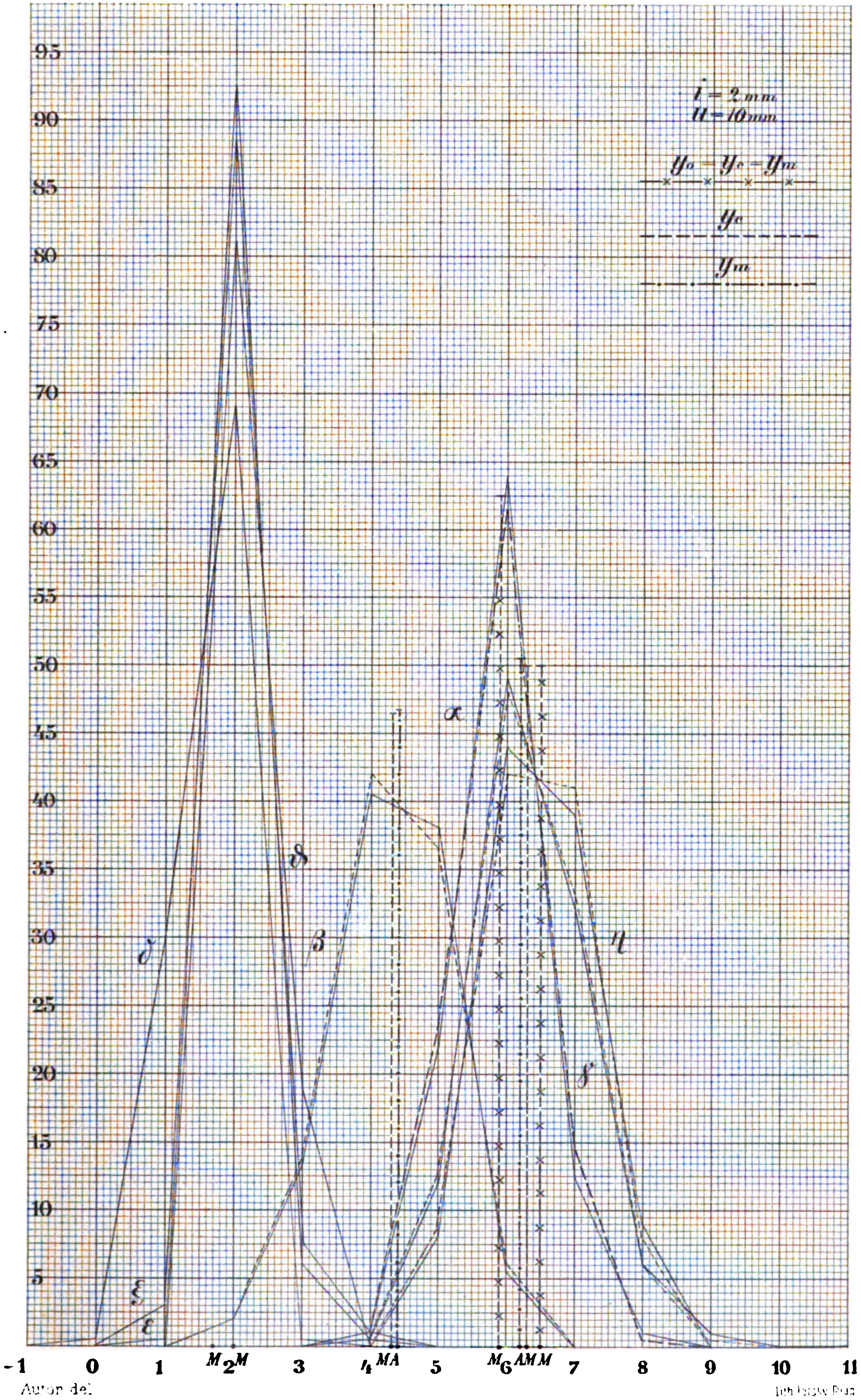
$i = 2\,mm$, Frequenzeneinheit;

$u = 10\,mm$, Varianteneinheit.

Die Zahlen der X-Achse, -1, 0, 1, 2 etc. bedeuten die Varianten (nämlich Zahl d. Zähne).



BROŽEK A: UEBER DIE VARIABILITÄT BEI PALAEMONETES VARIANS LEACH.



Autor del.

Lith. Farský, Praha

Sitzber. d. königl. böhm. Gesellsch. d. Wissenschaft. 1907. Mathemat.-naturwiss. Classe Nº 16.

XVII.

Transformationen der harmonischen Reihen S_{2n+1} und U_{2n}.

Von **Franz Rogel.**

Vorgelegt in der Sitzung den 11. October 1907.

Die bei der Auswertung zahlreicher bestimmter Integrale und in der Theorie der Gammafunction auftretenden harmonischen Reihen

$$S_{2n+1} = \sum_{\nu=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2n+1}} \text{ und } U_{2n} = \sum_{\nu=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}}{\nu^{2n}}$$

konnten bis jetzt nicht genau summiert werden und convergieren zudem noch sehr langsam.

Dieselben werden im Folgenden in Recursionsformeln durch rascher convergierende Reihen ersetzt. Die Umgestaltung wird mittels der Function $\log \sin z$, die sich auf zweierlei Art in convergente Reihen umsetzen lässt, bewirkt.

Es ist bekanntlich

$$-\lg 2 \sin \frac{z}{2} = \sum_{\nu=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\cos \nu z}{\nu}, \; 0 < z < 2\pi, \ldots \ldots (\mathfrak{Z})$$

$$= -\lg z + \sum_{\nu=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{1}{\nu} S_{2\nu} \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2\nu}, \; -2\pi < z < 2\pi, \ldots (\Upsilon)$$

daher

$$\sum_{\nu=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\cos \nu z}{\nu} = -\lg z - \sum_{\nu=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{1}{\nu} S_{2\nu} \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2\nu}, \quad 0<z<2\pi, \quad (1)$$

$$S_{2\nu} = \frac{(2\pi)^{2\nu}}{2(2\nu)!} B_{\nu}.$$

Durch Multiplication dieser Gleichung mit einer ganzen Function von z und Integration zwischen 0 und π oder $\frac{\pi}{2}$ lassen sich hieraus die mannigfachsten Beziehungen zwischen einer begrenzten Anzahl von S bezw. B und einer neuen Reihe von der Form

$$\mathfrak{S} = \sum_{1,2}^{\infty} A_{\nu} S_{2\nu} = \frac{1}{2} \sum_{1,2}^{\infty} \frac{(2\pi)^{2\nu}}{(2\nu)!} A_{\nu} B_{\nu}$$

ableiten. Die einfachsten Ausdrücke bei raschester Abnahme der Coefficienten A_{ν} ergeben sich durch wiederholtes Integrieren von (1) zwischen 0 und z und schliesslicher Substitution $z = \frac{\pi}{2}$, eine Operation, welche sich übrigens auch durch wiederholte Anwendung der vorgenannten ersetzen lässt.[1]

Schreibt man, um den Einfluss des Umstandes, dass (1) für die untere Integrationsgrenze $z = 0$ ungiltig ist, zu untersuchen

$$\sum_{1,2}^{\infty} \frac{\cos \nu z}{\nu} + \lg z - \sum_{1,2}^{\infty} \frac{1}{\nu} S_{2\nu} \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2\nu} = f(z),$$

so ist für alle

$$0 < z < 2\pi$$

$f(z) = 0$, hingegen für $z = 0$

$$f(0) = \sum_{1,2}^{\infty} \frac{1}{\nu} + \lg 0 = \lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{m} - \lg m\right)$$
$$= c = 0{,}5772\,1566\ldots,$$

[1] S. d. Verfassers „*Zur Theorie der höheren Integrale*"; Sitzgs.-Ber. d. Kgl. Böhm. Ges. d. Wiss., 1892, p. 185 ff.

daher

$$\int_0^z f(z)\,dz = \operatorname{Lim} \delta\Big(f(0) + f(\delta) + f(2\delta) + \ldots + f([n-1]\,\delta)\Big)$$
$$= \operatorname{Lim} \delta c = 0,$$

da

$$f(\delta) = f(2\delta) = \ldots = f(m\delta) = 0, \quad m\delta = \pi,$$

woraus auf die Zulässigkeit von $z = 0$ als untere Integrationsgrenze geschlossen werden kann.

Die $(2n-1)$- und $2n$-fache Integration von (1) zwischen 0 und z liefert nun die für

$$0 \leq z < 2\pi$$

giltigen Relationen

$$(-1)^{n+1} \sum_{\nu=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\sin \nu z}{\nu^{2n}} + \frac{S_3\, z^{2n-3}}{(2n-3)!} - \frac{S_5\, z^{2n-5}}{(2n-5)!} + \frac{S_7\, z^{2n-7}}{(2n-7)!} - +$$
$$\ldots + (-1)^n S_{2n-1}\, z = \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} (s_{2n-1} - \lg z) +$$
$$+ \sum_{\nu=1,2\ldots}^{\infty} \frac{(2\nu)!\, S_{2\nu}\, z^{2n+2\nu-1}}{\nu\,(2n+2\nu-1)!\,(2\pi)^{2\nu}}, \quad \ldots\ldots (2)$$

wo sich der linksseitige Teil für $n = 1$ auf die Sinusreihe reduciert,

$$(-1)^n \sum_{\nu=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\cos \nu z}{\nu^{2n+1}} + \frac{S_3\, z^{2n-2}}{(2n-2)!} - \frac{S_5\, z^{2n-4}}{(2n-4)!} + \frac{S_7\, z^{2n-6}}{(2n-6)!} - +$$
$$\ldots + (-1)^{n+1} S_{2n+1} = \frac{z^{2n}}{(2n)!} (s_{2n} - \lg z)$$
$$+ \sum_{\nu=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{(2\nu)!\, S_{2\nu}\, z^{2n+2\nu}}{\nu\,(2n+2\nu)!\,(2\pi)^{2\nu}}, \quad \ldots\ldots (3)$$

$$s_r = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r}, \quad s_0 = 0.$$

Wird hierin

$$z = \frac{\pi}{2}$$

gesetzt, so gehen mit Rücksicht auf

$$(-1)^n \sum_{1,2}^{\infty} \frac{\cos\frac{\nu\pi}{2}}{\nu^{2n+1}} + (-1)^{n+1} S_{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{2^{4n+1}+2^{2n}-1}{2^{4n+1}} S_{2n+1},$$

$$(-1)^{n+1} \sum_{1,2}^{\infty} \frac{\sin\frac{\nu\pi}{2}}{\nu^{2n}} = (-1)^{n+1} U_{2n}$$

die gesuchten Beziehungen zwischen den S_{2n+1} und U_{2n} einerseits und den bekannten Summen S_{2n} andererseits hervor:

$$(-1)^{n+1} U_{2n} + \frac{S_3}{(2n-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-3} - \frac{S_5}{(2n-5)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-5} + - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{S_{2n-3}}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + (-1)^n S_{2n-1}\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{1}{(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}\left(s_{2n-1} - \lg\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\sum_{\nu=2,4,6}^{\infty} \frac{S\nu}{\binom{2n+\nu-1}{2n}4^\nu}\right), \quad (4)^{*)}$$

$$\frac{S_3}{(2n-2)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2} - \frac{S_5}{(2n-4)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-4} + - \ldots + (-1)^n \frac{S_{2n-1}}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + (-1)^{n+1}\frac{2^{4n+1}+2^{2n}-1}{2^{4n+1}} S_{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}\left(s_{2n} - \lg\frac{\pi}{2} + \frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{S_\nu}{\binom{2n+\nu}{2n+1}4^\nu}\right). \quad (5)$$

Die Substitution $z = \pi$ führt nur zu den S_{2n+1} und zu den minder rasch convergierenden Reihen

$$\sum^{\infty} \frac{S_\nu}{\binom{2n+\nu}{2n+1}2^\nu}.$$

---

*) Bei $n = 1$ reduciert sich der linksseitige Ausdruck auf U_2.

Die Convergenz der neuen Reihen in (4) und (5) kann noch dadurch verbessert werden, dass man setzt

$$\sum_{\nu=2,4\ldots}^{\infty} \frac{S_\nu}{\binom{\nu+r}{\nu} 4^\nu} = \sum_{\nu=2,4\ldots}^{\infty} \frac{S_\nu - 1}{\binom{\nu+r}{\nu} 4^\nu} + R, \quad \ldots . (6)$$

wo

$$R = \sum_{\nu=2,4\ldots}^{\infty} \frac{1}{\binom{\nu+r}{\nu} 4^\nu}$$

für $\nu = 2n$ und $2n-1$ am einfachsten, wie folgt, summiert wird.

In der für jedes m und $x^2 < 1$ geltenden Entwicklung

$$(1+x)^m - \sum_{\tau=0,1}^{\tau=k} \binom{m}{\tau} x^\tau = \sum_{\sigma=1,2\ldots}^{\infty} \binom{m}{k+\sigma} x^{k+\sigma} =$$

$$= \frac{m-k}{k+1} \binom{m}{k} \sum_{\sigma=1,2\ldots}^{\infty} (-1)^{\sigma-1} \cdot$$

$$\cdot \frac{(k-m+1)(k-m+2)\ldots\ldots(k-m+\sigma-2)(k-m+\sigma-1)}{(k+2)(k+3)\ldots\ldots(k+\sigma-1)(k+\sigma)} x^{k+\sigma}$$

erscheint, wenn beiderseits durch $m-k$ dividiert und $m=k$ gesetzt wird, der linksseitige Ausdruck unter der Form $\frac{0}{0}$, dessen Auswertung mit Beachtung von

$$\frac{d}{dm} \binom{m}{\tau}_{m=k} = \binom{k}{\tau} (s_k - s_{k-\tau})$$

$$(1+x)^k \lg(1+x) - \sum_{\tau=0,1}^{\infty} \binom{k}{\tau} (s_k - s_{k-\tau}) x^\tau =$$

$$= \frac{1}{k+1} \sum_{\sigma=1,2}^{\infty} (-1)^{\sigma-1} \frac{x^{k+\sigma}}{\binom{k+\sigma}{\sigma-1}}$$

oder wenn $k-1$ für k geschrieben wird

$$\sum_{\sigma=0,1,2}^{\infty} (-1)^\sigma \frac{x^\sigma}{\binom{k+\sigma}{\sigma}} =$$

$$= \frac{k}{x^k}\left[(1+x)^{k-1} \lg(1+x) - \sum_{\tau=0,1}^{\tau=k-1} \binom{k-1}{\tau} (s_{k-1} - s_{k-\tau-1})\, x^\tau\right]. \quad (7)$$

$$x^2 < 1, \quad k \geqq 1$$

ergiebt. Vertauscht man x mit $-x$

$$\sum_{\sigma=0,1,2}^{\infty} \frac{x^\sigma}{\binom{k+\sigma}{\sigma}} =$$

$$= \frac{(-1)^k k}{x^k}\left[(1-x)^{k-1} \lg(1-x) - \sum_{\tau=0,1}^{\tau=k-1} (-1)^\tau \binom{k-1}{\tau} \cdot\right.$$

$$\left. \cdot (s_{k-1} - s_{k-\tau-1})\, x^\tau\right], \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

subtrahiert (7) von (8) und multipliciert beiderseits mit x, so geht

$$\sum_{\sigma=1,3,5}^{\infty} \frac{x^{\sigma+1}}{\binom{k+\sigma}{\sigma}} \frac{k}{2x^{k-1}}\left[-(1+x)^{k-1} \lg(1+x) + \right.$$

$$+ (-1)^k (1-x)^{k-1} \lg(1-x)$$

$$\left. + \sum_{\tau=0,1,2}^{\tau=k-1} \binom{k-1}{\tau} (1 + [-1]^{k+\tau+1}) (s_{k-1} - s_{k-\tau-1})\, x^\tau\right]. \quad . \quad (9)$$

hervor, woraus für $\sigma = 2\nu - 1$, $x = \frac{1}{4}$, $k = 2n$ und $k = 2n + 1$

$$\frac{1}{n} R_{k=2n} = -5^{2n-1} \lg\frac{5}{4} + 3^{2n-1} \lg\frac{3}{4}$$

$$+ 2\sum_{\tau=1,3,5}^{\tau=2n-1} \binom{2n-1}{\tau} (s_{2n-1} - s_{2n-\tau-1})\, 4^{2n-\tau-1},$$

$$\frac{2}{2n+1} R_{k=2n+1} = -5^{2n} \lg \frac{5}{4} - 3^{2n} \lg \frac{3}{4}$$
$$+ 2\sum_{\tau=0,2,4}^{\tau=2n} \binom{2n}{\tau} (s_{2n} - s_{2n-\tau}) 4^{2n-\tau}$$

resultiert, was mittels (6) in (4) und (5) eingeführt schliesslich

$$(-1)^{n+1} U_{2n} + \frac{S_3}{(2n-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-3} - \frac{S_5}{(2n-5)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-5} + - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} \frac{S_{2n-3}}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + (-1)^n S_{2n-1}\frac{\pi}{2} =$$
$$= \frac{1}{(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}\Bigg\{ s_{2n-1} + 2\sum_{\tau=1,3}^{\tau=2n-1}\binom{2n-1}{\tau}(s_{2n-1} - s_{2n-\tau-1}) .$$
$$. 4^{2n-\tau-1} - \lg\frac{\pi}{2} - 5^{2n-1}\lg\frac{5}{4} + 3^{2n-1}\lg\frac{3}{4}$$
$$+ \frac{1}{n}\sum_{\nu=2,4}^{\infty} \frac{S_\nu - 1}{\binom{2n+\nu-1}{2n} 4^\nu}\Bigg\} \quad \ldots\ldots (10)$$

$$\frac{S_3}{(2n-2)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2} - \frac{S_5}{(2n-4)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-4} + - \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{S_{2n-1}}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + (-1)^{n+1}\frac{2^{4n+1} + 2^{2n} - 1}{2^{4n+1}} S_{2n+1}$$
$$= \frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}\Bigg\{ s_{2n} + 2\sum_{\tau=0,2,4}^{\tau=2n}\binom{2n}{\tau}(s_{2n} - s_{2n-\tau}) 4^{2n-\tau} - \lg\frac{\pi}{2}$$
$$- 5^{2n}\lg\frac{5}{4} - 3^{2n}\lg\frac{3}{4} + \frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{S_\nu - 1}{\binom{2n+\nu}{2n+1}4^\nu}\Bigg\} \quad ..(11)$$

ergiebt.

Der Unterschied der Reihen S_r, U_r und der rechter Hand in (10) und (11) auftretenden unendlichen Reihen $\mathfrak{S}_r$ bezüglich Raschheit

der Convergenz ist ganz erheblich. So beinflusst das 100. Glied von S_r noch die 6. Dezimalstelle, während das 3. Glied von $\frac{1}{2}\mathfrak{S}_3$

$$\frac{S_6 - 1}{788128} = 0,_7 2,$$

und das 4. Glied

$$\frac{S_9 - 1}{17694720} = 0,_9 2$$

. . . .

ist. Um S_3 auf 8 Decimalen zu berechnen, wird es daher genügen, von $\mathfrak{S}_3$ nur 4 Glieder in Anspruch zu nehmen.

Die Gleichungen (2) und (3) können noch zusammengezogen werden in

$$\sum_{\nu=1,2}^{\infty} \frac{1}{\nu^m} \sin\left(\nu z - \frac{m\pi}{2}\right) =$$

$$= S_3 \frac{z^{m-3}}{(m-3)!} - S_5 \frac{z^{m-5}}{(m-5)!} + - \cdots + \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} S_{m-1} \frac{z}{1!} \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}} S_m \end{cases}$$

$$- \frac{z^{m-1}}{(m-1)!} (s_{m-1} - \lg z) - 2 \frac{z^{m-1}}{m!} \sum_{\varkappa=2,4}^{\infty} \frac{S}{\binom{m+\varkappa-1}{m}} \left(\frac{z}{2\pi}\right), \quad \ldots \quad (12)$$

$$0 \leqq z < 2\pi,$$

wo -1 den Exponenten $\frac{1}{2}m$ oder $\frac{1}{2}(m-1)$ erhält, jenachdem m *gerade* oder *ungerade* ist.

Durch die Einsetzung

$$z = \pi - x$$

(oder $z = \pi + x$) entsteht linker Hand die trigonometrische Reihe

$$\sum_{\nu=1,2}^{\infty} \frac{1}{\nu^m} \sin\left[\left(\nu - \frac{m}{2}\right)\pi - \nu x\right],$$

während der Ausdruck rechter Hand wegen

$$\lg z = \lg \pi + \lg \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) = \lg \pi - \sum_{\omega=1,2}^{\infty} \frac{1}{\omega}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{\omega}, \quad |x| < \pi,$$

in eine reine Potenzreihe übergeht.

Eine *independente* Darstellung der S_{2n+1} findet sich durch Multiplication von

$$\sum_{\nu=1,2}^{\infty} \frac{\sin \nu z}{\nu^{2n+1}} = (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n+1}}{2(2n+1)!} \mathbf{B}\left(\frac{z}{2\pi}, \; 2n+1\right), \quad 0 \leqq z \leqq 2\pi,$$

worin $\mathbf{B}$ die Bernoulli'sche Function $(2n+1)$-ter Ordnung bedeutet, mit

$$\sum_{\mu=1,2}^{m} \sin \mu z = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \sin mz$$

$$- \frac{\sin (2m+1)\frac{z}{2} - \sin (2m-1)\frac{z}{2}}{4 \sin \frac{z}{2}} \operatorname{ctg} \frac{z}{2}, \quad \ldots \text{(♎)}$$

und Integration des Produktes bezüglich z zwischen ν und π. Zufolge des Satzes

$$\operatorname*{Lim}_{p=\infty} \int_0^{\gamma} \frac{\sin pv}{v} F(v)\, dv = \frac{\pi}{2} F(0), \quad \gamma > 0 \ldots\ldots\ldots \text{(♊)}$$

verschwinden bei unendlich gross werdendem m alle Glieder von (♎), die m enthalten, desgleichen auf der linken Seite alle Glieder

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin \nu z}{\nu^{2n+1}} \sin \mu z\, dz, \quad \mu \neq \nu,$$

und es ergibt sich

$$S_{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n+1)!} \int_0^{\pi} \mathbf{B}\left(\frac{z}{2\pi}, \; 2n-1\right) \operatorname{ctg} \frac{z}{2}\, dz.^{1)} \quad (13)$$

$$n \geqq 1.$$

[1]) Mittels Integration durch Teile geht dieses Integral in das von Schläfli auf anderem Wege gefundene über.

Eine analoge Entwicklung der U_{2n} wird erhalten durch Multiplication von

$$\sum_{\lambda=1,3}^{\infty}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\frac{\sin\lambda z}{\lambda^{2n}}=\frac{(-1)^{n-1}}{2(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}\mathsf{E}\left(\frac{2z}{\pi},\,2n-1\right),$$

$$-\frac{\pi}{2}\leqq z\leqq+\frac{\pi}{2},$$

worin **E** die Euler'sche *Function erster Art*, $(2n-1)$-ter Ordnung[2]) bezeichnet, mit

$$\sum_{\mu=1,3}^{m}\sin\mu z=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{z}{2}-\operatorname{ctg}z\right)$$

$$-\frac{\sin(2m+1)\frac{z}{2}-\sin(2m-1)\frac{z}{2}}{4\sin\frac{z}{2}}\operatorname{ctg}\frac{z}{2}$$

$$+\frac{\sin(m+1)z-\sin(m-1)z}{4\sin z}\operatorname{ctg}z\,\ldots\ldots\ldots\quad(13)$$

und Integration bezüglich z zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$.

Zufolge ([illegible]) verschwinden wieder alle m enthaltenden Glieder, wenn m unendlich gross wird, ferner ist, da λ und μ *ungerade* sind,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\lambda z}{\lambda^{2n}}\sin.\mu z\,dz=\begin{cases}\frac{\pi}{4}, & \lambda=\mu,\\ 0, & \lambda\neq\mu,\end{cases}$$

endlich

$$\operatorname{ctg}\frac{z}{2}-\operatorname{ctg}z=\operatorname{cosec}z,$$

somit

$$U_{2n}=\frac{(-1)^{n-1}}{2(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathsf{E}\left(\frac{2z}{\pi},\,2n-1\right)\operatorname{cosec}z\,dz.\quad(14)$$

---

[2]) S. d. Verf. „*Theorie der Euler'schen Functionen*", Sitzgs.-Ber. d. Kgl. Böhm. Gesellsch. d. Wissensch., Prag 1893, XXIII p. 51. Formel 120.

Bemerkenswerte Beziehungen gehen noch durch Elimination der trigonometrischen Reihen aus (2) und (3) hervor. Setzt man zu diesem Behufe $z = \pi + x$ und dann $z = \pi - x$, addiert die aus (2) und subtrahiert die aus (3) hervorgehenden Gleichungen, so ergiebt sich, wenn noch

$$\left(1+\frac{x}{\pi}\right)^r + \left(1-\frac{x}{\pi}\right)^r = 2\varphi(r)$$

$$\left(1+\frac{x}{\pi}\right)^r - \left(1-\frac{x}{\pi}\right)^r = 2\psi(r)$$

eingeführt wird,

$$\frac{S_3\,\varphi(r-3)}{(r-3)!\,\pi^2} - \frac{S_5\,\varphi(r-5)}{(r-5)!\,\pi^4} + \frac{S_7\,\varphi(r-7)}{(r-7)!\,\pi^6} \cdots + (-1)^{\frac{r}{2}} \frac{S_{r-1}\,\varphi(1)}{1!\,\pi^{r-2}} =$$

$$= s_{r-1}\frac{\varphi(r-1)}{(r-1)!} - \frac{1}{2}\frac{\lg\pi}{(r-1)!}\cdot\left[\left(1+\frac{x}{\pi}\right)^{r-1}\lg\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\right.$$

$$\left. + \left(1-\frac{x}{\pi}\right)^{r-1}\lg\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\right] + \frac{2}{r!}\sum_{\omega=2,4}^{\infty}\frac{S_\omega\,\varphi(r+\omega-1)}{\binom{r+\omega-1}{r}2^\omega} \quad .. \ (15)$$

r gerade,

$$\frac{S_3\,\psi(r-3)}{(r-3)!\,\pi^2} - \frac{S_5\,\psi(r-5)}{(r-5)!\,\pi^4} - \frac{S_7\,\psi(r-7)}{(r-7)!\,\pi^6} \cdots + (-1)^{\frac{r-1}{2}} \frac{S_{r-2}\,\varphi(2)}{2!\,\pi^{r-3}} =$$

$$= s_{r-1}\frac{\psi(r-1)}{(r-1)!} - \frac{1}{2}\frac{\lg\pi}{(r-1)!}\cdot\left[\left(1+\frac{x}{\pi}\right)^{r-1}\lg\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\right.$$

$$\left. - \left(1-\frac{x}{\pi}\right)^{r-1}\lg\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\right] + \frac{2}{r!}\sum_{\omega=2,4}^{\infty}\frac{S_\omega\,\psi(r+\omega-1)}{\binom{r+\omega-1}{r}2^\omega} \quad .. \ (16)$$

r ungerade.

$$\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{x}{\pi}\right)^{r-1}\lg\left(1+\frac{x}{\pi}\right) \pm \left(1-\frac{x}{\pi}\right)^{r-1}\lg\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\right] =$$

$$= \mp \sum_{\sigma=\begin{cases}2,4..\\1,3..\end{cases}}^{\infty} \left[\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma-1}\binom{r-1}{1} + \frac{1}{\sigma-2}\binom{r-1}{2}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sigma-3}\binom{r-1}{3} + \cdots\right]\left(\frac{x}{\pi}\right)^\sigma, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (17)$$

wo dem *oberen* Vorzeichen die *geraden*, dem *unteren* die *ungeraden* Indices entsprechen.

Zu den in (15) und (16) enthaltenen unendlichen Reihen muss jedoch bemerkt werden, dass Entwicklungen nach den φ und ψ auf unendlich viele Arten bewirkt werden können. Dieselben wurden vom Verfasser in seinen „*Trigonometrischen Entwicklungen*“ (Sitzgs. Ber. d. Kgl. Böhm. Ges. d. Wiss., Prag 1892) und in „*Uiber eine besondere Art von Reihen*“, ebenda 1893, XXXIII, eingehend untersucht.

Bei Einführung von

$$T_r = \sum_{\omega=1,3} \frac{1}{\omega^r} = \left(1 - \frac{1}{2^r}\right) S_r, \quad V_r = \sum_{\omega=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^{\omega-1}}{\omega^r} = \left(1 - \frac{1}{2^{r-1}}\right) S_r,$$

$$V_1 = \log 2$$

kommen Entwicklungen zu Stande, die insoferne einfacher sind, als sie keine logarithmische Functionen enthalten. Es besteht

$$-\lg 2 \cos \frac{u}{2} =$$

$$\sum_{\nu=1,2}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\cos \nu u}{\nu} = \lg 2 + \sum_{1.2}^{\infty} \frac{1}{\nu} T_{2\nu} \left(\frac{u}{\pi}\right)^{2\nu}, \quad 0 \leqq u < \pi,$$

woraus durch eine $(2n-1)$— und $2n$-malige Integration bezüglich u zwischen 0 und u hervorgeht:

$$(-1)^n \sum_{\nu=1,2}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{\sin \nu u}{\nu^{2n}} = V_3 \frac{u^{2n-3}}{(2n-3)!} - V_5 \frac{u^{2n-5}}{(2n-5)!} + - \ldots$$

$$+ (-1)^n V_{2n-1} \frac{u}{1!} - \lg 2 \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$-2 \frac{\pi^{2n-1}}{(2n)!} \sum_{\nu=1,2}^{\infty} \frac{T_{2\nu}}{\binom{2n+2\nu-1}{2n}} \left(\frac{u}{\pi}\right)^{2n+2\nu-1}, \ldots \quad (18)$$

$$(-1)^{n-1}\sum_{\nu=1,2}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{\cos \nu u}{\nu^{2n+1}} = V_3\frac{u^{2n-2}}{(2n-2)!} - V_5\frac{u^{2n-4}}{(2n-4)!} + - \ldots$$

$$+ (-1)^n V_{2n-1}\frac{u^2}{2!} + (-1)^{n+1} V_{2n+1} - \lg 2\,\frac{u^{2n}}{(2n)!}$$

$$-2\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}\sum_{\nu=1,2}^{\infty}\frac{T_{2\nu}}{\binom{2n+2\nu-1}{2n+1}}\left(\frac{u}{\pi}\right)^{2n+2\nu}, \ldots \quad (19)$$

$$0 \leqq u < \pi.$$

Hierin $u = \frac{\pi}{2}$ gesetzt, ergiebt, wenn V_1 statt $\lg 2$ geschrieben wird,

$$(-1)^{n-1} U_{2n} - \frac{V_1}{(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1} + \frac{V_3}{(2n-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-3}$$

$$-\frac{V_5}{(2n-5)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-5} + - \ldots + (-1)^n V_{2n-1}\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{2}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}\sum_{\nu=1,2}^{\infty}\frac{T_{2\nu}}{\binom{2n+2\nu-1}{2n}2^{2\nu}}, \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

$$-\frac{V_1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} + \frac{V_3}{(2n-2)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2} - \frac{V_5}{(2n-4)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-4} + \ldots$$

$$+ (-1)^n\frac{V_{2n-1}}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + (-1)^{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)V_{2n+1} =$$

$$= \frac{2}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}\sum_{\nu=1,2}^{\infty}\frac{T_{2\nu}}{\binom{2n+2\nu}{2n+1}2^{2\nu}} \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Wird in (18), (19) $u = \frac{\pi}{2} + x$ und $u = \frac{\pi}{2} - x$ genommen und werden die aus (18) hervorgehenden Gleichungen addiert, jene aus (19) subtrahiert und

$$\left(1 + \frac{x}{\pi : 2}\right)^r + \left(1 - \frac{x}{\pi : 2}\right)^r = 2\varphi'(r),$$

$$\left(1 + \frac{x}{\pi : 2}\right)^r - \left(1 - \frac{x}{\pi : 2}\right)^r = 2\psi'(r)$$

gesetzt, so kommt

$$\sum_{\omega=1,3}^{\infty}(-1)^{\frac{\omega-1}{2}}\frac{\cos\omega x}{\omega^{2n}}=\frac{\pi}{2}V_{2n-1}\frac{\varphi'(1)}{1!}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3}V_{2n-3}\frac{\varphi'(3)}{3.}+-\ldots$$

$$+(-1)^{n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-3}V_{3}\frac{\varphi'(2n-3)}{(2n-3)!}+(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}V_{1}\frac{\varphi'(2n-1)}{(2n-1)!}$$

$$+(-1)^{n+1}2\frac{\pi^{2n-1}}{(2n)!}\sum_{\nu=1,2}^{\infty}\frac{T_{2\nu}}{\binom{2n+2\nu-1}{2n}}\varphi'(2n+2\nu-1)$$

$$-\frac{\pi}{2}<x<+\frac{\pi}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (22)$$

$$\sum_{\omega=1,3}^{\infty}(-1)^{\frac{\omega-1}{2}}\frac{\sin\omega x}{\omega^{2n+1}}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2}V_{2n-1}\frac{\psi'(2)}{2!}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4}V_{2n-3}\frac{\psi'(4)}{4!}+-\ldots$$

$$+(-1)^{n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2}V_{3}\frac{\psi'(2n-2)}{(2n-2)!}+(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}V_{1}\frac{\psi'(2n)}{(2n)!}$$

$$+(-1)^{n+1}2\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}\sum_{\nu=1,2}^{\infty}\frac{T_{2\nu}}{\binom{2n+2\nu}{2n+1}}\psi'(2n+2\nu)$$

$$-\frac{\pi}{2}<x<+\frac{\pi}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (23)$$

Für $x=0$ geht aus (22) noch hervor, beachtend, dass $\varphi'(r)_0=1$,

$$U_{2n}=\frac{\pi}{2}\frac{V_{2n-1}}{1!}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3}\frac{V_{2n-3}}{3!}+\left(\frac{\pi}{2}\right)^{5}\frac{V_{2n-5}}{5!}-+\ldots$$

$$+(-1)^{n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-3}\frac{V_{3}}{(2n-3)!}+(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}\frac{V_{1}}{(2n-1)!}$$

$$+(-1)^{n+1}2\frac{\pi^{2n-1}}{(2n)!}\sum_{\nu=1,2}^{\infty}\frac{T_{2\nu}}{\binom{2n+2\nu-1}{2n}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (24)$$

XVIII.

Ueber eine Anwendung der elliptischen Funktionen auf die Zahlentheorie.

Von K. Petr.

Vorgelegt in der Sitzung vom 11. Oktober 1907.

Diese kurze Arbeit verfolgt den Zweck die Resultate von Dirichlet in bezug auf die Klassenanzahl der binären quadratischen Formen (bei negativer Diskriminante D) aus der Theorie der elliptischen Funktionen abzuleiten.

Die Dirichlet'schen Methoden beruhen, wie bekannt, hauptsächlich in der Untersuchung der Reihen

$$(a) \qquad \sum_x \sum_y \frac{1}{(ax^2 + bxy + cy^2)^{1+\varrho}}, \qquad \varrho > 0$$

in der Umgebung des Punktes $\varrho = 0$, wo die durch jene Reihen definierten Funktionen einen einfachen Pol besitzen. Poincaré hat in der Abhandlung „Sur les invariants arithmétiques" (Journ. f. r. und ang. Math., Bd. 129, Seite 89) gezeigt, dass man mit Vorteil statt der Reihen (a) die Reihen von der Form

$$(b) \qquad \sum_x \sum_y q^{ax^2 + bxy + cy^2} \qquad |q| < 1$$

benutzen kann und hat, an den Dirichlet'schen Methoden wesentlich festhaltend, die Dirichlet'schen Sätze über Klassenanzahlen bei $D < 0$ mit Hilfe der elliptischen Funktionen abgeleitet.

Die weit ausgebildete Theorie der elliptischen Funktionen erlaubt uns, im Falle $D < 0$ eine noch einfachere Darstellung, bei welcher die genialen Methoden Dirichlet's vollständig entbehrt werden können. Bei dieser Darstellung waren mir vom grössten Nutzen die Abhandlungen von H. Weber (Zahlentheoretische Untersuchungen aus dem Gebiet der elliptischen Funktionen, Nachrichten von der Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Seite 46, 138, 245), in welchen überhaupt alles, was dazu notwendig war, zusammengestellt ist.

I.

Zuerst werde ich einige bekannte, auf Zahlentheorie und elliptische Funktionen sich beziehende Sätze und Bezeichnungen ins Gedächtnis rufen.

Was die Zahlentheorie anbelangt, so folge ich vollständig der zitierten Abhandlung von H. Weber. Die quadratische Form wird in der Form

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

geschrieben, die Discriminante mit $D = b^2 - 4ac$ bezeichnet. Immer ist entweder $D \equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod 4$. Im folgenden wird stets die Voraussetzung gemacht, *dass D eine Stammdiskriminante ist* (dass nämlich D nicht ein Produkt einer Quadratzahl mit einer Diskriminantenzahl ist).

Das Legendre-Jacobische Symbol $\left(\frac{m}{n}\right)$ wird l. c. im allgemeineren Sinne und bei veränderter Bezeichnung gebraucht. Es wird nämlich festgesetzt

(1) $$(D, n)(D, n') = (D, nn'),$$

(2) $$(D, 1) = 1, \qquad (D, 0) = 0,$$

(3) $(D, p) = 0$, wenn die Primzahl p in D aufgeht,

(4) $(D, p) = \left(\frac{D}{p}\right)$, wenn p eine ungerade und nicht in D enthaltene Primzahl ist,

(5) $(D, 2) = \left(\frac{2}{D}\right) = (-1)^{\frac{D^2-1}{8}}$, wenn D ungerade ist,

(6) $(D, -1) = +1$, wenn $D > 0$,
$(D, -1) = -1$, wenn $D < 0$.

Für die so definierten Zahlen gelten folgende Sätze (siehe WEBER, l. c.)

$$(D,\ n)\,.\,(D',\ n) = (DD',\ n), \tag{7}$$

$$(D,\ n) = (D,\ n'),\ \text{wenn}\ n \equiv n' \bmod D. \tag{8}$$

Aus der Theorie der quadratischen Formen werde ich nur den folgenden Satz voraussetzen: Die Anzahl der Darstellungen einer Zahl N durch die Repräsentanten aller Klassen der positiven Formen von der Diskriminante D (D eine negative Stammdiskriminante) ist

$$2\sum_d (D,\ d); \tag{9}$$

d durchläuft in dieser Summe alle Teiler von N. Dabei sind die Darstellungen durch die Form $x^2 + y^2$, resp. durch die Form $x^2 + xy + y^2$ mit dem Gewichte $\frac{1}{2}$, resp. $\frac{1}{3}$ in Rechnung zu nehmen.

Aus diesem Satze folgt sofort die Identität (wo $D < -4$ wie immer im folgenden vorausgesetzt wird),

$$\sum_{Kl.}\sum_{x,y} q^{ax^2+bxy+cy^2} = 2\sum_N q^N \left(\sum_d (D,d)\right) + h\ ;\quad |\,q\,| < 1, \tag{10}$$
$$x, y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots;$$
$$N = 1,\ 2,\ 3\ \ldots$$

Das erste Summenzeichen links bezieht sich auf Repräsentanten $ax^2 + bxy + cy^2$, $a'x^2 + b'xy + c'y^2, \ldots$ aller Klassen der positiven quadratischen Formen der Diskriminante D. Das zweite Summenzeichen rechts hat dieselbe Bedeutung wie in (9); h bedeutet die Anzahl der Klassen bei der Diskriminante D.

Die Thetafunktionen von den Charakteristiken (1, 1), (1, 0) (0, 1), (0, 0) sollen mit $\Theta(v)$, $\Theta_1(v)$, $\Theta_2(v)$, $\Theta_3(v)$ bezeichnet werden. Es bedeutet also

$$\Theta_3(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \cos 2n\pi v,$$

$$q = e^{\pi i \tau}, \qquad |\,q\,| < 1.$$

Besondere Wichtigkeit besitzen für uns die Formeln für die Transformation

$$\left(\tau, -\frac{1}{\tau}\right)$$

dieser Funktionen. Es sind das, wie bekannt, folgende Formeln

$$\Theta\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{i\sqrt{i}}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\, \Theta(v, \tau), \tag{11}$$

$$\Theta_3\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\, \Theta_3(v, \tau); \tag{12}$$

$\sqrt{\tau}$, $\sqrt{i}$, werden in bekannter Weise eindeutig bestimmt. Aus der Formel (12) können wir nach Kronecker*) leicht eine für uns wichtige Beziehung ableiten. Setzen wir

$$\tau_1 = -\frac{1}{\tau},$$

so können wir jene Formel folgendermassen schreiben

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau k^2 + 2k\pi i v} = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}}\, e^{\pi i v^2 \tau_1} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau_1 k^2 - 2k\pi i v}, \tag{12'}$$

oder auch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau k^2 - 2k\pi i v} = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}}\, e^{\pi i v^2 \tau_1} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau_1 k^2 + k\pi i v}. \tag{12''}$$

Wenn wir die erste dieser Formeln auf

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau (am^2 + bmn)}$$

anwenden (indem wir τ, resp. v mit $a\tau$, resp. $\frac{1}{2}\, b\tau n$ ersetzen), so haben wir

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau (am^2 + bmn)} = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{a\tau}} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i}{a}\left(\tau_1 m^2 + bmn - \frac{1}{4}\tau b^2 n^2\right)}. \quad a > 0.$$

Durch Substitution dieser Identität in die Doppelreihe folgt sofort (bei $D < 0$)

---

*) Zur Theorie der ellipt. Functionen, Sitzb. der k. preuss. Akad. d. Wiss. im Jahre 1883, Seite 761.

$$(13)\quad \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\tau(am^2+bmn+cn^2)} = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{a\tau}} \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i}{a}\left(\tau_1 m^2+bmn-\frac{\tau}{4}Dn^2\right)}.$$

Wenn wir ähnlich (12″) auf die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i}{a}\left(-\frac{\tau}{4}Dn^2+bmn\right)}$$

anwenden und das Resultat in die rechte Seite von (13) substitutieren, so erhalten wir

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\tau(am^2+bmn+cn^2)} = \frac{i}{\tau\sqrt{-\frac{D}{4}}} \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{4\pi i\tau_1}{-D}(am^2+bmn+cn^2)},$$

oder bei ein wenig veränderter Bezeichnungsweise

$$(14)\quad \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i\tau}{-D}(am^2+bmn+cn^2)} = \frac{i\sqrt{-D}}{\tau} \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\tau_1(am^2+bmn+cn)}$$

Endlich sei noch folgende Reihenentwickelung aus der Theorie der elliptischen Funktionen angeführt,

$$(15)\quad \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} = \pi\cot\pi v + 4\pi\sum_{1}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin 2m\pi v.$$

Für die Funktion $\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}$ gilt in Folge von (11) die Transformationsformel

$$(16)\quad \frac{\Theta'(v\tau,\tau)}{\Theta(v\tau,\tau)} + 2v\pi i = \frac{1}{2}\,\frac{\Theta'(v,\tau_1)}{\Theta(v,\tau_1)}.$$

II.

Um die Reihen (10) aus der Theorie der elliptischen Funktionen zu erhalten, werde ich den Ausdruck

$$(17)\quad \sum (D,k)\frac{\Theta'\left(\frac{k\tau}{D},\tau\right)}{\Theta\left(\frac{k\tau}{D},\tau\right)},\qquad k=1,2,\ldots,-D-1$$

als Potenzreihe darstellen. H. Weber benutzt zu diesem Zwecke

$$(17') \qquad \sum (D,k) \frac{\Theta'\left(\frac{k}{D},\tau\right)}{\Theta\left(\frac{k}{D},\tau\right)}, \qquad k=1,2,\ldots,-D-1;$$

Kronecker und schon Dirichlet selbst ähnliche Funktionen. Zwischen (17) und (17′) besteht infolge von (16) die Beziehung

$$(18) \quad \sum_k (D,k)\left(2\,\frac{k}{D}\pi i + \frac{\Theta'\left(\frac{k\tau}{D},\tau\right)}{\Theta\left(\frac{k\tau}{D},\tau\right)}\right) = \frac{1}{\tau}\sum_k (D,k)\frac{\Theta'\left(\frac{k}{D},\tau_1\right)}{\Theta\left(\frac{k}{D},\tau_1\right)}.$$

Aus den elementaren Relationen

$$\pi \cot \frac{k\pi\tau}{D} = \pi i\left(1+2\sum_{m=1}^{\infty} q^{\frac{2km}{|D|}}\right),$$

$$4\pi\,\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin 2m\pi\,\frac{k\tau}{D} = -2\pi i\,\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\left(q^{\frac{-2km}{|D|}} - q^{\frac{2km}{|D|}}\right).$$

$$= -2i\sum_{\lambda=1}^{\infty} q^{\frac{2m(\lambda|D|-k)}{|D|}} + 2i\sum q^{\frac{2m(\lambda|D|+k)}{|D|}}$$

und aus

$$(D,k) = -(D,\lambda\,|D|-k),$$
$$(D,k) = (D,\lambda\,|D|+k),$$
$$(D,\lambda\,|D|=0,$$

sowie auch aus dem Umstande, dass in der Linearform $\lambda\,|D|-k$, wo $\lambda=1,2,3,\ldots$ und $k=1,2,\ldots,|D|-1$, jede positive ganze, durch $|D|$ nicht teilbare Zahl einmal und nur einmal enthalten ist, und ebenso in der Form $\lambda\,|D|+k$, $\lambda=0,1,2,\ldots$, $k=1,2,\ldots,|D|-1$, schliesst man sofort, dass

$$\sum (D,k)\frac{\Theta'\left(\frac{k\tau}{D},\tau\right)}{\Theta\left(\frac{k\tau}{D},\tau\right)} = \pi i\sum (D.k) + 4\pi i\sum_m\sum_{m'}(D,m')\,q^{\frac{2mm'}{|D|}},$$

$$m, m' = 1, 2, 3, \ldots$$

Das erste Glied der rechten Seite ist Null (denn $(D,k) = -(D,\lambda\,|D|-k)$), dem zweiten kann man offenbar die Form geben

$$4\pi i \sum_N q^{\frac{2N}{|D|}} \left(\sum_d (D, d)\right), \qquad N = 1, 2, 3, \ldots,$$
d durchläuft alle Teiler von N,

woraus [und aus (10) und (14)] folgt

$$(19) \quad \sum (D, k) \frac{\Theta'\left(\frac{k\tau}{D}, \tau\right)}{\Theta\left(\frac{k\tau}{D}, \tau\right)} = 2\pi i \sum_{Kl.} \sum_{x, y} q^{\frac{2(ax^2 + bxy + cy^2)}{-D}} - 2h\pi i,$$

$$= -2\pi \frac{\sqrt{-D}}{\tau} \sum_{Kl.} \sum_{x, y} q_1^{2(ax^2 + bxy + cy^2)} - 2h\pi i.$$

Die Beziehung (18) verwandelt sich also in die folgende

$$(20) \quad 2\pi i \left(-h + \sum_k \frac{k}{D} (D, k)\right) - 2\pi \frac{\sqrt{-D}}{\tau} \sum_{Kl.} \sum_{x, y} q_1^{2(ax^2 + bxy + cy^2)}$$
$$= \frac{1}{\tau} \sum (D, k) \frac{\Theta'\left(\frac{k}{D}, \tau_1\right)}{\Theta\left(\frac{k}{D}, \tau_1\right)}.$$

Jetzt kann man auf zweierlei Weise vorgehen, je nachdem man die Kenntnis der Gauss'schen Summen voraussetzen will oder nicht. Im letzteren Falle genügt uns die Wahrnehmung, dass die rechte Seite von (20) eine mit $\frac{1}{\tau}$ multiplizierte Potenzreihe von q_1 ist, was wegen (15) evident ist. Daraus folgt, dass

$$2\pi i \left(-h + \sum_k \frac{k}{D} (D, k)\right)$$

Null ist, denn andernfalls würde $\tau = -\frac{\pi i}{\log q_1}$ infolge von (20) als eine Potenzreihe von q_1, welche für $|q_1| < 1$ konvergiert, darstellbar sein.

Wir haben also

$$(21) \qquad h = \sum_k \frac{k}{D} (D, k) \qquad k = 1, 2, \ldots, -D - 1$$

und durch Vergleich der rechten Seite von (20) mit der linken Seite

$$h = \frac{-1}{2\sqrt{-D}} \sum (D,k) \cot \frac{\pi k}{D}. \tag{21'}$$

Auf solche Weise haben wir nicht nur die Resultate von Lejeune-Dirichlet für die Anzahl der Klassen bei negativer Discriminante erhalten, sondern noch die Möglichkeit gewonnen, die Gauss'schen Summen durch Vergleichung der Koeffizienten verschiedener Potenzen von q_1 auf den beiden Seiten von (20) zu bestimmen.

Will man aber die Kenntnis der Gauss'schen Summen voraussetzen, so berechnet man ebenso wie die linke Seite auch die rechte Seite von (20)*) und man bekommt dann leicht aus (20)

$$2\pi i \left(-h + \sum \frac{k}{D}(D,k)\right) = \frac{1}{\tau}\left(+ 2\pi h \sqrt{-D} + \pi \sum (D,k) \cot \frac{\pi k}{D}\right),$$

woraus man (bei veränderlichen τ) wieder (21) und (21') erhält.

*) Siehe Weber l. c.

XIX.

Radioaktivné vlastnosti vody z pražského vodovodu.

Napsal Dr. **Bohumil Kučera**, s. doc. experimentální fysiky
na pražské universitě.

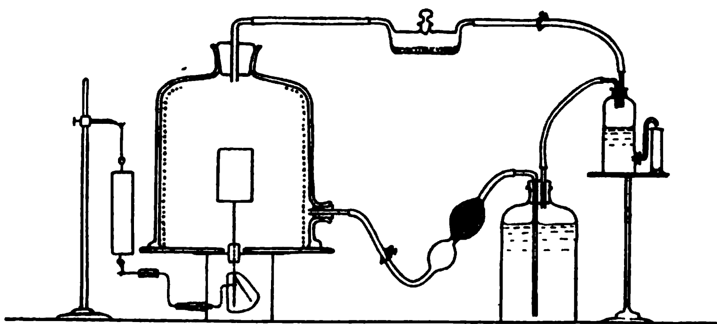
Předloženo v sezení dne 11. října 1907.

S 3 obrázky v textu a dvěma diagramy.

Z měření mnoha badatelů (Elstera a Geitela, Wilsona, Rutherforda a Allana, J. J. Thomsona, Eberta, Macheho a Schweidlera a m. j.) jest známo, že nejen atmosferický vzduch a vzduch z půdy zemské, ale i velmi mnohé vody jeví zvláštní vlastnosti, jež jsme v poslední době zvykli shrnovati pod názvem vlastnosti radioaktivné. Z vod zkoumány byly hlavně pramenité a léčivé. Pokud mně známo, nebyla však dosud zkoumána voda pocházející z volně tekoucí řeky, jako je voda pražského vodovodu, svou proveniencí to filtrovaná voda Vltavská.

Za příležitosti jiných měření vykonal jsem dvě serie pozorování aktivity této vody, vzaté přímo z kohoutu vodovodního ve starém fysikálním ústavu české university v Klementinu. Dovoluji-li si v následujícím referovati o těchto pokusech poněkud obšírněji, než by snad bylo nezbytně nutno, budiž mi omluvou ta okolnost, že jest to prvá česká práce z tohoto oboru a že chci současně podati jakýsi návod k provádění podobných měření, která zasluhují, aby u všeobecnější vešla známost zvláště našich pp. odborníků středoškolských. Mohou se totiž systematická měření v různých okrscích geologických konaná státi důležitou pomůckou bádání geofysikálných. Při tom mají velikou výhodu, že nevyžadují nikterak nákladných strojů.

Radioaktivita vody pochází dle dnešních názorů téměř výhradně od emanace radioaktivných látek, která v ní je absorbována. Máme-li radioaktivitu dotyčné vody stanoviti, vypudíme z ní emanaci, kterouž naplníme prostor, v němž můžeme měřiti el. vodivost vzduchu jej naplňujícího. Vypuzení emanace může se státi dvojím způsobem: 1. vyvaříme-li vodu, prchá z ní emanace chovajíc se zcela podobně jako kterýkoli jiný absorbovaný plyn. 2. Proháníme-li vodou proud obyčejného vzduchu, béře ssebou emanaci tak dlouho, až nastane mezi množstvím emanace ve vzduchu a ve vodě rovnováha daná zákonem Henryovým*).



Obr. 1.

Tento druhý způsob jest do jisté míry pohodlnější a proto ho bylo užito. Celé zařízení, jímž měření se provádí, znázorňuje obr. 1. Na vrchní desce elektroskopu — skřínky z mosazného plechu velikosti 8×8×6 *cm* — jest vzduchotěsně přitmelena na př. směsí vosku a loje deska skleněná na spodu staniolem polepená nebo kovová s centrálním otvorem, jímž prochází isolator (jantar, ebonit nebo síra), který nese tyčinku s elektroskopickým lístkem. Do otvoru v isolatoru jest zasunuta kovová tyčinka s „rozptylným tělesem“ — dutým kovovýmválečkem (5×6 *cm*) — kteráž se kovově dotýká tyčinky, na níž elektroskopický lístek jest připevněn. Na desce stojí vzduchotěsně přitmelená široká válcovitá nádoba kovová nebo jednodušeji zvon skleněný (od vývěvy) velikosti asi 15×24 *cm* s jedním nebo dvěma tubuly. Tyto jsou uzavřeny korky paraffinem zalitými,

*) H. Rausch v. Traubenberg, Phys. ZS. 5. 130, 1904.

skrze které prochází skleněné trubičky, sloužící k přívodu a odvodu aktivovaného vzduchu. Vnitřní stěna zvonu jest buď vylepena staniolem, nebo pokryta hustou sítí kovovou se zemí (t. j. s vodovodem neb plynovodem) spojenou na př. drátkem, který skrze korek jest ven vyveden. Měřít se el. vodivost vzduchu mezi sítí (staniolem) a rozptylným tělesem. Nabíjení elektroskopu nejpohodlněji se obstará jednoduchým zařízením mnou v dřívější jedné práci popsaným, čtyřikráte v pravém úhlu ohnutým drátem, který jest isolovaně veden trubičkou ebonitovou v rource ku skříňce elektroskopu přiletované a vztýčen dotýká ze vodivě tyčinky s el. lístkem, sklopen dolehne na dno elektroskopu. Nejpohodlněji nabíjí se elektroskop suchým sloupem poblíže drátu zavěšeným; lze však též užiti prostě indukce ebonitovou nebo skleněnou tyčí, která se ku konci drátu přiblíží. Místo tohoto drátu lze horním tubulem zvonu vésti ohnutou tyčinku kovovou, která se při vhodném otočení dotkne rozptylného tělesa a otočena zpět se vybije do sítě kovové se zemí spojené.

Od obou trubiček v tubulech vedou kaučukové trubice jednak ku kaučukovému dmychadlu, jako se ho užívá u rozprašovačů (nebo k jednobotové obyčejné vývěvě na ssání a tlak zařízené), jednak k trubici s nějakým energickým sušidlem (kys. sírovou nebo fosforpentoxydem) a odtud dále k dvěma trubicím v dvojnásob vrtaném korku lahve, v níž se nachází zkoumaná voda. Je radno užíti vždy téhož množství vody a láhev jí do značné výše naplniti, aby nad ní nezůstával příliš značný vzduchem naplněný prostor. Jak z výkresu je patrno, jest mezi tuto láhev a sušidlo vsunuta ještě jedna nádoba mající za účel jímati obyčejné plyny ve vodě absorbované (kysličník uhličitý při zkoumání vod minerálních), tak aby nevznikl uvnitř zvonu příliš značný přetlak.

Před prováděním pokusu jest radno nechati po dosti dlouhou dobu elektroskop státi nabitý, aby se jednak odstranila aktivná emanace ve vzduchu přítomná tím, že se usadí dle směru pole elektrického buď na rozptylném tělese nebo na síti. Ovšem je nutno čekati, až emanace odumře. Vskutku když pozorujeme rychlost se kterou elektroskopický lístek klesá po několik hodin, vidíme, že z počátku poněkud stoupne a potom se ustálí na jisté konečné nezměněné hodnotě. Tuto rychlost, která je měrou intensity el. proudu mezi rozptylným tělesem a sítí a tím i měrou ionisace, stanovíme pomocí mikroskopu opatřeného okulárním mikrometrem, měříce pomocí stopek (chronometru s arretací) dobu, která uplyne mezi průchodem elskop. lístku

několika dílci mikrometru. Rychlost lístku a tedy intensita proudová a ionisace je obráceně úměrna době, za kterou klesne lístek o určitý stálý počet dílců na př. o jeden.

Aby voda, jíž při pokuse bylo užito, byla pokud možno „čerstvá", t. j. nepocházela z vedlejších přívodních trubic vodovodu, nýbrž z trubice hlavní, byl po dobu asi $^1/_2$ hodiny nepřetržitě kohout vodovodu otevřen a voda vypouštěna. Zatím změřena vodivost vzduchu pod zvoncem uzavřeného a nalezeno, že lístek klesal o 1 dílek škály za 154·2 sek., což odpovídá proudu $\frac{1}{154 \cdot 2} = 0 \cdot 0065$. Pro pohodlí násobme všechny takto vypočtené hodnoty pro proud 1000 a pišme tedy pro něj v tomto případě 6·5 arbitrárních jednotek. Potom byla naplněna vodovodní vodou dvoulitrová láhev a v zařízení skizzovaném po dvacet minut proháněn jí vzduch recipientu, načež asi po 5 minutách bylo započato s měřením. Veškeré pozorovací výsledky jsou uvedeny v prvých třech sloupcích tabulky I., při čemž sluší podotknouti, že veškerá čísla jsou středy z několika (obyčejně přes hodinu trvajících) pozorovací, při nichž lístek klesl o 20 i více dílců škály. Uvedené pozorovací doby jsou středy mezi počátkem prvého a koncem posledního pozorování. (Viz následující stranu.)

Ve čtvrtém sloupci pod rubrikou I′ jest uvedena vodivost vzniklá při prohánění vzduchu vodou, tedy I—6·5, v pátém barometrický tlak za doby měření (dle barografu), v šestém vodivosti I_{red} korrigované na tlak 740 *mm* a konečně v posledním jejich briggické logarithmy. Poslední tři rubriky odpadají při posledních měřeních — nemajíť pro příliš malou přesnost smyslu. Co se týče korrekce vodivosti na barometrický tlak, sluší podotknouti následující: Apparát přes všechnu péči nebyl absolutně vzduchotěsný, tak že se velmi úzkými kapillarami, eventuellně trhlinkami kaučukových trubic tlak vzduchu uvnitř a vně vyrovnával. Proto zavedena korrekce na tlak dle známého fakta, že vodivost plynu nějakým ionisačním agens ionisovaného je úměrna v širokých mezích jeho tlaku. Ostatně jsou změny korrekcí způsobené tak nepatrné, že bez újmy přesnosti by mohly býti zanedbány, jak se také u druhého pokusu stalo. Připomínám výslovně, že elektroskop stál po celou dobu, i když se s ním nepracovalo, nabit, a to záporně asi na takový potenciál, jakého potom užíváno, totiž ca 250 Volt. Výsledky pozorovací jsou znázorněny na diagrammu 1. a to křivkami I. *a*) a I. *b*).

Tabulka I.

Den a měsíc	Hodina	Proud I	I'	Barom. tlak *mm*	I_{red}	log I_{red}
	h m					
30. X. 1906	2 *p. m.*	6·5				
	3 30 "	49·4				
	4 — "	53·4				
	4 30 "	57·2				
	5 — "	60·8				
	6 — "	65·5	59·0	746·—	58·5	1·767
	7 — "	65·0				
31. X.	10 15 *a. m.*	54·5	48·0	745·—	47·7	1·679
	5 52 *p. m.*	50·5	44·0	742·—	43·9	1·643
1. XI.	10 8 *a. m.*	41·8	35·3	735·—	35·55	1·551
	5 18 *p. m.*	37·8	31·3	733·—	31·6	1·500
2. XI.	10 26 *a. m.*	31·7	25·2	736·—	25·35	1·404
	5 50 *p. m.*	29·7	23·2	735·—	23·4	1·369
3. XI.	10 20 *a. m.*	25·6	19·1	737·—	19·2	1·283
	4 20 *p. m.*	24·3	17·8	737·—	17·87	1·253
4. XI.	10 50 *a. m.*	20·7	14·2	737·5	14·25	1·154
	6 — *p. m.*	19·5	13·0	740·—	13·—	1·114
5. XI.	5 — "	16·6	10·1	745·—	10·02	1·001
6. XI.	5 — "	14·1	7·6	745·—	7·55	0·878
7. XI.	4 30 "	12·5	6·0	738·—	6·01	0·779
8. XI.	4 30 "	11·0	4·5	736·—	4·52	0·655
9. XI.	6 — "	9·9	3·4	740·5	3·4	0·531
10. XI.	5 30 "	9·2	2·7	746·—	2·68	0·428
11. XI.	5 — "	8·4	1·9	755·—	1·86	0·270
12. XI.	4 30 "	8·07	1·57			
14. XI.	5 — "	7·0	0·5			
18. XI.	4 30 "	6·82	0·32			
21. XI.	5 — "	6·79	0·29			
1. XII.	5 — "	6·75	0·25			
1. II. 1907	—	6·35				

Druhý, s prvým úplně obdobný pokus byl konán o více než čtyři měsíce později — v době jarní, počínaje 21. březnem 1907. Neuvádím podrobně protokollu pozorovacího, ježto z křivky II. *a*) a II. *b*) na diagrammu výsledek je úplně patrný. Jak ze srovnání s pokusem prvým plyne, jsou výsledky obou pokusů úplně souhlasné, a souhlasně potvrzují aktivitu zkoumané vody.

Ku konci prvé řady pozorovací (1. února 1907) bylo vyvrátiti výtku, jež by se mohla činiti, že totiž by snad mohlo veliké zvýšení vodivosti ze 6·5 na 65·5 arb. jednotek pocházeti na př. od zvíření prachu v recipientu při prohánění vzduchu vodou nebo od jakési akce vodních par, které by se snad přes vydatné sušení fosforpentoxydem pod recipient mohly dostati. Proto vykonány následující pokusy: 1. Vymýtěna nádobka se sušidlem a vzduch recipientu proháněn dmychadlem, aby prach se zvířil. Nenastalo naprosto žádné zvýšení vodivosti. 2. Týž pokus se sušidlem měl rovněž negativný výsledek. 3. Proháněn vzduch recipientu po 20 minút vodou dojista inaktivní, totiž vyvařenou vodou destillovanou a sušen fosforpentoxydem. Vodivost klesla s 6·35 na 6·32 arb. jednotek, což leží již v mezích pozorovací přesnosti. Ale úplně najisto je tím postaveno, že se nemůže zvýšení vodivosti připisovati prostě vlivu vodních par nebo jejich akci na fosforpentoxyd, nýbrž že aktivní princip je jiný, ten, jemuž jsme zvykli říkati radioaktivní emanace.

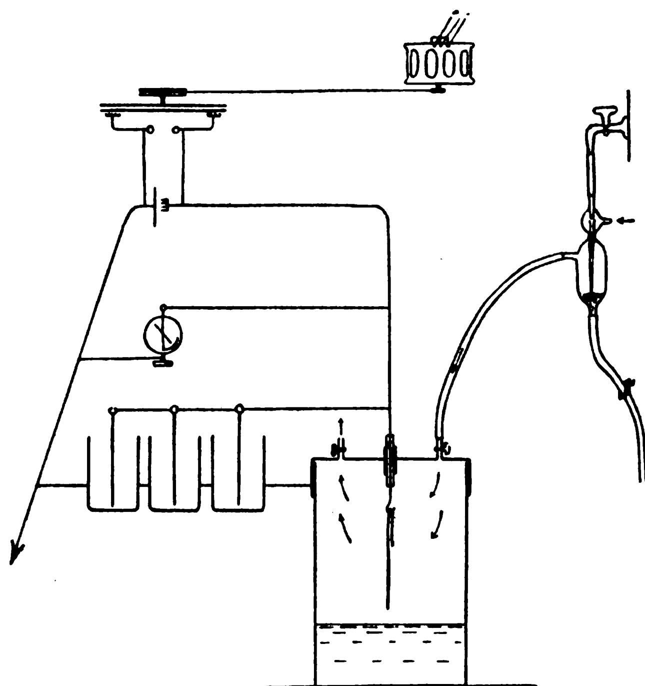
Aktivita emanace klesá s časem. Ježto jest grafické znázornění logarithmů v mezích pozorovacích chyb přímkou, děje se klesání dle exponencielly. Z tohoto znázornění dá se snadno najíti t. zv. „poločas“ emanace, totiž doba, za kterou klesne dočasná aktivita na polovici. U logarithmického grafu potřebujeme jen vyčíslit, jaké differenci absciss odpovídá klesnutí ordinaty o log 2 = 0·301. Tím způsobem najdeme u pokusu prvého číslo 63 hodin = 2·63 dnů, u druhého číslo poněkud menší ca. 60 hodin = 2·5 dnů. Z počátku — prvé tři dny klesá aktivita poněkud rychleji. Curie, Bumstead a Wheeler a Sackur*) našli pro poločas radiové emanace číslo poněkud větší, asi 3·8 dnů, kdežto při pokusech Mc. Lennanových) u vzduchu z půdy zemské vyšla hodnota podobná naší, totiž 2·78 dnů. Tyto menší hodnoty jsou nejspíše způsobeny malými netěsnostmi apparátu a kauču-**

*) Srv. na př. E. Rutherford „Radioaktive Umwandlungen“ übers. von Levin, Braunschweig 1907 str. 74.

**) J. C. Mc Lennan, Intern. Electrical Congress at St. Louis, September 1904.

kovými trubicemi, jimiž emanace částečně diffundovala ven. Charakteristickým znakem radiové emanace jest počáteční asi 3 hodiny trvající stoupání vodivosti po zavedení aktivní látky pod recipient, jež v obou případech se ukázalo.*)

Aby bylo definitivněji rozhodnuto o povaze radioaktivní látky, již voda pražského vodovodu obsahuje, zkusil jsem aktivovati jí olověný drát, jehož aktivita a časový její průběh pak změřeny. Měření



Obr. 2.

aktivity děje se v tomto případě ještě jednodušším zařízením, než je v obr. 1. znázorněno. Stačí elektroskop a recipient. Místo rozptylného tělesa jest na elektroskop nasazena kovová destička ve tvaru stolečku. Na ni se staví drátěný rámeček ve formě šestibokého hranolu, na který se navine aktivovaný olověný drát (průřezu ca. 2 *mm* a délky 40 *cm*.). Aktivace drátu dála se zařízením, jež je na obr. 2.

*) Viz na př. Miss L. B. Johnson, Physical Review, 20. 177. 1905.

schematicky znázorněno. Drát byl zavěšen na kovovém háčku, který isolován ebonitovou trubicí procházel středním otvorem v příklopu veliké válcovité nádoby ze zinkového plechu (průměr 44 *cm*, výška 70 *cm*). Tato nádoba byla bezprostředně před pokusem asi do $^1/_4$ výšky naplněna čerstvou vodou z vodovodu. Aby se však docílilo pokud možno intensivní aktivace, byl nádobou pomocí obou kohoutů *a* a *b* v příklopu neustále proháněn vzduchový proud, který přišel ve velmi intensivní styk s vodovodní vodou ve vodním dmychadle. Takovýto vzduch přejme velikou část emanace ve vodě přítomné. Aby se však aktivace koncentrovala na drátě, jest nutno udržovati jej neustále na vysokém negativním potenciálu. To se dálo, jak na obr. 2. je schematicky naznačeno, pomocí Wimshurstovy elektriky, která byla elektromotorem poháněna a jejíž póly byly parallelně spojeny s hrotovým vybíječem, jímž lze potenciál regulovati. Napětí kontrollováno bylo Braunovým elektrometrem a stabilisováno připojením větší kapacity z Leydenských lahví.

Před pokusem byla stanovena intensita nasyceného proudu (ionisace) v recipientu s drátem neaktivným; byla 1·2 arb. jednotek. Potom byl drát z recipientu vyjmut, zavěšen v aktivační nádobě a nabit asi na — 5000 Volt.

Aktivace trvala nepřetržitě po $2^1/_2$ hodiny. Potom byl aktivovaný drát pokud možno rychle navinut na rámeček a vsunut pod recipient, načež hned přikročilo se k měření ionisace, jež pak neustále prováděno v pokud možno malých intervallech, zprvu minutových, ku konci pak 8—10 minutových. Ionisace stoupla aktivací drátu z 1·2 na 38 jednotek, tedy o 36·8 jednotek, ale postupem času rychle klesala. Bylo by zbytečno uváděti zde pozorovací protokoll in extenso, ježto na diagr. 2. z grafického znázornění výsledky jsou úplně patrné. Mimo ionisace (I*a*) jsou na diagrammu nanášeny také jejich briggické logarithmy (I*b*). Křivky naše, charakteristické počátečním rychlým spádem, potom uvolněním (bod inflexe, jehož časová poloha a směr tangenty závisí na době aktivace) a na konec pravidelným spádem dle exponencielly, jsou úplně identické s křivkami, které pro aktivitu, indukovanou (vzbuzenou) emanací radiové soli, obdrželi Curie a Rutheford s Miss Brooksovou.*)

Ještě přesvědčivějším jest srovnání křivek I*a* a I*b* s II*a* a II*b*. kteréž znázorňují vlastní můj pokus, provedený s destičkou olověnou,

*) Srov. na příkl. E. Rutherford, Radioactivity, 2. vydání str. 306 a násl. Cambridge 1905.

kteráž byla aktivována 5 *mg* radiumbromidu, jenž jest majetkem fysikálního ústavu. U této destičky byla aktivace provedena jednoduše tak, že byla vzduchotěsně uzavřena po dlouhou dobu asi půl roku spolu s ebonitovou kapslí, v níž radiová sůl se kupuje a kteráž není absolutně vzduchotěsnou v otvoru velmi tlustostěnného olověného válce, jenž byl uzavřen přilepenou destičkou papírovou. Poločasy, které zjistíme na logarithmické křivce v době, kdy klesání se ustálilo (asi po 2 hodinách), jsou u indukované aktivity z vody asi 31·5 minuty, u indukce z radia asi 32—33 minut, tedy v oboru pozorovacích chyb úplně totožné, což jest neklamným důkazem o společném, stejném původu obou. Číslo, které se udává na př. v Rutherfordově knize o radioaktivitě pro poločas indukce, je sice o něco menší, obnášejíc přes 28 minut, leč to zde nepadá na váhu, ježto malá modifikace, vzniklá snad pokusnými podmínkami, měla týž vliv na indukci z vodovodní vody i radiumbromidu. O indukci thoriem se u vody jednati nemůže, ježto ta má poločas 11 hodin. Bližší naší hodnotě je poločas indukce aktinia, 41 minut, leč jest velmi nepravděpodobno, že by aktinium v takovém množství se mohlo v říční vodě vyskytovati.

Jedna námitka mohla by se při aktivaci drátu vodou činiti — totiž ta, že snad vzduch laboratoře, jenž byl ve vývěvě emanací nasycován, sám byl již aktivný, a od něho že tedy indukce měla svůj původ. Aby se této námitce předešlo, byl pokus opakován, a to tak, že drát zavěšen v aktivační nádobě *bez* vody, nabit na — 5000 Volt a po 2 hodiny přímo prossáván vzduch laboratoře nádobou, aniž by byl před tím přišel ve styk s vodovodní vodou. Ionisace drátem způsobená stoupla po této aktivaci vzduchem laboratoře asi o 2%, tedy z 1·2 na 1·44, což je oproti stoupnutí na 38·0 jistě effekt, jejž lze zanedbati. Nemůže kaliti výsledek náš než asi o $^1/_2$%.

Pokládám těmito pokusy za nezvratně prokázáno, že říční volně tekoucí voda vltavská, jež vodovodem v městě se rozvádí, jeví vlastnosti, jež dle obecně užívané terminologie shrnujeme pod názvem radioaktivních, a dále, že tyto vlastnosti jsou úplně obdobné s vlastnostmi, jež jeví t. zv. emanace radiová.

Při výpočtu měření byla ionisace, t. j. intensita nasyceného proudu mezi rozptylným tělesem a sítí na stěnách zvonu kladena obráceně úměrnou času, za který klesl elektroskopický lístek o jeden dílec mikrometru, času, který byl počítán z klesnutí o více, 20 až 30 dílců. Bylo by možno, že klesnutí o jeden dílec odpovídá na růz-

ných místech škály úbytku o různě veliká množství elektrická, čímž by ztrácel náš výpočet svoji oprávněnost. Náboj E systému (lístek + rozptýlené těleso) jest dán součinem z kapacity C a napětí V. Kapacitu můžeme při velmi málo odlišných posicích lístku pokládati za konstantní, takže změna náboje $dE = C.dV$ jest úměrna změně napětí. Má-li tedy předpoklad náš o ekvivalenci různých dílců mikrometru býti správným, musí podél celé mikrometrické škály stoupat napětí lineárně. K osvětlení tohoto bodu byl k disposici kalibrovaný elektroskop Elster-Geitelův od firmy Günther-Tegetmeyer v Brunšviku, jehož škála však nesahala až k napětím, jichž jsem při práci užíval (něco přes 200 Volt). Proto změřil jsem čas, za který vlivem γ-paprsků z 5 *mg* radiumbromidu klesl elektroskopický lístek o 30 dílců při téže posici mikroskopu, jaké v celé práci bylo užito; bylo to 49·4 sek. Potom s ponecháním radiového praeparátu na témž místě byl mikroskop posunut k místům odpovídajícím menším napětím a znovu stanovena doba klesnutí o 30 dílců, nyní na 55·4 sek. V tomto novém postavení mikrometru byla stanovena závislost mezi posicí lístku na mikrometru a napětím, tím, že lístek s parallelně spojeným mikroskopem Elster-Geitelovým nabíjen z různých míst suchého sloupu. Tak vznikla následující tabulka II.

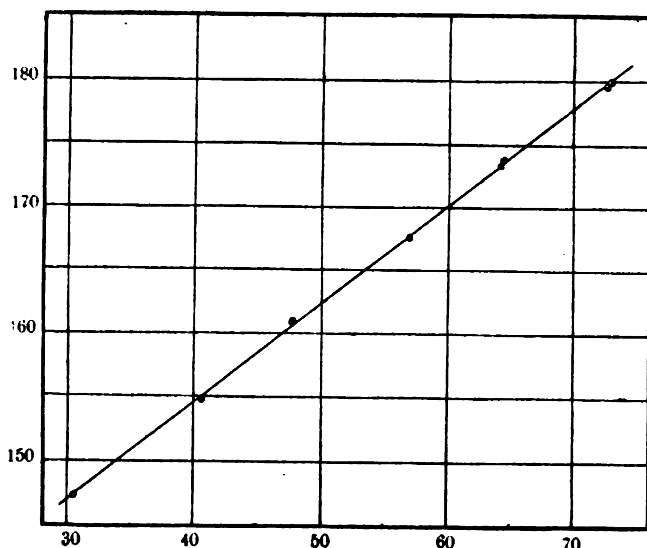
Tabulka II.

Dílec mikrometru	Rozstup Elster-Geitelova elektroskopu	Odpovídající napětí
73·0 sc.	23·0 *mm*	180·0 Volt
72·7 „	22·9 „	179·4 „
64·5 „	21·9 „	173·9 „
64·3 „	21·8 „	173·3 „
57·0 „	20·8 „	167·7 „
47·8 „	19·6 „	161·0 „
40·5 „	18·6 „	154.8 „
30·7 „	17·4 „	147·5 „

Z obrazce 3., kde za abscissy jsou nanášena odečtení mikrometru, za ordináty příslušná napětí, vidíme, že vztah mezi oběma je lineární, že tedy požadavek užitý při výpočtu proudů jest splněn.

Není bez zajímavosti vypočísti alespoň přibližně intensitu minimálního proudu nasyceného v abs. míře, neboť odpovídá tak zvané spontánní ionisaci vzduchu. K výpočtu proudu $\frac{dE}{dt} = C.\frac{dV}{dt}$ nutno

ovšem znáti kapacitu nabitého systému (lístek se svým nosičem, rozptylné těleso) v téže posici, jak bylo měřeno. Kapacita ona byla stanovena pomocí kalibrovaného elektroskopu Elster-Geitelova, jehož kapacita jest výrobcem udána (6·7 *cm*), dle principu dělení náboje velmi přibližně na 11 Volt. Z obrazce 3. je patrno, že 42 dílců škálových na mikrometru po přesunutí mikroskopu do nové polohy odpovídalo 32 Volt, tedy 1 sc. $\sim$ 0·762 Volt. V původní poloze mikroskopu, za níž bylo měřeno, byla citlivost $\frac{55 \cdot 4}{49 \cdot 4}$ kráte větší, tedy



Obr. 3.

1 sc. odpovídal 0·68 Volt. Lístek klesl o jeden dílec při minimálním proudu za 166 sekund, takže $\frac{dV}{dt} = \frac{0 \cdot 68}{166} = 0 \cdot 0041 \frac{\text{Volt}}{\text{sek.}}$. Kapacita $11\, cm = 11 \cdot \frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$ Farad, takže proud $C \cdot \frac{dN}{dt} = 5 \cdot 0 \cdot 10^{-14}$ Amper. K výpočtu samoionisace musíme znáti objem zvonu a elektroskopu, jenž obnášel 5070 cm^3. Ježto pak náboj jednoho iontu jest dle údajů J. J. Thomsonových $3 \cdot 4 \cdot 10^{-10}$ elst. jedn. čili $1 \cdot 13 \cdot 10^{-19}$ Coulomb, ge-

*) Harms, Phys. ZS. 4. 11. 1902.

neruje se v celém ionisačním prostoru za 1 sekundu $\frac{5\cdot0 \,.\, 10^{-14}}{1\cdot13 \,.\, 10^{-19}} =$ $= 4\cdot42 \,.\, 10^{5}$ iontů čili v každém cm^3 87 iontů. Harms*) našel pro spontánní ionisaci ve skleněné nádobě 53 až 63 $\frac{\text{iontů}}{\text{sek.}}$. Že mé číslo jest poněkud větší, nepřičítám vadné isolaci, která byla jantarová a výtečná, nýbrž tomu, že během měření se nalézalo ve vzdálenosti asi 16 metrů od ionisační komory 5 *mg* radiumbromidu. Jeho γ-paprsky musely ovšem proniknouti tlustými stěnami olověného válce, v němž byl uzavřen, a třemi silnými zděmi, leč přece zmíněnou differenci stačí úplně vysvětliti.

Maximálný proud emanací obsaženou ve dvou litrech vodovodní vody vzbuzený byl $\frac{65}{6\cdot05} = 10\cdot7$kráte intensivnější a obnášel tedy asi $53\cdot10^{-14}$ Amper $= 1\cdot6 \,.\, 10^{-3}$ elstat. jednotek. Jest to hodnota dosti veliká, srovnatelná s aktivitou některých pramenů léčivých (ač ovšem asi 200kráte menší než aktivita nejúčinnější vody [Grabenbäckerquelle] v lázních Gastýnských*), a bylo by zajímavo zjistiti původ této aktivity, u volně tekoucí vody jistě nezvykle vysoké. Na snadě leží domněnka, že jsou to asi přítoky Berounky (Litava!), jež vnášejí ve Vltavu aktivní zeminy. Jest mým úmyslem otázku tuto dále studovati.

Praha, fysikální ústav čes. university, v červnu 1907.

---

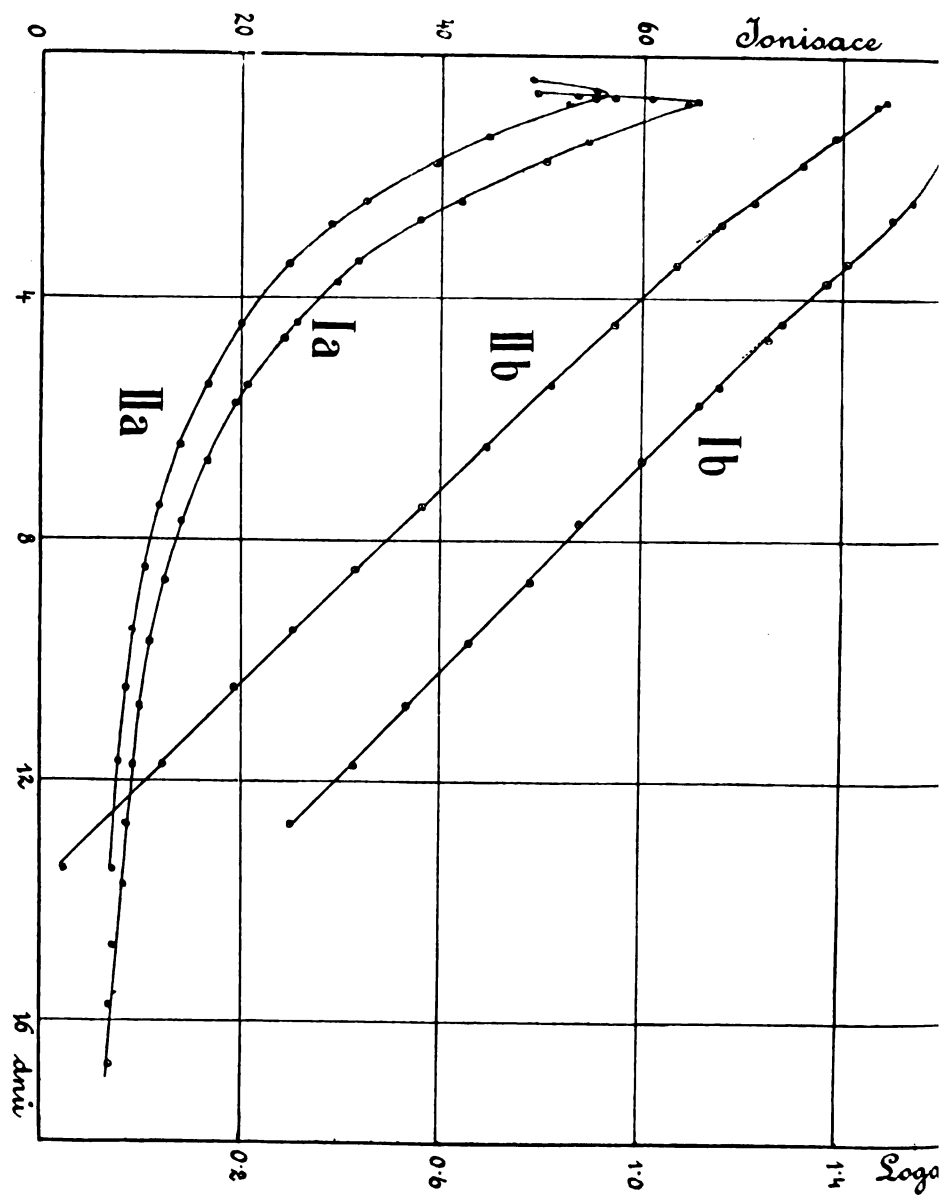
*) H. Mache a St. Meyer, Phys. ZS. 6. 692. 1905.

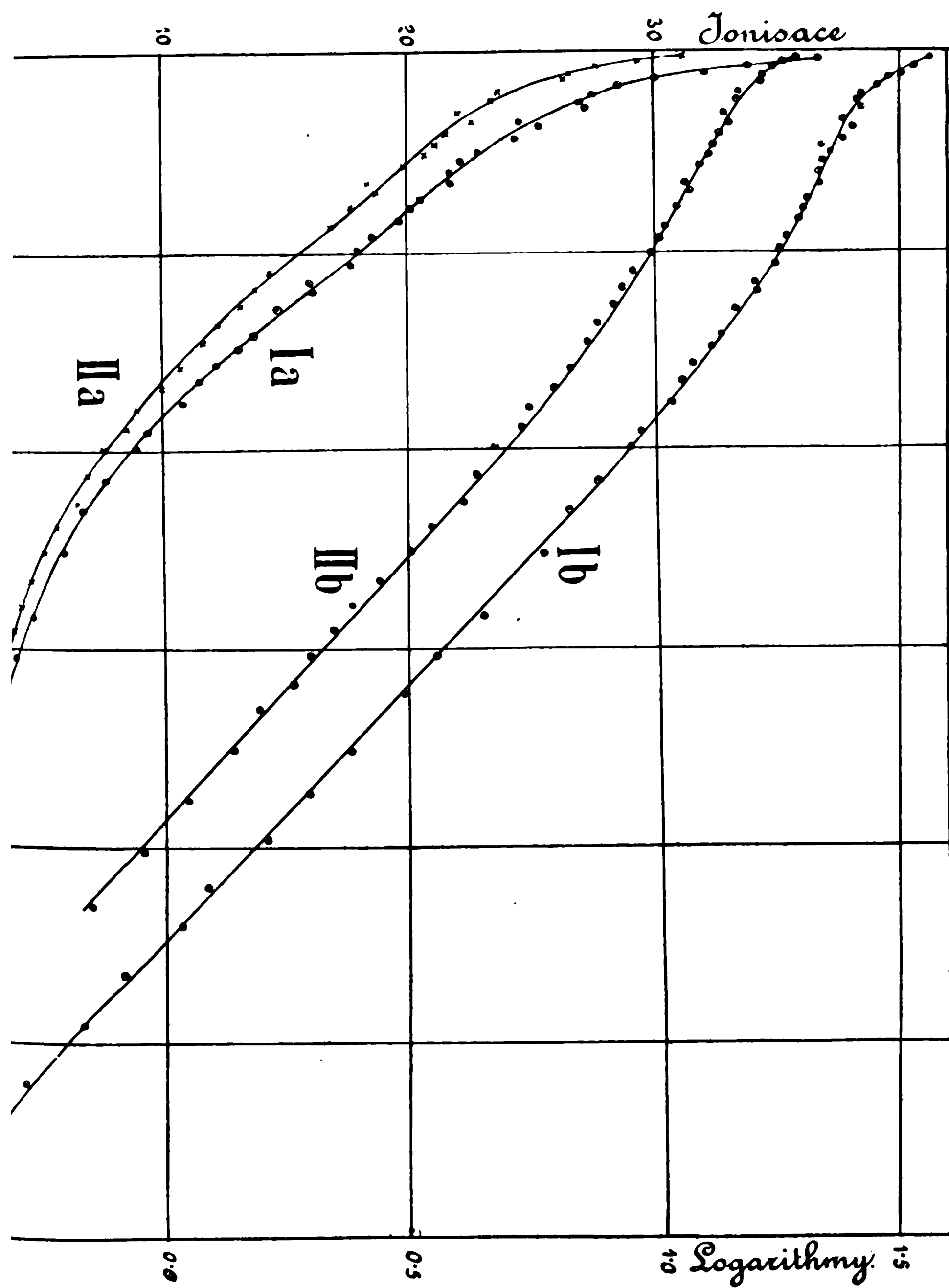
Résumé:

Über die radioaktiven Eigenschaften des Prager Leitungswassers.

Vom Privatdocenten Dr. B. Kučera.

Bei Anlass anderer Versuche wurde der Verfasser darauf aufmerksam, dass das gewöhnliche Prager Leitungswasser, seiner Provenienz nach filtriertes Moldauwasser, eine bei offen fliessenden Flusswässern ungewöhnlich hohe Aktivität zeigt. Zwei Versuche, wovon einer Anfang November 1906, der andere Ende März 1907 unternommen wurde, bestätigten diese Vermutung und ergaben für die Halbwertzeit der Emanation mit ihren Produkten ca 2·6 Tage. Um definitiv entscheiden zu können, welcher Substanz die Aktivität zuzuschreiben ist, wurde mittels Wasserpumpenluft ein Bleidraht aktiviert und seine Halbwertzeit zu 31·5 Minuten bestimmt; eine in demselben Apparate untersuchte und durch 5 *mg* $RaBr_2$ aktivierte Bleiplatte ergab als Halbwertzeit ca 32—33 Minuten, wodurch als erwiesen zu betrachten ist, dass das aktive Princip im Moldauwasser Radiumemanation ist. Der Maximalstrom, der durch die in 2 Litern Wasser enthaltene Emanation verursacht wurde, betrug ca $1·6 . 10^{-3}$ elektrostat. Einheiten. Es bleibt übrig die Provenienz dieser ungewöhnlich hohen Aktivität im Moldauwasser aufzuklären. Der Verfasser stellt die Vermutung auf, dass es vielleicht ein Nebenfluss des Beraunflusses, die Litawa, ist, der die Aktivität der Moldau zuführt, und verspricht diesbezügliche Versuchsreihen durchführen zu wollen.


Jonisace
0
20
40
60
4
8
12
16 dni
0·2
0·6
1·0
1·4
Loga
IIa
Ia
IIb
Ib


Jonisace
10
20
30
IIa
Ia
IIb
Ib
Logarithmy.
0·0
0·5
1·0
1·5

XX.

Betrachtungen zur Konstruktion von Kegelschnitten aus teilweise imaginären Elementen.

Von J. Sobotka.

Vorgelegt in der Sitzung am 11. October 1907.

1. Der Gegenstand dieser Abhandlung wurde bereits von verschiedenen Autoren behandelt. Bezüglich der Literaturangaben verweise ich, um Wiederholung zu vermeiden, auf die Abhandlung von A. Pleskot in diesen Sitzungsberichten v. J. 1906.

Ist ein Kegelschnitt durch 5 Punkte oder Tangenten gegeben, so wird derselbe am einfachsten auf Grund des Satzes von Pascal, beziehungsweise von Brianchon in linearer Weise konstruiert, vorausgesetzt dass die Bestimmungselemente insgesamt reell sind. Sind A, B, C, D, E die gegeben Punkte des Kegelschnittes, und ist g eine beliebige durch E gezogene Gerade, so ergibt sich der Schnitt F von g mit den Kegelschnitt etwa aus dem Sechseck $ABCDEF$. Schneidet man g mit den Gegenseitenpaaren des einfachen Vierecks $ABCD$, so legen die Schnittpunkte auf g eine Involution fest, in welcher der Punkt F mit E ein Paar bildet und somit als solcher linear konstruiert werden kann.

Wir können also die Konstruktion von F mit Hilfe eines Pascalsechsecks ersetzen durch die Konstruktion des zu E gehörigen Punktes in einer Involution.

Umgekehrt können wir die Konstruktion des einem gegebenen Punkte zugehörigen Punktes in einer Involution zurückführen auf die Konstruktion eines Pascalsechsecks.

Ist nun ein Kegelschnitt durch teilweise imaginäre Punkte gegeben und zieht man durch den reellen Punkt E desselben irgend eine reelle Gerade, so kann man leicht eine Punktinvolution (γ) auf g festlegen, welcher E und F als ein Paar angehören, wodurch man einen Ersatz für das dem Kegelschnitte eingeschriebene Pascal'sche Sechseck findet, durch den der fragliche Punkt F linear ermittelt werden kann. Eine solche Involution (γ) wird etwa so festzustellen sein, dass wir irgend einen durch die gegebenen Punkte A, B, C, D gehenden Kegelschnitt k ermitteln, welcher mit einem, immer reellen, durch diese Punkte gehenden Geradenpaar einen Kegelschnittbüschel festlegt, der auf g die Involution (γ) einschneidet.

Im Folgenden wollen wir durchweg *lineare Konstruktionen* in Betracht ziehen, so dass bei dem angegebenen Vorgang wir darauf Bedacht zu nehmen haben, die Aufsuchung der Schnittpunkte von g mit k, was ja eine quadratische Aufgabe ist, zu umgehen.

2. *Zunächst seien gegeben 3 reelle Punkte C, D, E und zwei imaginäre Punkte A, B als Doppelpunkte einer elliptischen Punktinvolution (ω) auf einer Geraden o; es soll der durch diese Punkte gehende Kegelschnitt u konstruiert werden.*

Einen Kegelschnitt k durch die reellen Punkte C, D und die imaginären Punkte A, B können wir sofort konstruieren. Wir verbinden die Punkte X_1 der Reihe auf o mit D durch einen Strahlenbüschel und ordnen jedem Strahle desselben denjenigen Strahl durch C zu, welcher durch den in (ω) zu X_1 gehörigen Punkt X_2 geht. Die so entstehenden projektiven Strahlenbüschel erzeugen einen derartigen Kegelschnitt k, weil er ja o in den Punkten A und B schneidet. Ist P_2 der dem Schnittpunkt P_1 von CD mit o in (ω) entsprechende Punkt, so wird k von den Geraden P_2C, P_2D in den Punkten C und D berührt. Sucht man in (ω) den zum Schnitt E_1 von DE mit o gehörigen Punkt E_2 und verbindet ihn mit C, so trifft die Verbindungslinie den Strahl DE im Punkte E' von k. Dadurch ist k durch reelle Elemente hinreichend bestimmt.

Schneiden wir den Kegelschnittbüschel (ku) durch zwei Gerade p_1, p_2, von denen die erste durch C, die zweite durch D geht; die Schnittpunkte K_1, K_2; U_1, U_2; .... derselben mit den einzelnen Kegel-

schnitten in (ku) bilden zwei perspektive Punktreihen, woraus folgt, dass sich die Geraden $K_1 K_2$, $U_1 U_2$ auf o schneiden.

Diesen Umstand können wir benützen um

a) den Schnittpunkt F irgend einer Geraden g durch E mit dem gegebenen Kegelschnitt u zu konstruieren.

Wir denken da den Büschel (ku) mit den Geraden DE und CF geschnitten. Die erste Gerade trifft u in E und treffe k in E'; die zweite Gerade trifft u in F und treffe k in F'; es müssen sich alsdann die Geraden $EF = g$ und $E'F'$ auf o schneiden.

Verbinden wir also den Punkt $G = g \, . \, o$ mit E', so schneidet die Verbindungsgerade den Kegelschnitt k in F' und $F'C$ liefert auf g den gesuchten Punkt F.

Dies gibt sonach folgende Konstruktion von F.

Wir schneiden g mit o in G, ziehen GE' und, indem wir das dem Kegelschnitt k eingeschriebene Sechseck $CCDDE'F'$ betrachten, haben wir den Schnittpunkt $CP_2 \, . \, DE$ mit dem Schnittpunkt $H = CD \, . \, GE'$ zu verbinden und die Verbindungsgerade mit DP_2 in F_0 zum Schnitt zu bringen. Die Gerade $F_0 C$ liefert auf g den fraglichen Punkt F.

Wollen wir

b) den Schnittpunkt irgend einer Geraden h durch C mit u konstruieren,

so führen wir die soeben ausgeführte Konstruktion in anderer Anordnung durch.

Wir haben da h mit DP_2 in F_0 zu schneiden, F_0 mit $CP_2 \, . \, DE$ durch eine Gerade zu verbinden, welche CD in H trifft; alsdann legt HE' auf o den Punkt G fest und GE schneidet h im fraglichen Punkte F.

Bestimmen wir statt E' den Punkt E'' auf k, in welchem sich CE_1, DE_2 schneiden, dann tauschen C und D ihre Rollen aus, und wir können mit Hilfe von E'' nicht nur analog den Schnittpunkt F von g sondern auch den weiteren Schnittpunkt einer beliebig durch D gezogenen Geraden mit u erhalten.

3. Weiter wollen wir die Aufgabe lösen:

Gegeben ist der Kegelschnitt u wie zuvor durch die reellen Punkte C, D, E und die imaginären Punkte A, B; mann soll in einem der reellen Punkte die Tangente an ihn konstruieren.

Um die Tangente c in C zu bekommen, haben wir in der Konstruktion a) bloss die Gerade g durch EC zu ersetzen. Wir schneiden also CE mit o, den Schnittpunkt G verbinden wir mit E' durch eine Gerade, welche CD in H trifft; die Gerade, welche H mit $CP_2 . DE$ verbindet, schneidet DP_2 in Punkte F_0, welcher der gesuchten Tangente $c = F_0 C$ angehört.

Analog würde man die Tangente d in D mit Hilfe des Punktes E'' darstellen.

Um die Tangente e in E zu erhalten, haben wir in der Konstruktion b) bloss die Gerade h durch. CE zu ersetzen. Wir bringen also CE mit DP_2 zum Schnitt, verbinden den Schnittpunkt mit $CP_2 . DE$; die Verbindungsgerade legt auf CD den Punkt H fest, und HE' schneidet o im Punkte G, welcher der gesuchten Tangente e angehört.

4. Zu dem *Schnittpunkt F irgend einer Geraden h durch C* können wir auch so gelangen, dass wir den Büschel (ku) wieder durch die Geraden DE, h schneiden.

Wir ermitteln hierauf zuerst den Punkt F' in bekannter Weise etwa so, dass wir den Punkt $h . DE$ mit P_2 verbinden und die Verbindungsgerade mit CE' in E_0 schneiden; alsdann legt $E_0 D$ auf h den Punkt F' fest. $F'E'$ bringen wir weiters mit o zum Schnitt in G und GE trifft h in dem fraglichen Punkt F.

Die Konstruktion der Tangente e in E ergibt sich hier dadurch, dass wir h mit CE zusammenfallen lassen; somit trifft die Verbindungsgerade der Punkte $EP_2 . CE'$ und D den Strahl CE in F' und $F'E'$ die Gerade o in G, womit die Tangente $e = GE$ gefunden ist.

Dieselbe Konstruktion bekommen wir, wenn wir ku mit den Geraden CE, DE geschnitten denken.

Ebenso können wir die Tangente in jedem beliebigen Punkte von u erhalten.

Wir ersehen, dass die Konstruktion der Tangenten c, e sich sehr einfach gestaltet, wodurch dann der Kegelschnitt u selbst entweder punktweise durch seine Schnitte mit den durch C und E gehenden Geraden oder durch seine anderweitigen Bestimmungsstücke dargestellt werden kann.

5. Man kann den Kegelschnitt k noch in anderer Weise benützen um unmittelbar die Tangente e in E an u zu konstruieren.

Wir schneiden EC und ED mit o in C_1, resp. D_1 und suchen zu diesen Punkten die entsprechenden C_2, D_2 in der Involution (ω). Die Geraden $C_2 D$, $C_1 C$ schneiden sich im Punkte 1, die Geraden $D_1 D, D_2 C$ im Punkte 2 auf k, so dass $12\,CD$ ein dem Kegelschnitte k eingeschriebenes Viereck ist; infolge dessen ist die Verbindungsgerade p der Punkte $U = D1 . C2$, $Q = CD . 12$ die Polare von E inbezug auf k. Die Geraden CD_1, DC_1 haben den Punkt L gemeinschaftlich, welcher von E durch die Geraden CD, o harmonisch getrennt ist. Somit ist die Gerade q, welche $P_1 = CD . o$ mit L verbindet die Polare von E inbezug auf das Geradenpaar CD, o. Die Polaren von E inbezug auf sämtliche Kegelschnitte in (ku) laufen in einem Punkte zusammen. Dieser Punkt T ist sohin der Schnitt von p mit q, und durch ihn geht auch die gesuchte Tangente e.

Die Geraden CC_1, CC_2 schneiden u in zwei Punkten, deren Verbindungsgerade l durch den Pol O von o inbezug auf den Kegelschnitt u geht und desgleichen schneiden die Geraden DD_1, DD_2 ihn in zwei Punkten, deren Verbindungsgerade l' gleichfalls durch O geht. Da aber E gemeinschaftlicher Schnittpunkt von CC_1 und DD_1 mit u ist, so fallen die Geraden l, l' zusammen, und es schneiden sich auch CC_2, DD_2 in einem Punkte E^* auf u.

Dadurch kennen wir von u vier reelle Punkte C, D, E, E^* und die Tangente in einem von ihnen und könnten diese Bestimmungselemente benützen, um die lineare Konstruktion von u fortzusetzen.

Hiebei kam der zu P_1 in (ω) gehörige Punkt P_2 gar nicht zur Benützung.

Ist aber der Punkt P_2 direkt gegeben, dann ist es nicht mehr notwendig die beiden Paare $C_1 C_2$, $D_1 D_2$ in (ω) zu konstruieren. Es ist nämlich Q Pol von UE inbezug auf k; da nun Q auf $a = CD$ liegt, so geht UE durch den Pol P_2 von a bezüglich k. Benützen wir also beispielsweise das Paar $C_1 C_2$, so liefert der Schnitt von $P_2 E$ mit DC_2 den Punkt U und UC schneidet o in D_2.

6. Wir wollen unsere Konstruktion des Kegelschnittes u noch in eine andere Form bringen.

Zu dem Zwecke wollen wir den zweiten Schnittpunkt F einer beliebigen Geraden g durch E mit u ermitteln, indem wir in dem durch die reellen Punkte C, D und die imaginären Punkte A, B als Grundpunkte festgelegten Kegelschnittbüschel dasjenige Element v wählen, welches in C von der Geraden CE berührt wird. Haben P_1, P_2

die frühere Bedeutung und ist wieder C_2 der zu $C_1 = CE.\ o$ in (ω) gehörige Punkt, dann liegt der Schnitt K der Geraden CC_2, DP_2 auf v; denn C_1, C_2 sind inbezug auf v konjugiert, und da dieser Kegelschnitt C_1C in C berühren soll, so ist CC_2 die Polare von C_1 inbezug auf v und geht durch den Pol von o bezüglich v; die Geraden DP_1, DP_2 schneiden v in zwei Punkten, deren Verbindungsgerade gleichfalls durch den soeben erwähnten Pol geht. Da aber der eine Schnittpunkt mit C indentisch ist, so fällt die letztgenannte Verbindungsgerade mit CC_2 zusammen, und der zweite Schnittpunkt von v mit DP_2 fällt deshalb mit K zusammen, und C_1K ist Tangente in K an v, wodurch dieser Kegelschnitt hinreichend bestimmt ist.

Es sei G_1 der Schnitt von g mit o und M der Schnitt von G_1C mit v. Schneiden wir den Büschel (vu) diesmal mit den Geraden CE und DM, so ergibt sich hier, da CM und EF sich auf o schneiden, dass also umgekehrt die Gerade g von DM im fraglichen Punkt F getroffen wird.

Dies ergibt unter anderen folgende Konstruktion von F.

Wir verbinden den Schnitt von DP_2 und CG_1 mit C_1 und bringen die Verbindungsgerade mit CD zum Schnitt, den wir weiter mit K verbinden. Die so erhaltene Verbindungsgerade trifft G_1C in M und MD legt auf g den Punkt F fest.

In ähnlicher Weise kann v benützt werden, um den Schnitt F irgend einer Geraden durch D mit u zu ermitteln.

Da CK durch den Pol von o inbezug auf v geht, so schneiden die Geraden MC, MK die Involutionsachse o in zwei sich entsprechenden Punkten von (ω), d. h. KM trifft o im Punkte G_2, welcher G_1 entspricht, und die Geraden KG_1, CG_2 schneiden sich auf v in einem Punkte Q^*.

$CDKQ^*$ ist ein einfaches dem Kegelschnitt v eingeschriebenes Viereck. Bezeichnen wir die Schnittpunkte von g mit v durch V, V', mit CD durch G'_1, mit CQ^* durch I und schliesslich mit DK durch II, so bilden offenbar die Punktepaare VV', $G_1G'_1$, $I\ II$ eine Involution auf g; dieselbe Involution wird auf g durch die Gegenseitenpaare des einfachen Vierecks CDP_2G_2 festgelegt. Die Gerade g schneidet aber auch den Büschel (vu) in einer Involution, welcher die Paare VV', $G_1G'_1$, EF angehören und welche demnach mit der vorigen identisch ist. Daraus folgt, dass die drei Punktepaare $G_1G'_1 . I\ II . EF$ gleichfalls in Involution liegen und dass deshalb der Kegelschnitt r, welcher

durch die Punkte C, D, E und P_2, G_2 geht, die Gerade g noch im fraglichen Punkte F schneidet.

So gelangen wir zum Ergebnis:

Um auf einer beliebigen Geraden g durch einen der gegebenen reellen Punkte E den zweiten Schnittpunkt F mit dem gegebenen Kegelschnitt zu ermitteln, bestimmen wir in der Involution (ω) auf o den zu $P_1 = CD\,.\,o$ konjugierten Punkt P_2 und den zu $g.o$ konjugierten Punkt G_2; alsdann ist F der Schnittpunkt von g mit dem durch die Punkte C, D, E, P_2, G_2 gelegten Kegelschnitt.

Dieses Resultat stimmt mit dem in den ersten 3 Jahrgängen der Monatshefte für Mathematik und Physik auf verschiedenen Wegen entwickelten überein.

Die duale Übertragung unserer Betrachtungen gibt die Konstruktion eines Kegelschnittes aus 3 reellen und 2 konjugiertimaginären Tangenten.

7. Wir schreiten an die Lösung der Aufgabe:

Es ist ein Kegelschnitt u zu konstruieren, für den gegeben sind ein reeller Punkt A und zweimal zwei konjugiert imaginäre Punkte B, C und D, E.

Die Punkte B, C seien als Doppelpunkte einer elliptischen Involution (α) auf der Geraden a und die Punkte D, E als Doppelpunkte einer ebensolchen Involution (β) auf der Geraden b gegeben.

Eine schöne lineare Konstruktion des Kegelschnittes aus 3 reellen Punkten A, B, C und 2 konjugiert imaginären auf einer reellen Geraden o liegenden Punkten findet man in Chr. Wiener's Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, I. Bd. (1884, P. 279). Darin wird zunächst derjenige Punkt A_1 des Kegelschnittes bestimmt, für welchen AA_1 durch den Pol von o inbezug auf ihn geht, vorauf dann der Kegelschnitt erzeugt wird durch die Strahlenbüschel um A und A_1, in denen je zwei sich entsprechende Strahlen durch zwei konjugierte Punkte derjenigen Involution auf o gehen, welche die gegebenen imaginären Punkte des Kegelschnittes zu Doppelpunkten hat.

Auf diesen speziellen Fall kann man die Konstruktion unserer Aufgabe leicht überführen, indem man zunächst denjenigen Punkt A_1 von u ermittelt, dessen Verbindungsgerade mit A durch den Pol B' von b inbezug auf u geht, wodurch dann für die weitere Konstruktion die imaginären Punkte B, C auf a entbehrlich werden.

Zu dem Zwecke betrachten wir den Strahlenbüschel um A. Irgend ein Strahl q desselben schneide a in Q_α, b in Q_β, und es sei Q'_β der dem Punkte Q_β in (β) zugeordnete Punkt. Nun können wir dem Strahl q die Gerade $Q_\alpha Q'_\beta$ zuordnen. Dreht sich q um A, dann umhüllt $Q_\alpha Q'_\beta$ einen Kegelschnitt v, welcher auch die Geraden a und b berührt. Der Strahleninvolution, welche (α) von A aus projiziert, ist auf diese Weise eine Tangenteninvolution (τ) von v zugeordnet. Die konjugierten Tangenten von (τ) schneiden sich in den Punkten der Involutionsachse d, deren Pol bezüglich v bereits der gesuchte Punkt A_1 auf u ist.

Denn die Doppeltangenten der Involution (τ) gehen durch die imaginären Punkte B, C auf a. Wird die Gerade b von BA in B_1, von CA in C_1 getroffen und sind B_2, C_2 die zu B_1, beziehungsweise C_1 in der Involution (β) gehörigen Punkte, so sind BB_2, CC_2 die erwähnten Doppeltangenten. Nun möge u von BB_2 noch in X und von CC_2 in Y geschnitten werden. Weil der Punkt B auf u mit zwei konjugierten Punkten von (β) durch BB_1, BB_2 verbunden ist, so geht die Verbindungsgerade AX durch den Pol von b inbezug auf u. Analog geht AY durch diesen Pol. Infolgedessen sind die Geraden AX, AY identisch und es fallen auch die Punkte X und Y auf u in einen einzigen Punkt A_1 zusammen, welcher im Schnitt der Tangenten BB_2, CC_2 von v liegt.

Wir gelangen dadurch zur folgenden Konstruktion von A_1.

Es sei P_α der in (α), P_β der in (β) dem Punkte $P = a.b$ zugeordnete Punkt. Wir schneiden a mit $P_\beta A$ in L_1, ermitteln den zu L_1 gehörigen Punkt L_2 in (α); weiter schneiden wir $L_2 A$ in M_1 mit b und suchen den zu M_1 in (β) gehörigen Punkt M_2.

Es bilden nun die Geraden a und $L_2 M_2$ ein Paar in der Involution (τ).

Weiter verbinden wir P_α mit A und zum Schnitt N_1 der Verbindungsgeraden mit b suchen wir in (β) den zugeordneten Punkt N_2. Wir ersehen, dass die Geraden b, $N_2 P_\alpha$ ein zweites Paar in (τ) bilden, so dass $L_2 N_2$ die Involutionsachse von (τ) ist.

Ist H der Schnitt von $L_2 M_2$ mit $P_\alpha N_2$, so haben wir lediglich PH mit $P_\alpha M_2$ zum Schnitt zu bringen. Der Schnittpunkt ist bereits der gesuchte Punkt A_1

Denn a, b, $P_a N_2$, $L_2 M_2$ bilden ein dem Kegelschnitt v umgeschriebenes Vierseit, in dessen Diagonaldreieck die Seite $L_2 N_2$ der Ecke A_1 gegenüberligt.

Es ist also tatsächlich A_1 der Pol von $d = L_2 N_2$ bezüglich v.

Verbindet man nun irgend einen Punkt auf b mit A und den ihm in (β) zugehörigen Punkt mit A_1, so schneiden sich die Verbindungsgeraden in einem weiteren Punkt von u.

8. Das erwähnte Prinzip, welches in Wiener's Buch zur Konstruktion eines Kegelschnittes aus 3 reellen und 2 imaginären Punkten benützt wird, lässt sich in einfachster Weise auf den Fall übertragen, in welchem der Kegelschnitt durch einen reellen Punkt A und zwei Paare imaginärer Punkte BC, DE wie zuvor angegeben wurde, festgelegt ist.

Es werde wieder der zu $P = a.b$ in (α) gehörige Punkt durch P_α, in (β) durch P_β bezeichnet und weiter sei $M_\alpha M'_\alpha$ irgend ein Elementenpaar von (α) und $N_\beta N'_\beta$ irgend ein Elementenpaar von (β). Die Gerade $p = P_\alpha P_\beta$ möge von $M_\alpha N_\beta$ in H von $M'_\alpha N'_\beta$ in H' geschnitten werden, und L sei der Schnittpunkt von $M_\alpha N_\beta$ mit $M'_\alpha N'_\beta$.

Fassen wir den Kegelschnitt k ins Auge, welcher durch die Punkte H, H', L geht und von den Geraden PH, PH' berührt wird. Wenn wir die Punkte der Involutionspaare in (α) mit H und H' verbinden, so schneiden sich die Verbindungslinien in weiteren Punkten von k und schneiden die Gerade b in Paaren von (β) und umgekehrt. Sowohl (α) als auch (β) sind also auch Involutionen von konjugierten Punkten des Kegelschnittes k. Dieser Kegelschnitt geht deshalb durch die 4 imaginären Punkte B, C und D, E; er bestimmt mit dem Geradenpaar ab einen Kegelschnittbüschel, dem auch der Kegelschnitt u angehört.

Soll jetzt auf einer beliebigen Geraden g durch A der zweite Schnittpunkt F mit u konstruiert werden, so schneiden wir g mit a in G_α, mit b in G_β und ermitteln zu diesen Punkten die zugehörigen Punkte G'_α, G'_β in (α), beziehungsweise (β), ziehen die Gerade $h = G'_\alpha G'_\beta$ und legen alsdann den Kegelschnitt k so fest, dass er durch die Punkte $H_1 = g \,.\, h$, $H = g \,.\, p$, $H' = h \,.\, p$ geht und von den Geraden PH, PH' berührt wird. Der Kegelschnittbüschel (ab, k), welchem auch u angehört, wird von g in einer Involution geschnitten. Dieser Involution gehören die Punkte G_α, G_β als ein Paar, die Punkte H, H_1, welche die Schnittpunkte mit k sind, als ein zweites Paar an; der

Punkt F ist der zu A gehörige Punkt dieser Involution und kann als solcher leicht konstruiert werden.

Die Punktepaare $G_\alpha G_\beta$, HH_1 werden hier auch als Schnittpunkte von Gegenseitenpaaren des einfachen Vierecks $P_\alpha G'_\alpha G'_\beta P_\beta$ festgelegt und aus diesem Grunde geht der durch A gelegte und diesem Viereck umschriebene Kegelschnitt auch durch den verlangten Punkt F.

Wir haben somit nachstehende Konstruktion des Punktes F.

Zu den Schnittpunkten der Geraden g mit a und b suchen wir die in (α) und (β) entsprechenden Punkte G'_α, G'_β und ermitteln F als Schnittpunkt des durch P_α, P_β, G'_α, G'_β, A festgelegten Kegelschnittes mit g.

Dadurch sind wir wieder zu einem Ergebnis gelangt, welches in den 3 ersten Jahrgängen der Monatshefte für Mathematik und Physik mannigfach hergeleitet ist.

9. *Im Folgenden soll für den durch den reellen Punkt A und die konjugiert imaginären Punktepaare BC, DE gegebenen Kegelschnitt u die Tangenten t in A direkt konstruiert werden.*

Wir ziehen durch A eine Gerade g, welche wieder a in G_α, b in G_β und $P_\alpha P_\beta$ in H_1 schneiden möge und verbinden die G_α und G_β in den Involutionen (α), (β) entsprechenden Punkte G'_α, G'_β durch die Gerade h, welche wir mit $P_\alpha P_\beta$ in H_2 und mit g in V zum Schnitt bringen. Weiter betrachten wir den Kegelschnitt v, welcher durch die Punkte H_1, H_2, V geht sowie PH_1, PH_2 berührt. Die Kegelschnitte v, u gehören mit dem Geradenpaar ab demselben Büschel (uv) an, und es wird deshalb der Schnittpunkt R der Polaren l und m von A inbezug auf v und ab der gesuchten Tangente t angehören.

Betrachten wir noch den zweiten Schnittpunkt L von AH_2 mit v, so ist $H_1 L H_2 V$ ein dem Kegelschnitt v eingeschriebenes Viereck, A ist ein Diagonalpunkt desselben, und folglich ist die A gegenüberliegende Seite seines Diagonaldreiecks die Polare l von A bezüglich v. Den Punkt L würden wir erhalten als Schnittpunkt der Wechselstrahlen von $H_1 V$, $H_2 V$ inbezug auf PA.

Wird also PA von $H_2 V$ in S getroffen, so schneidet SH_1 die Gerade AH_2 bereits im Punkte L, und es ist l harmonisch getrennt von A durch SH_1 und SH_2. Bezeichnen wir noch die Schnittpunkte von SH_1 mit a und b beziehungsweise durch N'_α, N'_β. Die Polare

m von A inbezug auf ab ist durch dieses Geradenpaar harmonisch getrennt von PA. Wir haben somit die Gleichheiten:

$$S\,(H_1,\ H_2,\ A,\ R) = (a,\ b,\ PA,\ m) = -1, \qquad (1)$$
$$S\,(H_1,\ H_2,\ A,\ R) = (b,\ a,\ PA,\ m) = -1. \qquad (2)$$

Sowohl die Strahlenbüschel in (1) als auch die in (2) sind perspektiv, und es ist in (1)

$$SH_1\,.\,a = N'_{\alpha},\ SH_2\,.\,b = G'_{\beta},\ SR\,.\,m = R$$

und in (2)

$$SH_1\,.\,b = N'_{\beta},\ SH_2\,.\,a = G'_{\alpha},\ SR\,.\,m = R.$$

Folglich schneiden sich die Geraden $N'_{\alpha}G'_{\beta}$, $N'_{\beta}G_{\alpha}$ im gesuchten Punkt R von t.

Wir wollen zwei Strahlen, welche aus den Trägern a, b zweier Punktinvolutionen je ein Elementenpaar herausschneiden, auch als Wechselstrahlen benennen. Die Geraden SH_1, AH_2, da sie sich auf v in L schneiden, sind deshalb auch zwei derartige Wechselstrahlen von (α) und (β). Die Konstruktion der fraglichen Tangente kann jetzt wie folgt beschrieben werden.

Wir ziehen durch A irgend eine Gerade g und ermitteln ihren Wechselstrahl bezüglich der Involutionen (α) und (β), welcher a in G_{α}', b in G_{β}' treffen möge. Es seien H_1, H_2 die Schnitte von $P_{\alpha}P_{\beta}$ mit g und $G_{\alpha}'G_{\beta}'$. Wir konstruieren weiter den Wechselstrahl n' zu $n = AH_2$ als Verbindungsgerade des Punktes $S = PA\,.\,G_{\alpha}'G_{\beta}'$ mit dem Punkte H_1. Dieser Wechselstrahl möge a in N_{α}', b in N_{β}' treffen. Alsdann schneiden sich die Geraden $G_{\alpha}'N_{\beta}'$, $G_{\beta}'N_{\alpha}'$ im Punkte R der gesuchten Tangente $t = RA$.

Der Punkt R ist sowohl durch die Punkte G'_{α}, N'_{β} als auch durch die Punkte G_{β}', N'_{α} von der Geraden PA harmonisch getrennt, und es liegen somit die Punkte G_{α}', G_{β}', N_{α}', N_{β}', A auf einem Kegelschnitte q, welcher t in A berührt, und für den PA die Polare von R ist.

Wir konnten allgemein von irgend zwei Wechselstrahlen von (α) und (β), die sich in V und die Gerade $P_{\alpha}P_{\beta}$ in H_1 und H_2 schneiden mögen, bei der Konstruktion ausgehen. Dann hätte man in analoger Weise, wie wir es soeben gemacht haben, die Wechselstrahlen zu AH_1, AH_2 mit Hilfe des Kegelschnittes konstruieren können, welcher

in H_1 und H_2 von PH_1, beziehfungsweise PH_2 berührt wird und durch V geht. Schnitten diese Wechselstrahlen in G_α', G_β', beziehungsweise N_α', N_β' die Geraden a, b so würde wieder der Schnitt von $G_\alpha' N_\beta'$ mit $G_\beta' N_\alpha'$ einen Punkt R von t liefern, und wieder lägen die Punkte G_α', G_β', N_α', N_β' A auf einem Kegelschnitte q, für welchen $t = RA$ Tangente in A wäre.

Wir bemerken noch, dass der Kegelschnitt q die Geraden AH_1, AH_2 ausser in A noch in weiteren zwei Punkten schneidet, welche auch dem Kegelschnitt u angehören. Denn ist K der Schnittpunkt von $H_1 A$ mit dem Kegelschnitt v, wobei im ersten Fall $K \equiv V$, und sind G_α, G_β die Schnittpunkte von AH_1 mit a und b, so folgt aus dem Satz von Desargues für das dem Kegelschnitt q eingeschriebene Viereck $G_\alpha' G_\beta' N_\alpha' N_\beta'$, dass die Punktepaare $G_\alpha G_\beta$, $H_1 K$ auf AH_1 eine Involution bestimmen, welcher auch die Schnittpunkte A, F mit q als ein Paar angehören. Da nun die Involution, in welcher der Büschel (vu) von AH_1 geschnitten wird, mit der soeben erwähnten Involution identisch ist, so ist F auch der Schnittpunkt von AH_1 mit u.

Hat man die Tangente von u in A konstruiert, so kann man gleich eine zweite Tangente t_1 angeben, welche durch den Punkt $t \,.\, P_\alpha P_\beta$ geht und von t durch P und $P_\alpha P_\beta$ harmonisch getrennt ist. Ihr Berührungspunkt A' liegt auf AP. Ermittelt man weiter etwa den zu $t \,.\, b$ in (β) konjugierten Punkt 1, so schneiden sich $1A$ und $P_\beta A'$ in einem weiteren Punkte des Kegelschnittes u, was daraus folgt, dass die Gerade $1A$ als Polare von $t \,.\, b$ den Pol von b inbezug auf u enthält und dass also, da AA', $P_\beta A'$ durch zwei konjugierte Punkte von (β) gehen, die Gerade $P_\beta A'$ von der Geraden $1A$ im Punkte F auf u getroffen werden muss.

10. Wir wollen die Konstruktion des Kegelschnittes u, für den die gegebenen Elemente teilweise imaginär sind, so zustande bringen, dass wir u mit einem zweiten Kegelschnitt v derart verknüpfen, dass dieser aus den gegebenen Stücken von u leicht durch reelle Elemente dargestellt werden kann. Eine solche Verknüpfung zweier Kegelschnitte kann auf Grund folgenden Zusammenhanges hergestellt werden. Es sei ein Kegelschnitt v und eine Punktinvolution (α) auf einer Geraden a gegeben. Die von jedem Paare in (α) ausgehenden Tangenten an v schneiden sich in vier neuen Punkten und die Schnittpunkte, welche derart sämtliche Paare in (α) liefern, bilden bekanntlich einen zweiten Kegelschnitt u, welcher durch die Doppelpunkte der Involution (α) geht.

Der Kegelschnitt u sei gegeben durch die zwei konjugiert imaginären Punkte A, B auf a als Doppelpunkte einer elliptischen Involution (α) *und durch drei reelle Punkte C, D, E; man soll den von E verschiedenen Schnittpunkt F irgend einer durch E gehenden Geraden g mit u suchen.*

Es schneide g die Gerade a in Q_1. Wir konstruieren zunächst den zu Q_1 gehörigen Punkt Q_2 in (α) und bezeichnen die Gerade EQ_2 kurz h. Der zum Schnitt P von CD mit a in (α) gehörige Punkt sei P_1.

Durch die Geraden $1 = P_1 C$, $2 = P_1 D$, $3 = CD$, g und h als Tangenten ist ein Kegelschnitt v bestimmt. Bringen wir ihn in der zuvor angegebenen Weise mit der Involution (α) in Beziehung. Die Schnittpunkte der Tangenten aus den Punktepaaren von (α) an v bilden einen Kegelschnitt, welcher durch die Punkte C, D, E geht und die Doppelpunkte A, B der Involution (α) enthält, somit der gegebene Kegelschnitt u ist.

Es ist klar, dass die von h verschiedene Tangente vom Punkte Q_2 an v die Tangente g im fraglichen Punkt F trifft.

Wir haben somit nach dem Satz von Brianchon an den durch die Tangenten 1, 2, 3, g, h bestimmten Kegelschnitt die zweite Tangente l durch den Punkt Q_2 *auf h zu legen, welcher g im Punkte F des Kegelschnittes u trifft.*

Die Tangente l an v bekommen wir aus dem Brianchonsechsseit $123hlg$. Eine Diagonale desselben ist a, eine weitere verbindet die Punkte $N = 3 . h$ und $R = 1 . g$. Durch den Schnitt M beider geht auch die dritte Diagonale, welche den Punkt $D = 2 . 3$ enthält. Somit schneidet die Gerade DM die gegebene Gerade g im fraglichen Punkt F von u.

In dieser Anordnung können wir der Konstruktion eine andere Bedeutung beimessen. Nämlich die Punkte N, R, M, welche auf einer Diagonale des soeben betrachteten Brianchonsechsseits liegen, sind auch Schnittpunkte der Gegenseiten in dem einfachen Sechseck $DCP_1 Q_2 EF$. Dieses Sechseck ist deshalb ein Pascalsches und durch seine Eckpunkte lässt sich ein Kegelschnitt legen. Dies gibt also folgende Konstruktion:

Wir ermitteln zum Schnitt von g mit a den in (α) *entsprechenden Punkt* Q_2 *und bringen den durch die Punkte* C, D, E, Q_2, P_1 *bestimm-*

ten Kegelschnitt mit der Geraden g nochmals zum Schnitt; dieser Schnitt ist der gesuchte Punkt F.

Dadurch sind wir neuerdings zu dem in Artikel 6 abgeleiteten Ergebnis gelangt.

11. Die selbstverständlichen dualen Betrachtungen, welche wir hier einmal erwähnen wollen, würden hier von einem Satz ausgehen, der einen Kegelschnitt v mit einer Strahleninvolution (α) im Strahlenbüschel A in Beziehung bringt und dies in der Art, dass man die Schnittpunkte eines jeden Paares von (α) mit dem Kegelschnitt v durch Gerade verbindet, welche insgesamt einen Kegelschnitt u umhüllen.

Sind von einem Kegelschnitt u zwei konjugiert imaginäre Tangenten a, b als Doppelstrahlen einer elliptischen Involution (α) im Strahlenbüschel A und ausserdem drei reelle Tangenten c, d, e gegeben, so ergibt sich hieraus folgende Konstruktion einer weiteren Tangente von u, welche etwa durch den beliebig auf e angenommenen Punkt G geht.

Wir konstruieren zu dem Strahl p, welcher A mit dem Punkte $3 = c . d$ verbindet, den in (α) konjugierten Strahl p_1, welcher c in 1, d in 2 schneiden möge, ferner konstruieren wir die zu $q_1 = AG$ entsprechende Gerade q_2 in (α), deren Schnitt mit e durch H bezeichnet werde, und in dem durch die Punkte 1, 2, 3, G, H bestimmten Kegelschnitt r konstruieren wir schliesslich die Verbindungsgerade des Punktes G mit dem von H verschiedenen Schnittpunkt L der Geraden q_2. Alsdann ist $f = GL$.

Um die Durchführung der Konstruktion einfach zu gestalten, benützen wir das Pascalsche Sechseck $1\,2\,3HLG$ aus dem wir schliesslich zu der nachstehenden Konstruktion geführt werden.

Wir konstruieren zum Strahl p welcher A mit $c . d$ verbindet, sowie zum Strahl AG jeweil den in (α) entsprechenden Strahl p_1, resp. q_2; die Geraden d, c, p_1, q_2, e bestimmen als Tangenten einen Kegelschnitt, an den wir die von e verschiedene Tangente durch G zu legen haben. Diese Tangente f gehört bereits dem Kegelschnitte u an.

12. Der betrachtete Zusammenhang der Kegelschnitte u und v führt auch zu einer

Konstruktion eines Kegelschnittes u, welcher durch zwei Paare konjugiert imaginärer Punkte A, B und C, D und durch einen reellen Punkt E gegeben *ist.*

Es seien wieder die Punkte A, B und C, D Doppelpunkte seiner elliptischen Involution (α) auf a, resp. (β) auf b. Wir wollen wieder den von E verschiedenen Schnitt F der Geraden g durch E mit dem gegebenen Kegelschnitt suchen.

Zu dem Zwecke legen wir den Kegelschnitt v in gleicher Weise wie zuvor fest.

Wir konstruieren also zu dem Punkte $G_\alpha = g\,.\,a$ den in (α) konjugierten G_α' und verbinden ihn mit E durch die Gerade h. Haben hier auch die Punkte P_α, P_β die frühere Bedeutung, so sind die Geraden $P_\alpha C$, $P_\alpha D$, b, g, h fünf Tangenten eines Kegelschnittes v, wodurch derselbe bestimmt ist. Freilich sind da die Tangenten $P_\alpha C$, $P_\alpha D$ imaginär, aber als Doppelelemente der Strahleninvolution, welche (β) von P_α aus projiziert, sind sie auch vollkommen bestimmt. Nach Vorangehendem sind wir in der Lage weitere reelle Tangenten von v linear zu konstruieren.

Um den Punkt F zu finden hat man somit die von h verschiedene Tangente l durch G_α' an v zu legen; ihr Schnittpunkt mit G ist F.

Ist G_β' der zu $G_\beta = g\,.\,b$ in (β) gehörige Punkt, so ist l auch die Tangente an den Kegelschnitt, welcher die Geraden b, g, h, $p = P_\alpha P_\beta$, $q = P_\alpha G_\beta'$ berührt, und kann als solche mit Hilfe eines Brianchonsechsseits ermittelt werden. Wählen wir das Sechsseit $pqbhlg$. Zwei Diagonalen desselben sind a und RS, wenn R den Schnittpunkt $b\,.\,h$ und S den Schnittpunkt $p\,.\,g$ bezeichnet. Somit geht durch den Schnitt M von RS mit a die dritte Diagonale $G_\beta' M$, welche die Gerade g im gesuchten Punkt F schneidet.

Dieser Konstruktion kann mann aber auch noch eine andere Bedeutung beilegen.

In der soeben beschriebenen Figur befindet sich nämlich das einfache Sechseck $EG_\alpha' P_\alpha P_\beta G_\beta' F$, dessen Gegenseiten sich in den Punkten

$$R = EG_\alpha'\,.\,P_\beta G_\beta',$$
$$M = G_\alpha' P_\alpha\,.\,G_\beta' F,$$
$$S = P_\alpha P_\beta\,.\,FE$$

schneiden. Da diese Punkte auf einer Geraden, welche eine Diagonale des zuvor betrachteten Sechsseits ist, liegen, so ist dieses Sechseck ein Pascalsches.

Somit *ist F der von E verschiedene Schnittpunkt der Geraden g mit dem durch die Punkte E, P_α, P_β, G_α', G_β' gelegten Kegelschnitt.*

Dies ist ein Ergebnis, zu welchem wir in Artikel 8 auf anderem Wege geführt worden sind.

13. Zum Schluss behandeln wir noch die folgenden Aufgaben, welche für unseren Gegenstand in konstruktiver Beziehung von Interesse sind.

a) Ein Kegelschnitt u ist durch 3 reelle und zwei konjugiert imaginäre Punkte gegeben; man soll von ihm 2 weitere reelle Punkte ermitteln, deren Konstruktion so einfach als möglich ist.

C, D, E seien wieder die reellen Punkte, während die imaginären Punkte A, B Doppelpunkte einer elliptischen Involution auf a sein mögen. Diese Involution betrachten wir als gegeben durch das Punktepaar PP', in welchem $P = CD \,.\, a$ ist und dann durch irgend ein weiteres Punktepaar QQ'.

Wir bestimmen analog dem Früheren den Kegelschnitt v durch die Tangenten $1 = P'C$, $2 = P'D$, $3 = EQ$, $5 = CD$,. $6 = EQ'$ und konstruieren für ihn die zweite durch P gehende Tangente aus dem Brianchonsechsseit 1 2 3 4 5 6; die so ermittelte Tangente schneidet $P'C$ und $P'D$ in den Punkten H, K, welche dem Kegelschnitt u angehören.

Hiemit ist unsere Aufgabe gelöst.

Alle Hilfskegelschnitte v, die wir früher benützt haben, berühren die Geraden CD, $P'C$, $P'D$ und ihre Tangentenpaare durch E gehören der Involution an, welche (α) von E aus projiziert; sie bilden deshalb eine Kegelschnittschar und haben insgesamt noch eine vierte Tangente gemeinschaftlich. Diese ist offenbar identisch mit der soeben gefundenen Tangente 4.

b) Ein Kegelschnitt u ist durch einen reellen Punkt E und zweimal zwei konjugiert imaginäre Punkte A, B und C, D gegeben, man soll von ihm vier weitere reelle Punkte auf möglichst einfache Weise ermitteln.

Es seien wieder A, B und C, D als Doppelpunkte der elliptischen Involutionen (α) auf a, beziehungsweise (β) auf b definiert; (α) sei gegeben durch die Paare PP_α, $G_\alpha G_\alpha'$; (β) durch die Paare PP_β, $N_\beta N_\beta'$, wobei $P = a . b$.

Wir ermitteln zunächst den Schnittpunkt F von $g = EG_\alpha$ mit u, indem wir den Kegelschnitt v durch die Tangenten g, $h = EG_\alpha'$, b, $P_\alpha C$, $P_\alpha D$ festlegen und seine Tangente l durch G_α' konstruieren. Es geschieht dies nach Früherem in der Weise, dass wir zu $G_\beta = g . b$ den in (β) konjugierten Punkt G_β' aufsuchen und dann etwa das Brianchonsechsseit $pqghlb$ ermitteln, wobei wir noch $p = P_\alpha P_\beta$, $q = P_\alpha G_\beta'$ gesetzt haben. Der Schnittpunkt M von $P_\beta E$ mit a ist für dasselbe der Diagonalenschnittpunkt, dessen Verbindungsgerade mit $q . g$ die Gerade b in einem Punkte L von $l = LG_\alpha'$ trifft, so dass $F = l . g$.

Die Gerade EP schneidet u in einem weiteren Punkte H, welcher von E durch p und a harmonisch getrennt ist. Wir verbinden M mit $p . PE$ durch eine Gerade, bringen diese mit b zum Schnitte und verbinden den Schnittpunkt mit P_α durch die Gerade m. Der Punkt H ergibt sich so als Schnitt von m mit PE. Damit haben wir bereits drei reelle Punkte E, F, H für u.

Der Schnittpunkt $K = l . m$ ist ein vierter und der Schnitt R von $G_\alpha K$ mit h ist ein fünfter reeller Punkt von u.

Um dies einzusehen bezeichnen wir mit A' den Pol von a inbezug auf u. Weil PH und $m = P_\alpha H$ durch zwei konjugierte Punkte von (α) gehen, so liegt der Schnittpunkt K von m mit EA' auf u; weil aber auch die Geraden g, l ein gleiches Verhalten aufweisen, so liegt, da g den Kegelschnitt u noch in E schneidet, auch der von F verschiedene Schnittpunkt der Geraden l mit u auf EA', so dass sich EA', l, m in einem Punkte auf u treffen müssen. Es ist also tatsächlich $K = l . m$ ein Punkt von u. Weil schliesslich EK durch den Pol A' von a inbezug auf u geht und G_α, G_α' ein Par von (α) bilden, so treffen sich $G_\alpha' E$, $G_\alpha K$ gleichfalls in einem Punkte R von u.

Die Geraden PK, PR, PF werden beziehungsweise von den Geraden $P_\alpha E$, $P_\alpha F$, $P_\alpha R$ in drei weiteren Punkten des Kegelschnittes u getroffen.

Die dualen Beziehungen und Konstruktionen ergeben sich hier wie überall von selbst. Unsere Absicht war zu zeigen, wie sich eine Reihe bekannter nebst einer Reihe neuer hier zu Tage tretenden Konstruktionen aus einfachen Kegelschnitteigenschaften auf kurzem Wege und direkt herleiten lässt.



XXI.

Zur Konstruktion der Oskulationshyperboloide von Regelflächen.

Von J. Sobotka.

Vorgelegt in der Sitzung am 11. Oktober 1907.

1. Eine windschiefe Regelfläche F sei durch drei Leitkurven gegeben. Sie wird also erzeugt durch die gemeinschaftlichen Transversalen derselben.

Wir behandeln hier die Aufgabe, für diese Fläche das Oskulationshyperboloid H längs irgend einer Erzeugenden p zu konstruieren. Trifft p die gegebenen Leitkurven beziehungsweise in den Punkten A, B, C, und sind a, b, c irgend welche Kegelschnitte, welche diese Kurven in den Punkten A, B resp. C oskulieren, so kann bei der Lösung der gestellten Aufgabe die Fläche F durch die Regelfläche P ersetzt werden, welche die Kegelschnitte a, b, c zu Leitkurven besitzt. Verschiedene Autoren haben auf mannigfache Weise Konstruktionen von H gegeben. Der Zweck unserer Betrachtungen ist nun der, dass wir zeigen, wie sich die Konstruktion einer allgemeinen Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten bequem auch für die Konstruktion von H verwerten lässt.

Das Hyperboloid H kann ja auch als durch 9 Punkte gegebeu betrachtet werden, welche hier in drei Gruppen zu dreien, wie es bei der allgemeinen Konstruktion geschieht, in einziger Weise eingeteilt erscheinen; nämlich in der Ebene A von a liegt der Punkt A und seine zwei auf a unendlich benachbarten Punkte A_1, A_2; in der

Ebene B von b liegt der Punkt B und seine zwei auf b unendlich benachbarten Punkte B_1, B_2, und schliesslich in der Ebene C von c liegt der Punkt C und seine Nachbarpunkte C_1, C_2 auf c, welche alle unserer Fläche H angehören und dieselbe im Allgemeinen eindeutig bestimmen. — Von den bekannten Konstruktionen der Fläche 2. Ordnung aus neun Punkten wollen wir wegen ihrer Einfachheit diejenige heranziehen, welche von J. Thomae und K. Rohn herrührt.[1])

Wir suchen also die Polarebene S des Punktes S, in welchem sich die Ebenen A, B, C schneiden inbezug auf H. Wir betrachten zunächst die Ebenen A, B; ihre Schnittgerade sei s. Durch irgend zwei Punkte auf s geht ein Kegelschnitt a_1, welcher a in A oskuliert und ein Kegelschnitt b_1, welcher b in B oskuliert. Zwei derartige Kegelschnitte wollen wir verknüpfte Kegelschnitte nennen. Die Polaren von S in bezug auf a_1 und b_1 liegen in einer Ebene E. Ändern wir die Lage der gewählten Punkte auf s, so ändert sich auch die Ebene E, aber alle derartigen Ebenen schneiden sich in einem Punkte O_1, welcher der Polarebene S angehört.

Um also O_1 zu erhalten, wählen wir auf s zuerst den Punkt S selbst und den Punkt T_1 auf der Tangente t_1 im Punkte A an a. Der Kegelschnitt a_1 zerfällt hier in das Geradenpar SA, t_1 während der Kegelschnitt b_1 im Allgemeinen nicht degeneriert. Die Polare von S inbezug auf a_1 ist somit SA, während die Polare l von S bezüglich b_1 diesen Kegelschnitt in S berührt und leicht mit Hilfe der centrischen Kollineation zwischen b und b_1, für welche B das Centrum ist, erhalten wird. Hiedurch haben wir eine Ebene $E_1 = lA$ erhalten.

Weiter wählen wir auf s den Punkt S und den Punkt T_2, in welchem die Tangente t_2 in B an b getroffen wird. Wir bestimmen mit Hilfe einer centrischen Kollineation mit A als Centrum für den zu a entsprechenden Kegelschnitt a_2, welcher durch T_2 und S geht und a in A oskuliert, die Tangente m in S. Hiedurch haben wir eine zweite Ebene $E_2 = mB$ erhalten.

Schliesslich wählen wir auf s das Punktepaar $T_1 T_2$. Jetzt degeneriet a_1 in die Geraden $T_1 A$, $T_2 A$ und b_1 in $T_1 B$, $T_2 B$. Ist also R der zu S harmonische Punkt bezüglich T_1, T_2, so ist pR die dritte Ebene E_3, welche mit E_2 und E_1 den Punkt O_1 bestimmt.

[1]) Berichte der math.-phys. Kl. d. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig 1892 und 1894. Man sehe auch: Lehrbuch der darstellenden Geometrie von K. Rohn und E. Papperitz. 3. Aufl. 3. Bd. S. 130 u. ff.

Verfährt man in analoger Weise mit den Kegelschnitten in den Ebenen A, C und den entsprechenden verknüpften Kegelschnitten a_1, c_1, gelangt man in gleichfalls sehr einfacher Weise zu einem weiteren Punkte O_2 der Ebene S.

Als dritten Punkt von S konstruieren wir den Berührungspunkt G der Ebene pS mit P und also auch mit H aus der projektiven Beziehung zwischen der Punktreihe auf p und dem Büschel ihrer Berührungsebenen, die ja gegeben ist, da wir die Berührungsebenen in den Punkten A, B, C kennen.

Die Schnittpunkte von GO_1 mit den Ebenen A, B liegen auf deren Schnittgeraden mit der Ebene Rp und sind ohneweiters bestimmt. Ebenso bestimmt man die Schnittpunkte von GO_2 mit den Ebenen A und C. Damit bekommt man für die Spuren von S in den Ebenen A, B, C die zu ihrer Konstruktion nötigen Punkte. Diese Spuren sind die Polaren von S bezüglich der Kegelschnitte, in welchen H die Ebenen A, B, C schneidet, und wir können somit jeden von ihnen einzeln konstruieren, da wir für jeden ausser dem Punkt auf p und seinem Oskulationskegelschnitt auch noch den zu diesem Punkt harmonisch gelegenen Punkt inbezug auf S und die betreffende Polare, sowie die Tangente in diesem Punkte kennen.

Überdies ist die Gerade durch G in Sp, welche zu p harmonisch liegt bezüglich des Punktes S und der Schnittgeraden von S mit Sp die durch G gehende Erzeugende von H.

2. Wir können eine Modifikation der soeben erläuterten Konstruktion vornehmen. Alle Hyperboloide L, welche P, also auch H, längs p berühren und die Kegelschnitte a, b in A, resp. B oskulieren, bilden einen Flächenbüschel (α), welchem auch H angehört. Dieser Büschel ist eben durch die 8 Punkte A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1 festgestellt. Die Polarebenen aller Flächen des Büschels bezüglich irgend eines Punktes Q_σ auf s bilden bekanntlich einen Ebenenbüschel; sie gehen also durch eine Gerade q, welche leicht konstruiert werden kann. Man ermittelt den Punkt $O_\varkappa$, durch den alle Ebenen der Polaren von Q_σ bezüglich je zweier verknüpfter Kegelschnitte in A und B, welche a und b in A, resp. B oskulieren, gehen, in gleicher Weise, wie wir früher den Punkt O_1 konstruiert haben. Durch diesen Punkt gehen die Polarebenen aller Flächen 2. Ordnung, welche a und b in den Punkten A und B oskulieren; somit auch die Polarebenen inbezug auf die Flächen in (α). Da alle Flächen in (α) den Berührungspunkt Q der Ebene pQ_σ gemeinschaftlich haben, so ist q bestimmt als Verbindungsgerade der Punkte Q und $O_\varkappa$.

Bestimmt man noch den Berührungspunkt Q^* der Ebene qp mit (α), so ist $q^* \equiv Q^* Q_\sigma$ Polare von q bezüglich (α); denn für jedes Hyperboloid L in (α) geht die Polarebene von Q_σ durch q; aber auch für Q^* geht die Polarebene, das ist ja die Berührungsebene pq durch q, so dass tatsächlich q^* die Polare von q ist. Würde man diese Konstruktion für irgend einen zweiten Punkt N_σ auf s durchführen, bekäme man die Gerade n als Verbindungsgerade des zu $O_\varkappa$ analogen Punktes O_ν und des Berührungspunktes N der Ebene pN_σ mit dem Büschel (α). Und wenn N^* den Berührungspunkt der Ebene np mit P bezeichnet, hätte man wieder in $n^* = N^* N_\sigma$ die Polare von n bezüglich (α).

Jetzt können wir den Schnitt von einer der Ebenen A, B, C mit dem fraglichen Hyperboloid leicht ermitteln. Wir konstruieren etwa den Schnitt h_γ mit C.

Es seien Q_γ, Q_γ^* und N_γ, N_γ^* die Schnittpunkte von q, q^* und n n^* mit C. Der Kegelschnitt h_γ ist dadurch bestimmt, dass er c in C oskuliert und sowohl die Punkte Q_γ, Q_γ^*, als auch die Punkte N_γ, N_γ^* harmonisch trennt. Alle Kegelschnitte, welche Q_γ, Q_γ^* harmonisch trennen und c in C oskulieren, bilden einen Büschel, gehen also noch durch einen festen Punkt X, den wir erhalten als Schnitt des Kegelschnittes, welcher c in C oskuliert und die Gerade Q_γ Q_γ^*, in einem der Punkte Q_γ, Q_γ^* berührt mit der Geraden, welche von der Tangente t_3 in C an c durch die Geraden CQ_γ, CQ_γ^* harmonisch getrennt ist. Analog bekommen wir den festen Punkt Y, durch den alle den Kegelschnitt c in C oskulierenden Kegelschnitte gehen, welche N_γ, N_γ^* harmonisch trennen. Die Punkte X, Y gehören dem Kegelschnitt h_γ an, wodurch derselbe, da er gleichfalls c in C oskuliert, festgestellt ist.

3. Die bis jetzt beschriebenen Konstruktionen versagen zum Teil, wenn Q_σ auf einer der Tangenten t_1, t_2, beziehungsweise bei den Konstruktionen mit der Ebene C auf der Tangente t_3 liegt; denn hier fällt der Punkt $O_\varkappa$ mit einem der Punkte A, B, beziehungsweise C zusammen. Hier müssen wir somit einen anderen Weg einschlagen.

Betrachten wir zunächst solche Hyperboloide, welche sich längs der Geraden p berühren. Sie gehen also durch sechs Punkte A, B, C, A_1, B_1, C_1; wir können aus ihnen einen Büschel (α) ausscheiden, indem wir unter ihnen solche wählen, welche noch durch zwei weitere feste Punkte gehen. Als solche Punkte wählen wir etwa B_2 und dann noch irgend einen Punkt H_β in B. Die Polarebenen irgend eines Punktes R bezüligch (α) gehen durch eine Gerade. Wählen

wir den Punkt $R \equiv T_2$ auf s; die zugehörige Gerade t geht durch B und liegt in der Berührungsebene $t_2 p$ in B an (α), welch letzteres Ergebnis sich auch aus der früheren Konstruktion von O_1 durch Grenzübergang ergibt. Übrigens ist in (α) eine degenerierende Fläche enthalten, deren Spur in B in das Geradenpaar t_2. BH_β des durch B, B_1, B_2, H_β gehenden Kegelschnittbüschels (φ) zerfällt. Die Kegelschnitte von (α) in A bilden einen Büschel (ψ); dieser geht durch A, A_1, dann durch den Punkt H_α, in welchem A von der dem Büschel (α) angehörenden Geraden geschnitten wird, welche H_β und den Berührungspunkt von $H_\beta p$ mit (α) verbindet. Dieser Büschel enthält also noch einen reellen Grundpunkt Z. Dem Geradenpaar t_2, BH_β in (φ) entspricht nun in (ψ) das Geradenpaar AH_α, AT_2. Also liegt Z auf der Geraden AT_2, und der zu T_2 bezüglich A und Z harmonisch zugeordnete Punkt K ist somit zu T_2 konjugiert bezüglich aller Flächen in (α).

Kürzer hätten wir folgendermassen schliessen können. Die Grenze, zu welcher die degenerierende Fläche in (α) hinneigt, ist das Ebenenpaar pH_β, pT_2. Die Polare von T_2 bezüglich dieses Ebenenpaares ist die Ebene pT_2; sie enthält also auch die Gerade t und schneidet somit jede Fläche von (α) in einem Kegelschnitt, für den t Polare von T_2 ist. Da p ein Teil dieses Kegelschnittes ist, so ist der zweite Teil die zu p harmonische Gerade g_β bezüglich t und t_2. Diese Gerade gehört also jeder Fläche in (α) an.

Nehmen wir jetzt in H statt H_β irgend einen anderen Punkt M_β an; dieser bestimmt mit den übrigen früher gewählten Punkten einen neuen Büschel von Flächen 2. Ordnung (β), und die Polarebenen von T_2 bezüglich (β) werden wieder durch eine feste in pT_2 liegende Gerade t^* gehen, und die Flächen in (β) werden infolge dessen wieder eine weitere durch B gehende Gerade g_β^* gemein haben. Die Büschel (α), (β) haben jedoch eine Fläche gemeinschaftlich, welche B in dem durch H_β, M_β gehenden und b in B oskulierenden Kegelschnitt schneidet. Es muss also t^* auch in der Polarebene von T_2 bezüglich dieser Fläche liegen und deshalb ist $t^* \equiv t$, demnach auch $g_\beta^* \equiv g_\beta$.

Somit haben alle Hyperboloide, welche sich längs einer Geraden p berühren und eine Kurve, welche p in B schneiden möge, in diesem Punkte oskulieren, die zweite durch B gehende Gerade g_β gemeinschaftlich. Diese Gerade gehört also auch dem Oskulationshyperboloid H an.

Dies ist diejenige Beziehung, welche Herr J. Šolín zur Konstruktion von H verwendet hat.[1])

Allgemeiner können wir das Ergebnis unserer Betrachtungen, wie es sofort einleuchtet, wie folgt, aussprechen.

Die Polarebenen eines Punktes P bezüglich aller Hyperboloide, welche sich längs einer Geraden b berühren und eine diese Gerade schneidende Kurve im Schnittpunkte B oskulieren, gehen durch eine feste Gerade q; für alle solche Hyperboloide hat q dieselbe Polare q^*.

Die Gerade q geht offenbar durch den den Hyperboloiden gemeinschaftlichen Berührungspunkt von Pp, die Gerade q^* durch den von qp.

4. Wir kehren zurück zu unserer Aufgabe und nehmen auf der Geraden s den Punkt Q_σ willkürlich an, so können wir zuerst wie in Art. 2 für ihn die Gerade q konstruieren. Wir ziehen wieder auch noch die Gerade q^* in Betracht. Die Gerade q liegt, wie ihre Konstruktion darlegt, in der Ebene $Q^* \equiv qp$, welche die Ebene $Q \equiv Q_\sigma p$ von den Berührungsebenen At_1, Bt_2 in A und B harmonisch trennt; folglich werden auch die Punkte Q^* und Q von A und B harmonisch getrennt sein.

Der Kegelschnitt h_α von H in A trennt die in dieser Ebene liegenden Spurpunkte Q_α, $Q^*_\alpha \equiv Q_\sigma$ der Geraden q und q^* harmonisch und oskuliert a in A; er gehört also einem Büschel (ψ) an, dessen weiterer Grundpunkt U auf AT_2 liegt, weil AT_2 von t_1 auch durch Q_α und Q^*_α harmonisch getrennt ist. Dieser Grundpunkt gehört nach dem im vorangehenden Artikel Gesagten der Geraden g_β von H an, welche durch B geht. Man bekommt U somit wieder als Schnitt eines Kegelschnittes, welcher a in A oskuliert und $Q_\alpha Q_\sigma$ in einem der Punkte Q_α, Q_σ berührt, mit der Geraden T_2A. Analog kann man die Gerade g_α von H, welche durch A geht, ermitteln.

5. In einer Abhandlung in diesen Sitzungsberichten aus dem Jahre 1893 habe ich eine Konstruktion angegeben, wie man die Polaren der Tangenten t_1, t_2, t_3 bezüglich H ermittelt.

Hier möge die Bezeichnung der Gebilde denselben Sinn haben wie im Vorangehenden. Um etwa die Polare von t_2 zu finden, schneiden wir die Berührungsebenen von P in B, A und C mit b in den Punkten B_1, A_0, C_0, so dass t_2, BA_0, BC_0 die Spuren dieser Ebenen in B sind. Weiters bringen wir die Tangenten in A_0 und C_0 an b mit t_2 in A_β, beziehungsweise C_β zum Schnitt; alsdann treffen sich die Geraden $A_\beta A$, CC_β im Punkte V der Polare VB von t_2. Nehmen

[1]) In diesen Sitzungsberichten vom Jahre 1888.

wir jetzt auf b einen beliebigen Punkt I_0 an; seine Tangente an b möge t_2 in I_β treffen, und die Projektionen der Punkte A_0, C_0 von I_0 auf t_2 seien A_t, C_t; es ist

$$(I_\beta A_\beta B A_t) = (I_\beta C_\beta B C_t) = -1 \qquad (1).$$

Die Geraden $A_t A$, $C_t C$, $I_\beta I$ schneiden sich nun in einem Punkte W, welcher der Geraden $g_\beta = BW$ von H angehört.

Es schneidet nämlich $I_\beta V$ die Gerade p im Berührungspunkte I von H mit der Ebene pI_0 und es ist $(BACI) = B(B_1 A_0 C_0 I_0) = (BA_\beta C_\beta I_\beta) = (BA_t C_t I_\beta)$.

Aus der perspektiven Beziehung $(BA_\beta C_\beta I_\beta) = (BACI)$ einerseits und $(BA_t C_t I_\beta) = (BACI)$ andererseits folgt, dass die zugehörige Perspektivcentra V, W auf der Geraden II_β liegen. Projizieren wir endlich etwa $(I_\beta A_\beta BA_t) = -1$ von A aus auf die Gerade $I_\beta I$, so gilt auch für die Projektion die Beziehung $(I_\beta VIW) = -1$; es ist somit $B(I_\beta VIW) = -1$. Demnach wird WB von $IB = p$ harmonisch getrennt durch BV und t_2; es ist also tatsächlich WB identisch mit der Geraden g_β von H.

Um also g_β direkt zu erhalten, projizieren wir die Schnittpunkte der Berührungsebenen in A und C mit b von irgend einem auf b liegenden Punkt I_0 aus auf die Tangente t_2 und verbinden die Projektionen dieser Punkte mit den Berührungspunkten dieser Ebenen; wir verbinden also A_t mit A und C_t mit C; der Schnittpunkt W der Verbindungsgeraden gehört bereits der Geraden g_β an.

Dieses Resultat konnte man voraussehen. Denn das Hyperboloid M, welches durch b geht und F längs p berührt, hat die Geraden $A_0 A$, $C_0 C$, $I_0 I \ldots$ zu Erzeugenden, und es ist die Punktreihe $BA_0 C_0 I_0 \ldots$ auf b perspektiv zur Punktreihe $BACI \ldots$ auf p; somit ist auch die Projektion $BA_t C_t I_\beta$ der ersten Punktreihe von I_0 aus auf t_2 zu $BACI \ldots$ perspektiv, und $W = A_t A \,.\, C_t C$ ist das Perspektivcentrum.

Die Regelschar $A_0 A$, $C_0 C, \ldots$ auf M wird von I_0 aus durch einen Ebenenbüschel 1. Ordnung projiziert, welcher die durch I_0 gehende Gerade r der zweiten Schar von M zur Achse hat; da die Projektionen der Geraden $A_0 A$, $C_0 C \ldots$ von I_0 aus auf die Ebene $t_2 p$ sich in W schneiden, so ist $I_0 W$ die Achse des erwähnten Ebenenbüschels und somit ist $I_0 W$ die Gerade r der zweiten Schar von M; die Gerade der ersten Schar von M, welche durch B geht, liegt in der Ebene $t_2 p$ und muss $I_0 W$ schneiden; sie ist also identisch mit $g_\beta = BW$ und gehört nach Früherem (Art. 3) auch dem Oskulationshyperboloid H an.

6. Im Folgenden wollen wir uns mit einigen Betrachtungen über eine Regelfläche, welche durch zwei projektive Punktreihen erzeugt wird sowie insbesondere über das Hyperboloid, welches sich ihr längs irgend einer Erzeugenden anschmiegt, in Weiterführung der analogen Erwägungen, welche in der a. a. O. angeführten Arbeit v. J. 1893 durchgeführt worden sind, beschäftigen.

Ist die Regelfläche F durch zwei projektive Punktreihen $ABC\ldots$, $A_1B_1C_1\ldots$ gegeben, von denen die erste auf einer Geraden g, die zweite auf einem Kegelschnitt k liegt, so enthalten die Oskulationshyperboloide der Fläche F längs aller Erzeugenden die Leitgerade g und die Doppelgerade d von F. Die Konstruktion des Oskulationshyperboloids H für irgend eine Erzeugende x kann bequem folgendermassen durchgeführt werden.

Wir schneiden g mit der Ebene K von k im Punkte G, nehmen auf k einen beliebigen Punkt H an und bringen die Geraden HB_1, HC_1 mit GA_1 in B' und C' zum Schnitt. Hierauf konstruieren wir die Achse l der projektiven Punktreihen $ABC\ldots$, $A_1B'C'\ldots$

Die Gerade, welche den Schnittpunkt $l.GA_1$ mit H verbindet, trifft k im Punkte G_1, welcher dem Punkte G projektiv entspricht. Somit trifft GG_1 den Kegelschnitt k zum zweitenmale im Punkte D, welcher der Doppelgeraden d angehört.

Schneidet x den Kegelschnitt k im Punkte X_1, so gehört der Kegelschnitt h, welcher k in X_1 oskuliert und durch D sowie G geht, dem gesuchten Hyperboloid an. Projiziert man die Punktreihe $A_1B_1C_1\ldots$, von D aus auf h nach $A_\xi B_\xi C_\xi\ldots$, so sind AA_ξ, BB_ξ, $CC_\xi\ldots$ Geraden einer Reihe auf dem Hyperboloid H, wodurch dieses in einfachster Weise bestimmt ist.

Will man die zweite Gerade v von H, welche durch irgend einen Punkt V auf x geht, direkt konstruieren, so ermittelt man in bekannter Weise die Tangentialebene V von F in diesem Punkte, deren Spur w in der Ebene von k mit Hilfe von k zum Schnitt mit h gebracht wird, und die Verbindungsgerade des so erhaltenen Schnittpunktes mit V ist die fragliche Gerade v.

Schneidet die gegebene Leitgerade g den Kegelschnitt k in G, so bestimmen wir wieder G_1, und h ist jetzt derjenige Kegelschnitt, welcher k in X_1 oskuliert und GG_1 in G berührt, denn es ist hier $D\equiv G$. Im übrigen ändert sich die zuvor entwickelte Konstruktion nicht.

Eine einfache direkte Konstruktion der Geraden v für das Oskulationshyperboloid längs x beruht darauf, dass die erzeugenden Geraden AA_1, BB_1, CC_1, ... der Fläche F von V aus durch einen Ebenenbüschel projiziert werden, welcher einen Kegel 2. Ordnung K einhüllt, dessen Mantelgeraden von V zu den Punkten ausstrahlen, in welchen F von den Ebenen $AA_1 V$, $BB_1 V$, $CC_1 V$ ... berührt wird.

Der Kegel K lässt sich somit einfach konstruieren. Er berührt auch die vorher ermittelte Tangentialebene V von F längs einer Geraden, welche offenbar die fragliche Gerade v ist.

Von analogen Erwägungen werden wir in den nachstehenden Aufgaben geleitet.

7. Zwei in verschiedenen Ebenen R_1, R_2 gelegene Kegelschnitte k_1, k_2 als Träger zweier projektiven Punktreihen $A_1 B_1 C_1$ ... $A_2 B_2 C_2$ ... schneiden sich in einem sich selbst entsprechenden Punkt $K_1 \equiv K_2$; man soll für die Fläche F, welche diese Punktreihen erzeugen, das Oskulationshyperboloid H längs irgend einer Erzeugenden $A_2 A_1$ ermitteln. Insbesondere soll die durch den auf $A_2 A_1$ willkürlich angenommenen Punkt gehende zweite Gerade von H ermittelt werden.

Eine einfache Anordnung der Konstruktion ist etwa folgende:

Wir schneiden die Gerade $r = R_1 . R_2$ mit der Tangente t_2 in A_2 an k_2 und mit der Geraden $A_2 B_2$, und die so erhaltenen zwei Punkte projizieren wir von A_1 aus auf k_1 nach A_1', B_1' und ermitteln die Achse l der projektiven Punktreihen $A_2 B_2 K_2$ ..., $A_1' B_1' K_2$ ..., welche K_2 mit $A_1' B_1 . B_1' A_1$ verbindet und k_1 noch im Punkte $E_1 \equiv E_1'$ schneidet. Alsdann trifft die Gerade, welche $A_1 E_1 . l$ mit A_2 verbindet, den Kegelschnitt k_2 im Punkte E_2, welcher E_1 entspricht, und die Gerade $e = E_1 E_2$ gehört der Fläche F an und schneidet $A_1 A_2$ in einem Punkte D, welcher der Doppelgeraden d von F angehört. Diese Doppelgerade selbst kann man nun leicht bekommen.

Wir konstruieren zunächst die Berührungsebene V von F in V. Wir projizieren zu dem Zwecke etwa die Punkte B_2, K_2 von irgend einem Punkte L_2 des Kegelschnittes k_2 auf t_2 nach (B_2), (K_2) und ebenso B_1, K_1 von irgend einem Punkte H_1 des Kegelschnittes k_1 auf t_1 nach (B_1), (K_1). Vorteilhaft können wir L_2 etwa im Schnitt von k_2 mit der Geraden, welche $t_2 . r$ und B_2 verbindet, und H_1 im Schnitt von k_1 mit der Geraden, welche $t_1 . r$ mit B_1 verbindet, annehmen. Die Ebene V ist alsdann auch Berührungsebene in V an das durch die Geraden $A_1 A_2$, $(B_1)(B_2)$, $(K_1)(K_2)$ festgelegte Hyperboloid G.

Wir projizieren G von V als Projektionscentrum auf R_2. Die Projektionen (B_1'), (K_1') von (B_1), (K_1) werden auf der Geraden t'_1 liegen, welche $t_1 . r$ mit A_2 verbindet, und die Geraden $(B_1')(B_2)$, $(K_1')(K_2)$ werden Projektionen der Geraden $(B_1)(B_2)$, resp. $(K_1)(K_2)$ sein; der Schnittpunkt von $(B_1')(B_2)$, $(K_1')(K_2)$ ist deshalb die Projektion der Geraden, welche durch V geht und $(B_1)(B_2)$, sowie $(K_1)(K_2)$ schneidet und somit auf G liegt. Daraus folgt, dass die Gerade v_2, welche A_2 mit $m' \equiv (B_1')(B_2) . (K_1')(K_2)$ verbindet, die Spur der Berührungsebene V in R_2 ist.

Weiter ermitteln wir die gemeinsame Berührungsebene D von F und G in D und suchen ihre Spur d_2 in R_2 etwa so, dass wir die Projektivität des Büschels $t_2 t_1' v_2 d_2 \ldots$ und der Punktreihe $A_2 A_1 V D \ldots$ berücksichtigen, welche wir auf bekannte Weise durch einen zur Punktreihe perspektiven Ebenenbüschel, dessen Achse e die Gerade t_2 schneidet, geeignet vermitteln, welcher Ebenenbüschel infolge dessen auch zu dem Strahlenbüschel perspektiv liegt.

Da die Ebene D auch die Doppelgerade d von F enthalten muss, so schneidet d_2 den Kegelschnitt k_2 noch im Punkte D_2 von d, so dass dadurch diese Gerade, welche auch dem gesuchten Oskulationshyperboloid H angehört, vollkommen bestimmt ist.

Die zweite Gerade a_2 durch A_2 von H bekommt man nach Früherem (Art. 5.), indem man etwa die Projektionen auf t_2 von irgend einem auf k_2 gelegenen Punkte aus der von A_2 verschiedenen Punkte $t_1' . k_2$, $v_2 . k_2$ mit A_1, beziehungsweise V verbindet; der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden gehört bereits der Geraden a_2 an. Analog erhält man die Gerade a_1 von H, welche durch A_1 geht.

Die Ebene, welche e mit $A_1 A_2$ verbindet, enthält zwei gerade Erzeugende von F; sie schneidet deshalb diese Fläche noch in der einfachen Leitgeraden g. Diese muss somit in der Ebene $e A_1 A_2$ enthalten sein.

In der Ebene R_2 liegt auch eine Erzeugende l_2 von F; sie verbindet den von K_1 verschiedenen Schnitt $N_1 \equiv k_1 . r$ mit dem entsprechenden Punkt N_2 auf k_2, und da sie auch d trifft, so geht sie durch D_2. Demnach wird l_2 als Verbindungsgerade der Punkte $N_1 \equiv k_1 . r$ und D_2 erhalten. Da diese Gerade auch von g getroffen wird, so gehört der Schnittpunkt G_2 von l_2 mit $A_2 E_2$ der Geraden g an. Ebenso folgern wir, dass der Punkt G_1, in welchem $A_1 E_1$ von der Geraden l_1, welche den von K_2 verschiedenen Schnitt $k_2 . r$ mit D_1 verbindet, der Geraden g angehört, falls wir mit D_1 den Schnittpunkt von d mit k_1 bezeichnen.

Die Gerade $g = G_1 G_2$ ist dadurch auch leicht ermittelt; sie gehört also auch dem Oskultionshyperboloid H an.

Dabei sind wieder d und g allen derartigen Hyperboloiden gemeinschaftlich.

Wollte man die Gerade v von H, welche durch einen beliebig auf $A_1 A_2$ gewählten Punkt V geht, direkt konstruieren, so würde man etwa zuerst die Berührungsebene V von F in V konstruieren und dieselbe mit F zum Schnitte bringen. Der von $A_1 A_2$ verschiedene Schnitt ist ein Kegelschnitt f, der durch V geht und dessen Tangente in diesem Punkte die verlangte Gerade v ist. Sind v_1, v_2 die Spuren von V in R_1 und R_2, so sind die nicht auf $A_1 A_2$ liegenden Schnitte $v_1.k_1$, $v_2.k_2$ zwei weitere Punkte von f. Ermitteln wir noch zwei Punkte dieses Kegelschnittes, etwa $l_1 . v_1$, $l_2 . v_2$, so ist er hiedurch bestimmt und man kann v ohneweiters finden.

8. Wird die Regelfläche F durch zwei projektive Punktreihen $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A_2 B_2 C_2 \ldots$ welche auf irgend zwei Kegelschnitten k_1, k_2 liegen, erzeugt, und soll man für diese Fläche das längs irgend einer Erzeugenden $A_1 A_2$ oskulierende Hyperboloid H konstruieren, so kann man diese Konstruktion leicht auf die zuletzt betrachtete zurückführen.

Wir nehmen auf der Schnittlinie r der Ebenen R_1, R_2 von k_1 und k_2 den Schnittpunkt B_{12}^* mit $A_1 B_1$ an und verbinden ihn mit B_2. Die Verbindungsgerade möge k_2 zum zweitenmale in M schneiden. Nun können wir bei unserer Konstruktion k_1 durch den Kegelschnitt k_1^* ersetzen, welcher k_1 in A_1 hyperoskuliert und durch B_{12}^* geht, also mit ihm zentrischkollinear liegt für A_1 als Zentrum und die Tangente t_1 in A_1 an k_1 als Achse der Kollineation, wenn wir die Punktreihe $A_1 B_1 C_1 \ldots$ durch ihre Projektion $A_1 B_{12}^* C_1^* \ldots$ von A_1 auf k_1^* ersetzen, während wir k_2 durch den Kegelschnitt k_2^* ersetzen können, welcher k_2 in A_2 oskuliert und durch die Punkte M und B_{12}^* geht, insofern wir die Punktreihe $A_2\ B_2\ C_2 \ldots$ durch ihre Projektion $A_2\ B_{12}^*\ C_2^* \ldots$ auf k_2^* von M aus ersetzen.

Dadurch wird F durch eine Regelfläche 3. Ordnung F^* ersetzt, und es ist nun die vorhergehende Konstruktion anwendbar.

Um hier beispielsweise die Gerade s von F^* zu bekommen, bringen wir t_1 und $A_1 C_1$ mit r zum Schnitt und projizieren die Schnittpunkte sowie $B_1{}^*{}_2$ von A_2 auf k_2 nach (A_1), (C_1), $(B_1{}^*{}_2)$.

Ferner ermitteln wir die Projektion C_2^* des Punktes C_2 von M auf k_2^*. Wir verbinden da den gemeinschaftlichen Punkt der Geraden

$(B_1{}^*{}_2)C_2$ und der Tangente t_2 in A_2 an k_2 mit $B_1{}^*{}_2$. Die Verbindungsgerade trifft MC_2 im Punkte $C_2{}^*$.

Denn die Kegelschnitte k_2, $k_2{}^*$ legen einen Büschel fest. Schneiden wir diesen durch den in ein Geradenpaar degenerierten Kegelschnitt $A_2B_{12}{}^*$, MC_2, welcher durch zwei Grundpunkte A, M des Büchels geht, so schneiden sich nach einem Satz von Ch. Sturm die gemeinsamen Sehnen $(B_1{}^*{}_2)C_2$, $B_1{}^*{}_2C_2{}^*$ dieses Kegelschnittes mit k_2 und $k_2{}^*$ auf der Verbindungsgeraden der übrigen zwei Grundpunkte des Büschels.

Trifft $A_2C_2{}^*$ den Kegelschnitt k_2 in $(C_2{}^*)$, und schneidet man $A_2(C_1)$ mit $(A_1)(C_2{}^*)$, so liefert die Verbindungsgerade des Schnittpunktes und des Punktes $(B_1{}^*{}_2)$ die Achse der Projektivität von $(C_1)(A_1)(B_1{}^*{}_2)\ldots$ mit $(C_2{}^*)A_2(B_{12}{}^*)\ldots$ Es sei $(E_1) \equiv (E_2{}^*)$ der zweite Doppelpunkt dieser Projektivität, so hat man die Gerade $e_2 = A_2(E_1)$ mit r zu schneiden und den Schnitt mit A_1 durch e_1 zu verbinden und die Schnittpunkte $E_1{}^*$ von e_1 mit $k_1{}^*$, $E_2{}^*$ von e_2 mit $k_2{}^*$ in bekannter Weise aus der Kollineation mit k_1 resp. k_2 zu konstruieren. Es ist alsdann $e = E_1{}^*E_2{}^*$.

Die weitere Konstruktion bietet nichts Neues mehr.

9. Ein anderes Verfahren, um die Gerade v von H zu ermitteln, besteht darin, dass wir V etwa mit B_2 durch b^0 verbinden und den Schnitt $B_1{}^0$ von VB_2 mit R_1 bestimmen und zwar als Schnitt von b^0 mit der Geraden, welche r . A_2B_2 mit A_1 verbindet. Sodann ersetzen wir k_1 durch einen Kegelschnitt $k_1{}^0$, welcher k_1 in A_1 oskuliert, durch $B_1{}^0$ und den Schnitt M von $B_1B_1{}^0$ mit k_1 geht. Projizieren wir C_1 von M auf $k_1{}^0$ nach $C_1{}^0$, so erzeugen die projektiven Punktreihen $A_1B_1{}^0C_1{}^0\ldots$ auf $k_1{}^0$ und $A_2B_2C_2\ldots$ auf k_2 eine Regelfläche F^0, welche F längs A_1A_2 oskuliert, so dass wir nun zwecks der Konstruktion von H die Fläche F durch F^0 ersetzen können.

Da durch V zwei erzeugende $a = A_1A_2$ und b^0 von F^0 gehen, so werden die erzeugenden Geraden derselben von V aus durch einen Kegel 2. Klasse K projiziert. Die Ebene V berührt den Kegel K und ihre Berührungskante ist die gesuchte Gerade v.

Wir schneiden K etwa mit R_1. Der Schnitt ist ein Kegelschnitt j, welcher die Spur v_1 von V in einem Punkte V_1 berührt, und es ist $v = V_1V$. Wir brauchen also für j ausser v_1 noch vier weitere Tangenten oder ihnen gleichwertige Bestimmungsstücke. Zu dem Zwecke projizieren wir die Punkte $A_1B_1C_1$ des Kegelschnittes k_1 von A_1 auf r und die so erhaltenen Punkte weiter von A_2 auf k_2 nach $A_1{}^*$, $B_1{}^*$, $C_1{}^*$ ermitteln die Achse für die Projektivität von $A_2B_2C_2\ldots$ und $A_1{}^*B_1{}^*C_1{}^*\ldots$ und ermitteln zu irgend drei Punkten D_2, E_2, F_2 die zuge-

hörigen D_1^*, E_1^*, F_1^*, aus diesen die Punkte D_1, E_1, F_1 und schliesslich die Schnittpunkte D_1^0, E_1^0, F_1^0 von MD_1, ME_1 und MF_1 mit k_1^0 in früher erläuterter Weise. Schliesslich projizieren wir C_2, D_2, E_2, F_2 von V auf R_1 und verbinden die Projektionen mit C_1^0, D_1^0, E_1^0, F_1^0; die Verbindungsgeraden sind die verlangten Tangenten von j. Dabei wird beispielsweise die Projektion von F_2 erhalten als Schnitt von VF_2 mit der Geraden, welche $F_2A_2 . r$ mit A_1 verbindet.

Wir hätten aber auch die Berührungsebene von F^* durch $B_2B_1^0$, welche in V berührt, ermitteln können, deren Spur auch eine Tangente von j liefert, oder auch den Berührungspunkt der Ebene $C_2C_1^0V$, welcher sich von V auf R_1 in den Berührungspunkt von j mit ihrer Spur auf R_1 projiziert.



XXII.

Histochemisches über die Lokalisation der Saccharose in der Zuckerrübe.

Von **Jaroslav Peklo** in Prag.

(Mit einer Tafel.)

Vorgelegt in der Sitzung am 25. Oktober 1907.

Es wäre unrichtig, wenn man das Studium der anatomischen Verhältnisse der Zuckerrübenwurzel für erschöpft und beendet halten wollte. Schon aus dem Grunde, weil die Histologie einen wichtigen Anteil bei der Beurteilung der Physiologie der Organe hat, und diese keineswegs für alle Lebenserscheinungen der Rübenpflanze aufgeklärt ist. Dann ist bisher — trotz zahlreicher Arbeiten, welche sich mit der Struktur von *Beta* beschäftigen[1]) — z. B. der Speiche-

[1]) 1. Decaisne, Sur l'organisation anatomique de la racine de la betterave à sucre, Mémoire presenté a l'Académie des Sciences de Paris 1838.

2. Wiesner, Einleitung in die technische Mikroskopie 1867.

3. Wiesner-Krasser, Die Rohstoffe des Pflanzenreiches, II. Auflage, II. Teil 1893.

4, Van Tieghem, Recherches sur la symétrie de structure des plantes vasculaires. Annales des sciences naturelles, V. Série, Botanique I., XIII.

5. De Bary, Vergleichende Pflanzenanatomie 1877, pag. 616.

6. De Vries, Wachstumsgeschichte der Zuckerrübe. Landwirtschaftliche Jahrbücher 1879, pag. 417 seq.

7. Schindler (u. Proskowetz jun.), Zur Charakteristik typischer Zuckerrübenvarietäten. Oesterreichisch-ungarische Zeitschrift für Zuckerindustrie etc. 1889, pag. 351 seq.

8. Strasburger, Das botanische Praktikum. IV. Auflage 1902, pg. 261.

9. Janasz, Beschreibung einiger Zuckerrübenrassen. Mitteilungen der landw. Institute der k. Universität Breslau 1904 u. andere Arbeiten.

rungsort von *Betain, Glutamin* und von anderen Stoffen, welche in der Rübe vorkommen, noch nicht mikroskopisch bestimmt worden, und noch weniger sind die cytologischen Details durchgearbeitet, auf deren Grundlage man bestimmte pathologische Veränderungen analysieren könnte (vergl. z. B. Brzeziński, Myxomonas betae, parasite de betteraves. Bulletin international de l'académie de sciences des Cra covie 1906.).

Es kann also — wenn wir schon diese Umstände in Erwägung ziehen — keineswegs überraschen, dass das Unternehmen derjenigen Autoren,[2]) welche feststellen wollten, ob irgend welche Beziehung zwischen der Wurzelstruktur und ihrem Zuckergehalt stattfindet, nicht vollkommen befriedigend ausfiel. Über Anregung des Direktors der Zuchtstationen der Firma *Wohanka & Comp.* Herrn *H. Briem* hat auch der Autor der vorliegenden Studie eine ähnliche Aufgabe zu lösen versucht; es zeigte sich aber bald die Notwendigkeit, mikrochemisch festzustellen, ob nicht vielleicht überhaupt der Zucker in einigen Zellen in grösseren Konzentrationen vorhanden ist als in anderen. Über die Resultate einer derartigen Untersuchung will die vorliegende Arbeit einen Bericht erstatten.

Zuerst sei mir erlaubt kurz über einige histologische Verhältnisse der Zuckerrübenwurzel zu referieren, soweit dieselben im Folgenden berührt werden müssen.

Die ausgewachsene Zuckerrübe stellt ein sekundäres Gebilde vor, welches z. B. einem sekundär verdickten Stengel analog ist; doch mit dem Unterschiede, dass ihre Gewebe grösstenteils durch die Tätigkeit des Perikambiums der einfachen Hauptwurzel erbaut worden sind, welches eine sekundäre, parenchymatische Rinde gebildet hat. In dieser differenzieren sich centripetal die Kambien, welche zuletzt konzentrische Gefässbündelkreise mit den interfascikularen Parenchymstreifen (die den Markstrahlen vergleichbar sind) repraesentieren. An diese Gefässbündel knüpfen sich die Blattspurstränge an, welche aus der nach $^5/_{13}$ angeordneten Krone ausgehen u. zwar so, das ein zentrales Leitbündel, nachdem es einen horizontalen, mehr oder weniger langen Weg durchlaufen hat, in einen von den inneren Kreisen übergeht, während die anderen Blattstielbündel sich

[2]) Aus den neueren Arbeiten sei nur angeführt: Geschwind, Sur les relations existant chez la betterave entre la genèse du saccharose et la structure de la racine. Revue générale de chimie pure et appliquée. T. III., cit. nach d. Refer. in Bulletin de l'Associacion des chimistes de sucrerie et de distillerie, 1901, pag. 785.

mit denjenigen aus der Peripherie verbinden. Die Gefässbündelstränge anastomosieren sowohl in demselben Kreise, wie schön in den Tangentialschnitten zu sehen ist, als auch (am oberen Pole des Rübenkörpers) in der Radialrichtung und verbinden sich zuletzt in dem Wurzelfusse. Sie stellen also in der eigentlichen Wurzel 6—12 kegelartige, gitterartig vom Parenchym durchgerissene und nach unten zu verengte Mäntel vor, welche aus völlig äquivalenten Bündeln bestehen. Schön zu beobachten ist diese Struktur an den mazerierten Samenpflanzen, wie sie in der oben citierten Arbeit von Schindler und Proskowetz abgebildet sind.

Die Kreise, welche an der äussersten Peripherie liegen, sind durch das Kambium allein, event. durch das Kambium und den Bast vertreten; erst später bilden sich Elemente des holzigen Bündelteiles. Das Phloëm der Gefässbündel ist aus Siebröhren mit normalen Querwänden, aus sog. Geleitzellen und dem Parenchym zusammengesetzt. Das Xylem besteht aus netzartig verdickten Gefässen, Holzparenchym und prosenchymatischen Elementen, welche zuweilen auch mehr verdickt zu sein pflegen. Das interfascikulare Parenchym wird durch breite, rundliche Zellen repraesentiert, welche aber, je mehr sie dem Gefässbündel sich nähern, eine desto engere Form annehmen und desto mehr sich verlängern; endlich bilden sie die sogenannte „Zuckerscheide“, welche nach Wiesner und anderen Autoren den Hauptsitz der Saccharose darstellt.

Durch die Wurzelmitte zieht sich ein centrales, durch die Tätigkeit des ersten Kambiums ausgebautes Gefässbündel. Die Oberfläche der Wurzel ist von einer Korkschicht bedeckt, deren Elemente von einem Phellogen regelmässig ersetzt werden.

Die Seitenwurzeln ragen in zwei Längsreihen (sie stehen in jeder derselben eigentlich in 2 Reihen, wie es sonst bei den Seitenwurzeln zu sein pflegt) aus der Flanke dieser Pfahlwurzel hervor; sie zeichnen den eigentlichen Wurzelteil bis zu dem sog. Schwanz aus, welcher oftmals bis auf einige Meter weit die Ackerkrume durchdringt. Sie fehlen dem grössten Teil des Hypokotyls (dem sog. Hals), welcher daher in den oberen drei Vierteln der radialen, zu ihnen führenden Gefässbündelstränge entbehrt. Der „Kopf“ zeichnet sich im Querschnitt deutlich durch das Gewirr der Blattspurstränge aus.

Die Rübenrasse, mit welcher ich gearbeitet habe, war „Vilmorin blanche amélioré“, welche auf dem Grossgrundbesitze des kaiserl. Rathes Herrn *Wohanka* in *Úholičky* im Grossen gezüchtet wird. Durch die ausserordentliche Gefälligkeit dieses Herrn und des

Direktors Briem, denen ich hiermit meinen aufrichtigen Dank ausspreche, habe ich eine Kollektion von Rüben bekommen, deren Zuckergehalt im Laboratorium dieser Zuchtstation polarimetrisch bestimmt worden war. Die einzelnen Exemplare zeigten folgenden Zuckergehalt (in Prozenten) und folgendes Gewicht (in Grammen):

%	g	%	g	%	g
12·3,	1150	16·0,	158	19·1,	800
12·8,	800	16·0,	600	19·2,	600
14·4,	650	18·1,	650	19·4,	700
14·5,	600	18·5,	550		
14·7,	900				

Die Rüben, welche im Herbste vorigen Jahres geerntet und während des Winters in der Erde gehalten worden waren, wurden in der ersten Hälfte Jänners polarisiert und dann sogleich in Untersuchung genommen, welche bis zum Ende Juni dauerte. Die Exemplare wurden inzwischen im Keller des k. k. Institutes für Pflanzenphysiologie im Sande aufbewahrt und erhielten sich gesund bis auf einige wenige, welche von der bekannten „pouriture sèche" ergriffen wurden. Zur Untersuchung wurde noch hinzugenommen die Mamutrübe, die Stengel des Zuckerrohrs aus dem Glashause des Institutes und im Juni ausserdem junge, etwa 1 *dm* lange Rübchen von der Dicke = $^1/_2$ *cm*, 2 *cm*, 3 *cm*, 3·2 *cm*, 3·5 *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*. Die Schnitte, welche je nach dem Bedarfe dicker oder dünner verfertigt wurden, wurden radial und tangential durch den oberen und unteren Kopf — resp. Halsteil und in verschiedenen Höhen des Fusses geführt (leider konnte der zuckerreichste Teil nicht angewendet werden, weil er meistens das Polarisations-Bohrloch enthielt). Es wurden so 130 Präparate von ca 1200 Schnitten angefertigt.

Zum mikrochemischen Nachweis der Saccharose hab ich zuerst die Barfoedsche, von Lidforss[3]) modifizierte Methode angewendet, welche mir schon in früherer Zeit einigemal gute Dienste geleistet hatte. In die konzentrierte Lösung von Kupferacetat, welches in 60% Alkohol gelöst wurde, damit die Saccharose aus den Zellen nicht heraus diffundiere (Alkohol von einer grösseren Konzentracion erwies sich als unpassend) wurde ein wenig Essigsäure, Glycerin und zuletzt soviel alkoholischer Natron-Lauge zugegeben, bis, nachdem sich der Niederschlag gelöst hat, die Flüssigkeit schön lazurblau wurde.

[3]) Lidforss, in Lunds Univ. Arsskr., XXVIII, 1892. Cit. nach Bot. Centralblatt.

Am Sandbade wurden dann die Schnitte in dieser Flüssigkeit $^1/_4$ — $^3/_4$ St. in Glasgefässen gekocht, und nachdem die Inversion und Reduktion stattgefunden hatte, wurden sie herausgenommen und in Glycerin übertragen, in welchem sie zur Untersuchung gelangten. Auf solche Weise ist es mir geglückt eine sehr schöne Ausscheidung von Kupferoxydul in allen Teilen eines Rübenexemplares von 12·8%, 800 *g* (Fig. 1) und 19·4%, 700 *g* zu erlangen. Aber schon in diesem Falle, sowie noch mehr bei 14·5%, 600 *g* hat sich zuweilen eine grössere Diffusion gezeigt, als gleichgiltig sein könnte und in dem grösseren Teil der Proben aus anderen Exemplaren ist die Flüssigkeit trüb geworden, bevor das Cu_2O erreicht wurde. Da ich also mein Material nicht beim Durchprüfen der verschiedenen Proportionen, in welchen die Bestandteile der Lidforssschen Reaktion angewendet werden müssen, wie es vielleicht die verschieden zuckerhaltigen Objekte erheischt hätten, verbrauchen wollte und weil die Reaktionsflüssigkeit auch z. B. die Gerbstoffe und andere Stoffe spaltete, so nahm ich Zuflucht zu der Methode, welche unlängst von Senft[4]) mitgeteilt wurde.

Diese ist eigentlich die modificierte Methode Fischer's. Aldosen und Ketosen verbinden sich mit einer Moleküle Phenylhydrazin bei gewöhnlicher Temperatur zu Hydrazonen, welche meistens wasserlöslich und farblos sind; beim Erwärmen gibt dagegen das Fischersche Reagens mit den Monosacchariden, sowie der Laktose, Isomaltose u. Maltose gelbe, im Wasser schwer lössliche Osazone. Nach der Inversion kann man auch aus der Saccharose ein Osazon erhalten.

Anstatt Wasser Alkohol als Lösungsmittel zu verwenden, welches die Diffusion der Zuckerarten aus den pflanzlichen Geweben verhindern würde, der Komponenten von Fischer's Reagens ist unmöglich, weil in heissem das Osazon gelöst wird; er wurde also von Senft durch das friedliebende Glycerin ersetzt. Dieser hat zuerst die Wirkung des Reagens auf verschiedene Zuckerarten in Lösungen oder Körnchen ausgeprobt, bei Kälte oder am siedenden Wasserbade. Das Erwärmen trägt einerseits zur Verhinderung der Zuckerdiffusion aus den Geweben bei, andererseits beschleunigt es in den meisten Fällen die Reaktion. So bildet Lävulose in einigen Stunden Osazon in der Kälte, Dextrose erst nach 24 Stunden und später, beim Erwärmen aber

[4]) Em. Senft, Ueber den mikrochemischen Zuckernachweis durch essigsaures Phenylhydrazin. Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nat. Cl. CXIII, Bd., 1904, pag. 3.

schon in 5 Minuten. Saccharose lässt sich durch das Reagens selbst in der Hitze invertieren und da kann man aus der Lösung schon nach dem halbstündigen Kochen charakteristische Büschel erhalten; in der Kälte kommt es dagegen nicht einmal nach einigen Tagen zur Bildung des Osazons, so dass das Reagens sehr brauchbar ist auch zur Unterscheidung, in welchen Geweben Dextrose resp. Laevulose — zum B. bei unseren Obstarten — neben der Saccharose vorkommt.

Die Reaktion führte ich nach Senft auf folgende Weise aus: Salzsaures Phenylhydrazin (nach Merck) wurde in konzentriertem Glycerin im Verhältniss 1 : 10 gelöst, ebenso Natriumacetat. Beide Flüssigkeiten wurden im Dunkeln in getrennten Fläschchen aufbewahrt. Auf einem dünnen Objektträger wurde ein Tröpfchen Phenylhydrazin mit einem anderen von Natriumacetat mittels einer Präpariernadel gut vermischt und die Schnitte in dasselbe hineingelegt. Die tangentialen wurden gewöhnlich mittels einer Wasserstrahl-Luftpumpe evakuiert und nachdem die Flüssigkeit durch den plötzlichen Lufteintritt in dieselben injiciert wurde, wurden sie eine halbe Stunde vom Deckglase bedeckt gelassen. Glycerin hat zuerst die Plasmolyse verrsacht, später aber, nachdem die protoplasmatische Hautschicht-uaugenschaulich von ihm durchdrungen worden war, erlangte das Ge webe wieder die gewöhnliche Turgescenz. Unter ein Deckglas vom grossen Formate wurden gewöhnlich 3 Schnitte hineingelegt, welche ca 3 *cm* lang und 1 *cm* breit waren und aus demselben Rübenteil. verfertigt w urden, sodass ein Objektträger meistens 9 Schnitte trug Radialschnitte z. B. aus dem ganzen dickeren Teil der Rübenwurzel gingen so auf 2—3 Objektträger hinein, welche immer gleichzeitig am siedenden Wasserbade in einem geschlossenen, fast völlig untergetauchten Blechgefässe erwärmt wurden. Nach dem Kochen habe ich die Präparate im Wasserbade selbst auskühlen lassen, dann herausgenommen, nach 1—2 Tagen in reines, konzentriertes Glycerin überführt und untersucht.

Es wurde zuerst mit dem Exemplare 19·1%, 800 *g* gearbeitet Radialschnitte, periphere und centrale, wurden in ein Gemisch von einem gleichen Tropfen Hydrazin und Acetat hineingelegt und 3—4 Stdn. erwärmt. Nach dem Auskühlen hat sich nur eine schlechte Ausscheidung von Osazon gezeigt. Weil es aber eine bekannte Erfahrung ist, dass die Rübenwurzel nicht in allen ihren Teilen gleich zuckerhaltig ist, dass die peripheren und centralen Teile z. B., der untere Fuss und Kopf einen geringeren Prozentsatz zeigen gegenüber den anderen Teilen, so wurde für die Schnitte aus der peripheren

Partie nur $^1/_4$—$^1/_8$ Menge Natriumacetat zu einem bestimmt grossen Tropfen Phenylhydrazin angewendet; die Schnitte aus den inneren Teilen pflegten das Osazon auch bei der Anwendung der Acetat-Tropfen von Halb- und Drittel-Grösse auszuscheiden. Zuletzt fuhr ich überhaupt so fort, dass ich bei den Rüben von einem grösseren Zuckergehalt bei den peripheren Schnitten die Acetat-Tropfen von einer Drittelgrösse gegenüber denjenigen von Phenylhydrazin nahm, bei den centralen Schnitten dann dieselben vergrösserte. Die Proben wurden 2 Stunden gekocht, sodann langsam im Bade abgekühlt. Für die Schnitte aus den wenig zuckerhaltigen Rüben (14%, 12%) aus allen Rübenteilen wurden winzige Acetat-Tropfen angewendet, so von einer $^1/_5$—$^1/_6$ Grösse, und dieselben $^3/_4$, $1^1/_4$—$1^1/_2$ Stdn. gekocht. Für die jungen Rüben genügten Acetat-Tropfen von $^1/_4$, $^1/_6$—$^1/_8$ Grösse, sicherheitshalber aber wurden sie 2 Stunden lang gekocht. Auf solche Weise ist es mir nach mehreren Versuchen gelungen, befriedigende Präparate zu erlangen, ohne dass ich eine allgemein gültige Regel für die verschieden zuckerhaltigen Rüben angeben könnte. Bei den peripheren Schnitten geschah es mir z. B., wie begreiflich, bei einer kleinen Dosis von Acetat, dass die Zellen nach der Reaktion eine Menge brauner Körnchen anstatt charakteristischer, instruktiver Ausscheidungen zeigten, weiter ist es möglich, dass auch der verschiedene Wassergehalt nach der verschiedenen Aufbewahrungs-Zeit und andere Nichtzucker-Stoffe, welche im Zellsaft neben der Saccharose gelöst sind, mitwirken können u. s. w.

Ebenso bin ich nicht imstande die Ursachen der verschiedenen Formen anzugeben, in denen das Osazon sich ausschied. Einige Zellen zeigten zuerst nur helle, gelbliche, glänzende Massen, welche erst nach besserer Ausführung der Reaktion in grosse, unförmliche Klumpen gelb- und rothbraunen Osazons sich verwandelten. (Fig. 5, 6, 7; Fig. 8 in den Phloëm-Strängen *L*.) In anderen Fällen kam dieses in der Form von Kügelchen, Tropfen, grösseren, kleineren, hellen und dunkleren, amorphen (Fig. 8: interfasciculäres Parenchym *P*, Fig. 10 Parenchym *P*) oder von sphärokrystallinischer Struktur (Fig. 4) zum Vorschein.

Auch schöne Sphärokrystalle, grosse, aus auffallenden Trichiten zusammengesetzte, erschienen bisweilen (Fig. 2), ein andermal wieder Formen (Fig. 9*a*: an Gefässen *D* und in Siebröhren *s*), welche der Abbildung 14 in Tafel I. der Arbeit Senft's (Apfel) ähnlich waren, endlich auch krystallinische Büschel. (Fig. 3.) Diese verschiedene Formen sind zuweilen auch in demselben „Gebräu“ hervorgetreten,

so dass sie das Vergleichen der z. B. verschieden zuckerhaltigen Rüben erschwerten. Gewöhnlich aber hat sich wenigstens unter demselben Deckglase das Osazon in derselben Form ausgeschieden, oder wenigstens in ähnlichen Schnitten, welche dann zum Vergleiche, der am grossen Materiale ausgeführt werden konnte, ausgewählt wurden.

Zum mikrochemischen Nachweis der Saccharose hat Czapek[5]) eine Methode ausgearbeitet, welche auf der Inversion derselben durch das Hefe-Invertin und in der folgenden Reduktion nach Mayer-Schimper beruht. C. Hoffmeister hat sie dann für eine ganze Reihe von Objekten erprobt.[6]) Für mein Material, welches schnell verarbeitet werden musste, damit es nicht zu Grunde gehe, schien mir doch dieselbe zu langsam zu sein und überdies nicht völlige Gewähr zu bieten, dass die Saccharose nicht etwa teilweise aus den Geweben herausdiffundieren könnte.

Zuerst erlaube ich mir, die Resultate, welche ich an Exemplaren von 12·8%, 800 *g* und 19·4%, 700 *g* mit der *Lidforsschen* Methode erzielt habe, anzuführen.

Die Schnitte wurden 17 Minuten gekocht, es wurde vollkommene Ausscheidung von Cu_2O erreicht. Beim Übertragen ins Glycerin werden sie freilich meistens in kleinere Stückchen zerkleinert, dasselbe erhellt zugleich allzusehr ihre Struktur, so dass es nicht gut möglich ist z. B. einzelne Kreise zu vergleichen etc. In den von der Peripherie zum Zentrum geführten Querschnitten kann man auch nach dem Niederschlage von Oxydul die Kambial- und im Innern die Gefässbündelstränge erkennen, indem sie sehr kleine, gleichsam staubige Körnchen an den Wänden der Parenchymzellen enthalten; zuweilen zeigt auch das Phellogen eine derartige Reduktion gegenüber dem übrigen Parenchym, dessen Zellen gewöhnlich die Wände mit grösseren Niederschlags-Klumpen bedeckt zu haben pflegen.

Man könnte aber schwer an solchen Schnitten konstatieren, dass die Gefässbündel eine grössere Menge des Niederschlages gegenüber anderen Geweben enthalten. Doch schon an Stellen, welche ein wenig zusammengedrückt sind, kann man mitunter grössere Massen des regelmässig geordneten Niederschlags bemerken. Radial- und besonders Tangentialschnitte bieten dann ein Bild von eigentümlichen Adern

[5]) Fr. Czapek, Ueber die Leitungswege der organischen Baustoffe im Pflanzenkörper. Sitzungsber. d. k. Akad. in Wien, math.-nat. Cl. Bd. CVI. I. 1897.

[6]) C. Hoffmeister, Pringsheims Jahrbücher f. wiss. Bot., Bd. 31, 1898.

oder Streifen, welche bis kontinuierlich durch die Massen des Oxydul-Niederschlages erfüllt sind; dieselben laufen zuweilen isoliert im Parenchym des Präparates durch (Fig. 1), andermal repräsentieren sie sich wie Bündel von stark verlängerten Zellen, welche dann in diesem Falle gewöhnlich Cu_2O in der Form von grösseren, sonst isolierten, aber doch geradlinig an einander gereihten Klumpen enthalten, so dass man umgekehrt nach ihnen die Form der dieselben beherbergenden Zellen beurteilen kann. Die Anwesenheit der netzartig durchbohrten Querwände repräsentiert sie sicher als *Siebröhren.* Das Phloëmparenchym, wo es näher der Schnittperipherie sich befand, pflegt ebenso einen sehr kleinen Niederschlag zu zeigen, aber im Inneren des Schnittes selbst, sowie auch in den anderen Geweben, kam es zuweilen nicht zur Ausscheidung von Oxydul, obzwar nur wenige Schnitte in die Flüssigkeit von 30—50 cm^3 gegeben wurden; dagegen kann man Siebröhren-Stränge nach dem Niederschlage sehr schön auch in den tieferen Schnittpartieen antreffen, was vielleicht eine Folge dessen ist, dass die Reagensflüssigkeit in diese Leitelemente leichter eindringen konnte. Die Gefässe erscheinen an einigen Stellen wie besäet von grösseren, dunkelbraunen Massen; eine nähere Analysis hat aber erst Senft's Methode erlaubt.

Dieselbe bietet gegen die Lidfors'sche einige Vorzüge. Die Gewebe werden nicht zerstört, so dass man auch grosse Schnitte in ihrem ganzen Umfange durchmustern und alle Kreise, den Wurzelkopf mit dem Fusse etc. vergleichen kann. Die Glycerin-Lösungen, besonders mit Benützung der Evakuation und dem folgenden Injicieren derselben ins Gewebe, dringen gut, selbst in die inneren Partien, ein; infolge dessen pflegt vielleicht nicht einmal das Plasma — insbesondere nicht in den Geleitzellen der Siebröhren — von den Wänden abgezogen zu sein, auch die Kerne bleiben erhalten, die Kallus-Belege werden nur selten alteriert und der Zucker erscheint, wenn auch in kleinen Mengen, in unbedeutenden, dem kleinkörnigen Sande ähnlichen Körnchen [Fig. 9 *a*) und 9 *b*): Parenchym *p*]. Das Glycerin trägt vielleicht selbst zur Inversion bei (Donath), so dass die durch diese Methode gewonnenen Schlüsse besonders zuverlässig sind.

Es wurden die Radial- und Tangentialschnitte untersucht. Ihre Farbe ist gelb bis rothbraun, vom ausgeschiedenen Osazon. Die Gesamtübersicht der histochemischen Befunde, welche an verschiedenen Rüben gewonnen wurden, wäre vielleicht folgende:

Das Osazon scheidet sich in allen Geweben aus: im Phelloderma (auch im Kork selbst habe ich es angetroffen, wohin augen-

scheinlich der Zellsaft aus den angeschnittenen Zellen gekommen ist), in dem interfascikulären Parenchym und in den Gefässbündeln selbst. Dieselben äussern sich bei den schwächeren Vergrösserungen als gelbe oder braune Streifen — theils infolge dessen, dass schon die Gefässe durch die Reaktion goldgelb bis braungelb werden, theils weil in dem Siebteil die Anhäufung des Osazons in einer weit grösseren Menge stattfindet, als in anderen Geweben, sodass er unterscheidbare, schon bei schwachen Vergrösserungen wahrnehmbare Streifen bildet. (Fig. 8 *L*). (Der Holzzucker gibt mit der Phenylhydrazin-Methode kleine Büschel von *Xylosazon*[1]); in den Gefässen selbst habe ich zuweilen auch die Sphaerokrystalle und die Osazons-Kügelchen gefunden, doch war es nicht ausgeschlossen, dass die Zuckerlösung z. B. aus dem verletzten Präparatrande in sie hineingedrungen war.)

Nun sind es wieder Siebröhren, welche sich so als hauptsächliche Behälter der Saccharose in der Zuckerrübenwurzel offenbaren. Die Dextrosazons-Ausscheidungen zeigen sich darin isoliert als kleine, tropfenförmige, ellipsoide oder längliche Gebilde, so namentlich in den Siebröhren in der Nähe des Kambiums, in den peripheren Gefässbündeln, wo dann ihre Anordnung diese leitenden Elemente verrät, oder sie bilden gelblichweisse Massen, welche kontinuierlich das ganze Lumen des Siebröhren-Gliedes ausfüllen und erst nach längerer Behandlung mit der Reaktions-Flüssigkeit in braunrote, mannigfach lappenförmige Gebilde zerfallen; sie ziehen sich zuweilen als ein kompakter, braungelber, auffallender Streifen durch die ganze Präparat-Breite und erlauben die Siebröhre in ihrer ganzen Länge zu verfolgen (Fig. 5). Namentlich in Tangentialschnitten kann man den Verlauf dieser röhrenartigen Elemente sehr gut eruieren (Fig. 8), ihre Anastomosen, vereinzeltes Vorkommen im übrigen Parenchym, die Verzweigung, welche zuweilen auch in drei Zweige aus dem Hauptstamme erfolgt (Fig. 6) u. s. w. Solche Massen pflegen gewöhnlich in den mit Kallose (*k*) schon verstopften Siebröhren vorzukommen (Fig. 7), obzwar umgekehrt manchmal — freilich in selteneren Fällen — diese nur Gluckosazonkörner zeigen, während in den unverstopften die Ausscheidungen auch in grösseren Mengen hervortreten können. Sie sind jedoch vielleicht nicht auf die inneren Gefässbündel beschränkt; sie können schon im ersten Kreise, welcher grösstenteils nur kambial ist und keine Gefässe bisher ausgebildet hat, zum Vorschein kommen, in den erwachsenen Bündeln verlaufen sie dann etwas von dem Holz-

---

[1]) Senft, l. c. pg. 25.

teile entfernt. Auch in den sog. Cribralprimanen kann man sie nachweisen. Zuweilen sind einige Glieder derselben zu dieser Zeit noch nicht kollabiert und können völlig mit dem Osazon ausgefüllt sein; sie werden dann durch mächtige Kallus-Platten von den anderen Teilen getrennt, welche schon zusammengedrückt sind und den Niederschlag nur in kleiner Menge führen oder auch völlig entleert sind. In der Richtung zum Kambium des Gefässbündels verlieren die Siebröhren an Breite und gewöhnlich auch an Osazon. In den Geleitzellen der Siebröhren habe ich keine grössere Menge von Ausscheidungen angetroffen, sondern sie enthielten gewöhnlich nur winzige gelbe Körnchen. Das Bastparenchym zeigte entweder nur diese [Fig. 9 *a*) *p*], oder — in den meisten Fällen — kugelige, ziemlich grosse Osazonsgebilde (Fig. 8 *p*), ebensowie das interfascikuläre Parenchym [Fig. 8 *P*, 9 *a*) *P*, 9 *b*) *P*], nur in einer etwas grösseren Menge als gewöhnlich; zuweilen schieden sich sowohl Körnchen als auch „Tröpfchen" aus. Es ist hier also ein augenscheinlicher Unterschied sichtbar gegenüber den Verhältnissen, welche Blass[8]) in den Siebteilen verschiedener, während des Winters untersuchten Bäume wahrgenommen hat. In denselben war der Inhalt der Siebröhren, welche in der Nähe des Kambiums verliefen, reicher als in den ferneren Elementen, so dass z. B. bei *Fraxinus excelsior* auch die Kambiformzellen übertraf; es geschieht dies nach Blass zu dem Zwecke, dass bei Beginn der nächsten Vegetations-Periode genug Reservestoffe der Pflanze vorhanden seien für die holzbindende Tätigkeit des Kambiums. Bei diesen Pflanzen handelt es sich freilich um Eiweissstoffe; ausserdem gibt es gewiss bei der nur zweijährigen Rübe ganz andere Verhältnisse. (Bei *Populus* spec. trat nach Blass eine ganz ähnliche Erscheinung hervor, nur dass das Kambiform durch die Menge der Eiweissstoffe die Siebröhren übertraf; bei *Populus canadensis* hat Czapek[9]) Rohrzucker nachgewiesen, sodass hier vielleicht in dieser Hinsicht eine neue Untersuchung nötig wäre.)

Im Xylemteile der Gefässbündel pflegt das Gewebe, welches den Gefässen ferner steht, zuweilen an Zucker und somit auch an Osazon sehr arm zu sein. (Fig. 10 *D. p.*) Allgemein aber fallen ins Auge Gefässe der kräftigeren Gefässbündel dadurch, dass sie mit zahlreichen kugeligen, ja auch massenhaft auftretenden Ausschei-

[8]) Blass, Untersuchungen über die physiol. Bedeutung des Siebtheils der Gefässbündel. Prings. Jahrbücher, XXII., pg. 276.

[9]) Czapek, l. c. pg. 131.

dungen wie beklebt erscheinen [Fig. 10 *C*, Fig. 9 *a*) *D*]. Es enthält nämlich das ihnen benachbarte Parenchym, welches aus länglichen, schmalen, zuweilen aber von den anderen durch nichts sich unterscheidenden Zellen besteht, die Saccharose in grösseren Koncentrationen (Fig. 11 *Dp*), so dass es in denselben nach der Reaktion mehr Osazon zeigt, ja bisweilen auch die Siebröhren darin erreicht [Fig. 9 *a*) *G*]. Mir scheint, dass Geschwind[10]) dasselbe beobachtet hat, wenigstens soweit man nach seiner Abbildung Fig. 51 urteilen kann; seine Beschreibung ist dagegen (wenigstens nach dem Referate) leider sehr ungenau.

Ich kann also Decaisne, Wiesner und auch de Vriese'sche Ansicht soweit bestätigen, als sie erklären, dass die Lokalisation der Saccharose in bestimmten Beziehungen zu den Gefässbündeln steht. Wenn man Reaktionen anwendet, bei welchen die Diffusion des Zuckers aus Siebröhren und anderen Zellen nicht ausgeschlossen ist, so kann man ganz gut das Fortschreiten bestimmter Veränderungen in deren Umgebung verfolgen, z. B. das intensive Rötlichwerden nach Raspail. Man hat überdies in Blattstielen von *Beta* mikrochemisch wirklich eine Zucker-Anhäufung in der Umgebung der Gefässbündel — in förmlichen „Zuckerscheiden" — konstatiert. Senft hat Ähnliches mit seiner Methode in den Blattstielen von *Canna, Maranta squarrosa*, frischen Feigen etc. gefunden. In den Rübenwurzeln kann man also ebenso — nach meiner Meinung — das die Gefässbündel umgebende Parenchym als Zuckerscheiden deuten, welche aber infolge der Produktion der oft so enormen Mengen Saccharose auch in grössere Entfernung von diesen gebildet werden, bis sie in kontinuierliche Gebilde verschmelzen. „Die Zuckerscheide" aber nach dem Begriffe Wiesners und de Vries dürfte nach meiner Ansicht kaum existieren.

Ich gehe nunmehr zur genaueren Beschreibung der mikrochemischen Befunde aus verschiedenen Teilen derselben Rübenexemplare über:

A. Exemplar 19·2%, 600 *g*; unterer Teil des ersten Viertels des Rübenkörpers (Hals).

I. Kreis: Sehr schwach, eben von dem unteren abgespaltet, trachëenlos. In der untersuchten Stelle eine Siebröhre, schmal, mit den durch Kallus bisher noch nicht verschlossenen Poren. In dieser nicht zahlreiche, elliptische Osazon-Ausscheidungen. In den Geleit-

[10]) Geschwind, l. c. pg. 793.

zellen und Bastparenchym winzige, goldgelbe Körnchen, im Rindenparenchym über dem Kreise ähnliche, sonst auch grössere, bis kugelige Gebilde ausser den Körnchen, oder nur Dextrosazonsphären.

II. Kreis: Ein schmales, spiral-netzartig verdicktes Gefäss; Parenchymzellen, welche demselben benachbart sind, nur hie und da mit kugeligen Osazon-Gebilden, „Tropfen“. Siebröhren mit reichlicherem, stellenweise dicht neben einander angehaüftem Osazon von ellipsoiden Formen. An der untersuchten Stelle eine Siebröhre unverstopft. Bastparenchym wie bei I.

III. Kreis: Phloëmparenchym und Holz wie im zweiten Kreise. 1 Siebröhre verstopft, 3 nicht; die Osazon-Massen in den Siebröhren grösser als im interfascikulären Parenchym, auch enger nebeneinander ausgeschieden, sodass in den Siebröhren schon mehr Zucker als in diesem angehäuft war.

IV. Kreis: Eine Siebröhre verstopft, 3 nicht. Das Füllgewebe, Bastparenchym und Geleitzellen wie oben. Im Kambium keine Ausscheidungen. Die Zellen bei dem kräftigen Xylem mit grossen Dextrosazon-Sphärokrystallen.

V. Kreis: 2 Siebröhren verstopft, 4 kallusfrei. Übriges wie bei IV.

VI. Kreis: 3 Siebröhren verstopft, 3 unverstopft. In einem anderen Schnitte 5 Siebröhren verstopft, 2 unverstopft. Die verschlossenen Siebröhren besitzen meistens etwa soviel Osazon wie die unverklebten, aber 2 derselben (in dem zweiten Schnitte) zeigten hellgelbe Massen von Osazon, welche ganze Strecken ausfüllten; die dritte war teilweise kollabiert, im Lumen des übrigen Teiles enthielt sie Osazon.

VII. Kreis: 7 Siebröhren, darunter auch enge, verstopft, 2 frei.

VIII. Kreis: 8 Siebröhren verklebt, an der untersuchten Stelle wurde keine unverstopfte konstatiert.

Diese Kreise nahmen etwa zwei Drittel des Rübenumfanges ein, VII. und VIII. das zweite (innere) von ihnen; das Zentrum war nicht erhalten. In dem zweiten Drittel nahm auffallend die Anzahl der verstopften Siebröhren zu; schon im IV. Kreise ist Osazon bei den Gefässen vorhanden. Die ersten 6 Kreise zeichneten sich durch grobe, struppige Massen aus, die Schnitte, welche den siebenten enthielten, hatten kleinere „Tröpfchen“, die Schnitte mit dem achten Kreise dunklere Kügelchen — welche Variebilität vielleicht nur indirekt durch die Lokalisation des Zuckers bedingt ist. Die grösste Menge Zucker war etwa im IV., V. u. VI. Kreise aufgespeichert,

denn hier finden sich die grössten Osazon-Massen und im Ganzen (im Parenchym und den Siebröhren) in grösster Anzahl.

Dasselbe Exemplar, Fuss.

I. Kreis von der Peripherie: 1 Siebröhre unverstopft, 4 verklebt.

II. Kreis: Viele Siebröhren mit den beiderseits von Kallose bedeckten Querwänden.

IV. Kreis: 0 unverstopft, 5 verstopft.
V. „ : 1 „ 3 „ .
VI. „ : 3 „ 2 „ .

Centrale Gefässbündel: Genug Siebröhren unverstopft. Diese schmal, Osazon darin in der Form von ellipsoiden Gebilden, im Ganzen nicht reichlich ausgeschieden und Siebröhren aus dem peripheren Siebteil nicht sehr deutlich. Gut zu sehen sind in diesen Partieen gewisse radiale Parenchymstreifen, welche auch Osazon enthalten.

B) 18·5%₀, 550 *g*. *Unterer* Halsteil.

I. Kreis: 4 Siebröhren unverstopft, 0 verklebt.
II. „ : 4 „ „ 2 „ .
V. „ : 3 „ „ viele „ .

Ein Kreis aus dem zweiten Drittel: 2 unverstopft (bei den Gefässen), 7 verstopft.

Centrales Gefässbündel: 4 unverstopft, 1 verstopft an einer Stelle; an der anderen
3 unverstopft, wenige verstopft. In der untersuchten Partie war das Gefässbündel durch parenchymatisches Gewebe durchrissen, welches aus flachen, radial verlängerten Zellen bestand; diese enthielten viele Osazon-Tropfen. Derselbe Streifen begleitete wahrscheinlich an dieser Stelle den Gefässbündelstrang, welcher zu den Seitenwürzelchen ging oder eine Radialanastomose, wie sie zwischen den Kreisen vorkommen.[11])

[*B*₁) Exemplar 18·1%₀, 650 *g*. Unterer Halsteil.

Die Schnitte wurden aus der Partie verfertigt, wo keine Radialstreifen verliefen.

In den centralen Gefässbündeln auch die dem Kambium naheliegenden Siebröhren durch mächtige Kallusbelege verstopft.]

---

[11]) Schindler, l. c. pg. 358.

Fuss (18·5%, 550 *g*).

I. Kreis: 3 verstopft, 1 unverstopft. Auch in anderen Kreisen fanden sich an der Peripherie viele verstopfte Siebröhren.

VII. Kreis von der Peripherie: 7 verstopft, 3 unverstopft.

Kreis bei dem Centrum: 4 verstopft, 3 unverstopft.

C) 12·3%, 1150 *g*. Unterer Halsteil.

I. Kreis: 0 Siebröhren.
II. Kreis: 4 unverstopft, 4 verstopft.
III. Kreis: 2 „ 5 „ .
V. Kreis: 5 verstopft, 0 unverstopft.
VI. Kreis: 4 „ 0 „ .
VII. Kreis: 4 „ 1 „ .

In dem Fusse, und zwar sowohl in seinem höheren als auch in unterem Teile desselben Exemplares waren die Siebröhren meistens in den centralen Bündeln verstopft; auch diejenigen, welche am jüngsten waren.

D) 14·4%, 600 *g*. Unterer Halsteil.

I. Kreis von der Peripherie: 3 unverstopft, 0 verstopft.
II. „ „ „ : 3 „ 2 „ .
III. „ „ „ : 3 „ 1 „ .

Auffallend ist bei dem Exemplar *C* gegenüber *A* u. *B*, dass in demselben Teil (untere Halspartie), schon in den ersten Kreisen sehr oft in den Siebröhren Kallusbelege erscheinen. Es nimmt dies augenscheinlich in ihrer Erwachsenheit (1150 *g*) Ursprung; in die peripheren Kreise des nicht mehr wachsenden Teiles wurde kein neuer Zuckervorrat zugeführt und sie traten aus der Leitfunktion aus. Die Verhältnisse bei *D* stimmen damit nach meiner Meinung gut überein; diese Rübe war, ebenso wie *A* u. *B*, vielleicht, wenn wir ihre Gewichte in Betracht ziehen, noch weiteren Dickenwachstums, der Ausbildung neuer Kambien, fähig, und es offenbaren nun die benachbarten schon jüngeren Kreise noch ihre Leistungsfunktion damit, dass sie ihre Querwände nicht verkleben. Ebenso hängt es mit der relativen Unreife des Exemplares *A* und besonders *B* (resp. B_1) zusammen, dass in dem Fusse in den inneren Gefässbündeln zahlreiche unverstopfte Siebröhren auftraten. Dass gerade die inneren Bündel solche Veränderungen gegenüber den äusseren zeigen, deren Siebröhren grösstenteils verstopft sind, rührt vielleicht davon her, dass die Hauptbündelstränge nach den de Vriese-schen Beobachtungen mit diesen Kreisen anastomosieren. Ob aber diese Erscheinung nicht mit dem hohen Zuckergehalt jener Proben zusammenhängt, darüber kann

man — mit Rücksicht auf die bisher noch nicht genau studierte Kompliziertheit der Beziehungen, welche die Blattspurstränge zu den Gefässbündel-Kreisen zeigen, auf Grund dieser nicht zahlreichen Beobachtungen kein Urteil fällen.

Junge Rübchen:

1. Breite 4·5 *mm.*

I. Kreis: 4 unverstopft, 0 verstopft.

II. Kreis: 3 „ , 0 „ .

2. Breite 4 *cm.*

I. Kreis: Kambium.

II. Kreis: 3 unverstopft, 0 verstopft.

III. Kreis: 3 „ , 1 „ .

Ähnlich verhalten sich andere Rübchen; auch in den centralen Gefässbündeln gibt es viele, auch zwischen den breiten Siebröhren, die mehr an der Peripherie liegen, solche, welche unverstopft sind.

Gelöste Kohlenhydrate — wenn man von der sehr gewöhnlichen Anwesenheit von Stärke, Amylodextrin etc. absieht — wurden in den Siebröhren schon mehrmals nachgewiesen. Aus der ältesten Literatur kann man Sachs[12]) anführen, welcher gefunden hat — als eine Ausnahme gegenüber der Anhäufung der betreffenden Stoffe im Parenchym — in den sog. Gitterzellen Mohls (≐ Siebröhren) der Gefässbündel aus Stengeln und Kolben reifender Maïspflanzen den roten Niederschlag von Kupferoxydul als Zeichen der Anwesenheit von Glukose und Dextrin. Zacharias[13]) hat nach der zweistündigen Wirkung der verdünnten Schwefelsäure einen die Fehling'sche Lösung stark reduzierenden Stoff aus den Tropfen, welche nach dem Anschneiden der Gefässbündel von *Cucurbita Pepo* herausquellen, gewonnen; nach seiner Meinung war es urprünglich ein dextrinartiger Stoff, in welchem aber Kraus richtiger Saccharose als Bestandteil des Siebröhren-Zellsaftes bestimmt hat. Czapek[14]) hat dann in zahlreichen Fällen zwischen den stickstofflosen Assimilaten der Siebröhren Glukose nachgewiesen. Aus den 57 untersuchten Arten zeigten 18 in diesen Zellen Stärkekörner, 27 Dextrose, aber nur 3 Saccharose (*Acer Negundo*, *Populus canadensis*, *Cucurbita Pepo*). Es ist aber möglich, dass nur das langdauernde Liegen (3—4 Stunden) der Schnitte

---

[12]) Sachs, Mikrochemische Untersuchungen, Flora 1862, pg. 314.

[13]) Zacharias, Ueber den Inhalt der Siebröhren von Cucurbita Pepo. Botanische Zeitung. 1884, pg. 70.

[14]) Czapek, l. c. pg. 181.

in einer wenn auch mässig verdünnten Invertin-Lösung durch das Herausdiffundieren der Saccharose dieses Resultat herbeigeführt hat. Ausser der Zuckerrübe, Futterrübe (der sogen. Mamutrübe, Wurzel) habe ich den Rohrzucker in den Siebröhren bei *Saccharum officinarum* vorgefunden. (Eine systematische Untersuchung nach den verschiedenen Spezien habe ich in dieser Richtung nicht unternommen.) Dass es sich um Saccharose und nicht um einen einfacheren Reduktions-Zucker handelt, beweist schon die Notwendigkeit einer längeren Dauer der Lidforss'schen und Senft'schen Reaktion. Überdies war die Ausscheidung des Niederschlages resp. Osazons gleichförmig und gleichzeitig im Parenchym, wo schon die Saccharose nachgewiesen wurde, wie in den Siebröhren. Bei dem Zuckerrohr habe ich in dieser Hinsicht einen Stengel untersucht, welcher etwa 5 *cm* hoch und 2 *cm* breit war; er hatte oben schon seit längerer Zeit eine Schnittfläche und hat aus der Seite des Gipfels eine grosse, wachsende Knospe getrieben. Es wurden Radialschnitte aus dem Marke genommen. Die Siebröhren waren meistens schmal, durch die Kallose nicht verstopft und zeigten goldgelbe Dextrosazon-Tropfen (Fig. 12), welche zuweilen nur vereinzelt in einem ihrer Glieder, ein andermal aber auch in grösserer Menge vorhanden waren — etwa derjenigen, wie sie das benachbarte Parenchym zeigte. Die Beziehung der Siebröhren-Tätigkeit zu der sich eben entfaltenden Gipfelknospe — resp. umgekehrt — tritt nach meiner Meinung klar vor Augen.

Es zeigen Czapek's (l. c.) Befunde wenigstens, dass es nicht richtig ist, den Siebröhren ausschliesslich die Leitung der stickstoffhaltigen Stoffe zuzuschreiben. Im Gegenteil — mit den von ihm ausgeführten Experimenten beweist er, dass nur geradlinig verlaufende Bahnen — Siebröhren u. Kambiformzellen — im Siebteil die Leitung der stickstoffhaltigen und stickstofflosen Assimilate besorgen können; den ersteren fällt da freilich die Hauptrolle zu.

Die interessantesten aus Czapek's Versuchen waren diejenigen, bei welchen er aus den Blattstielen, in denen sicherlich die Gefässbündel ohne Queranastomosen verlaufen, (*Vitis vinifera*, *Begonia*), durch die senkrecht und quer geführten Schnitte die der einen Laminahälfte angehörenden Gefässbündel beseitigt hat. Da hat die Sachs'sche Jodprobe gezeigt, dass die erwähnte Blatthälfte ihre Kohlenhydrate während der Nacht nicht abgeleitet hat — und dass also in der queren oder schiefen Richtung die Leitung der Assimilate im Blattstiele nicht geschieht, sondern nur durch die Längsache des

Stieles in der senkrechten Richtung; und eine solche ist nach Czapek nur in den Leptomelementen möglich.

Um zu beweisen, dass im Lumen dieser Leptomelemente die stickstoffhaltigen Stoffe, sowie die Kohlenhydrate transportiert werden und nicht etwa jede derselben in von einander getrennten Bahnen, hat Czapek an *Salix fragilis* und *Populus canadensis* „Ringelungsversuche" hauptsächlich in der Modifikation ausgeführt, dass er von der oberen Schnittfläche eine senkrechte Rindenbrücke, von etwa 1 *cm* Länge, führte, darauf derselben eine horizontale anschloss, welche endlich, wieder mittels eines vertikalen Schenkels, in die untere Schnittfläche einmündete. Doch, obzwar eine Rindenbrücke erhalten blieb, welche freilich nicht geradlinig verlief, sondern nur in der Mitte durch einen horizontalen Schenkel versehen war, war das Resultat dasselbe, wie wenn eine totale Ringelung stattgefunden hätte. Der Kallus hat sich nur unter der vertikalen oberen Brücke ausgebildet und verlief höchstens einigermassen noch am horizontalen Schenkel; die Würzelchen haben sich ebenso nur an dieser Stelle oder bei ihrem Rande bis zur horizontalen Knickung entwickelt. Es fand also im horizontalen Schenkel keine Leitung der organischen Stoffe in der queren Richtung statt oder höchstens in einem sehr beschränkten Masse.

Nun sind es die längsten Phloëm-Elemente, unter diesen in der ersten Reihe die Siebröhren selbst, welche nach Czapek mit der Aufgabe alle Assimilate zu leiten betraut sind; und dass auch Kohlenhydrate in denselben wirklich häufig vorkommen, wurde schon erwähnt.

Gegen diese Auffassung findet Haberlandt [15]) einige Einwände: Aus Czapek's Versuchen kann man nicht schliessen, dass die Leptomstränge der Blattspindel beiderlei Assimilate ableiten; sie beruhen auf der Voraussetzung, dass di e Leitung im Leitparenchym mit derselben Leichtigkeit in der Quere — wie Längsrichtung geschieht. Doch ist nach Haberlandt ausser anderem schon die längliche Zellenform einer Querleitung nicht besonders günstig und es beweisen jenem überhaupt die Czapek's Versuche nur, dass auch im Leitparenchym die Längsleitung leichter und schneller vor sich geht, so dass die Querleitung so langsam verlief, dass das Auswandern der Kohlenhydrate in der betreffenden Hälfte aufhörte. Die bekannten Versuche Schimper's — in denen aber Czapek einige Ungenauigkeiten findet

[15]) Haberlandt, Physiologische Pflanzenanatomie, III. Auflage, pag. 350.

und welche übrigens auf Organe sich beziehen, in denen sowohl die Zuleitung als auch die Ableitung der plastischen Stoffe geschieht — gegenüber den Blattstielen und Stengeln, welche nur Ableitungsbahnen darstellen — mit den *Plantago*-Blättern scheiden die Leptome aus der Leitung der gelösten Kohlenhydrate aus und da wäre es nach Haberlandt sonderbar, wenn dieselben Elemente in den Blattstielen eine andere Funktion übernehmen sollten. Wenn die Siebröhren in der Blattlamina in der ersten Reihe nur zur Leitung der Eiweisssubstanzen bestimmt sind, so wird dasselbe auch für die Blattspindel und Stengel gelten. Höchstens als eine Nebenfunktion kann bei ihnen hie und da die Leitung der stickstofflosen Assimilate auftreten. „Die Hauptmenge der Kohlenhydrate wird zweifelsohne im Leitparenchym transloziert.“ (pg. 299).

Im Folgenden weist Haberlandt, und zwar grösstenteils berechtigt, die Ansichten Frank's[16]) und Blass's[17]) zurück, nach denen die Aufgabe der Siebröhren nur eine Anhäufung der Eisweisstoffe ist; es behauptet nämlich Blass (l. c.) schlechtweg, dass eine ausgiebige Leitung der Eisweisstoffe in den Siebröhren überhaupt nicht stattfindet. Ich werde einige seiner Befunde anführen, ohne indes seinem Standpunkte beizupflichten.

In dem Inhalte des Phloëms kann man bisweilen auffallende Veränderungen beobachten. So fand Blass im Herbst oder Winter bei einer ganzen Reihe von Holzpflanzen (*Syringa vulgaris*, *Fraxinus excelsior*, *Tilia usw.*), dass ebenso wie im Markparenchym die Stärke auch in dem Siebteile der Eiweissgehalt an Menge zunimmt. Auch die Siebröhren, welche im Frühling bei einigen untersuchten Pflanzen einen nicht zu reichen Eiweissgehalt gezeigt haben, wurden jetzt mit Eiweisstoffen ausgefüllt und bald darauf mit Kallose verstopft — wahrscheinlich um den Inhalt aufzubewahren. Im Frühling wird der Kallus gelöst und das Eiweissmaterial nimmt wieder ab, weil es nach Frank[18]) in der Querleitung durch die sekundären Leptomstränge zum Kambium abgeleitet wird, dessen Bautätigkeit es dann einleitet. Es möchten also höchstens eine Bewegung der Eiweisstoffe von einem Markstrahle zum anderen die im Frühling vom Kallus entblössten Querwände gestatten — indem sie sonst bloss Reserve-Organe darstellen.

---

[16]) Frank, Lehrbuch der Botanik, Bd. I. 1892, pag. 184 und 604.
[17]) Blass, Pringsheims Jahrbücher 1890.
[18]) Frank, Lehrbuch I., pag. 185.

Warum sich die Siebröhren so häufig an den Querwänden verstopfen, welche die Kommunikation gerade in der Längsrichtung ermöglichen, erklärt Frank nicht. Auch bei den Ringelungs-Versuchen kann man Veränderungen in dem Inhalte des Siebteiles resp. Siebröhren beobachten.

Sie betreffen den Kallus, welcher sich an der oberen Schnittfläche bildet. Es füllen sich jetzt unter anderem die Siebröhren, behufs Ernährung der event. entstehenden Würzelchen reichlich mit Plasma; das geschieht auch dann, wenn der Kallus an der unteren Schnittfläche sich bildet, wozu bei *Phaseolus vulgaris* der Stickstoffgehalt der sich zu dieser Zeit entleerenden Knöllchen das Material dargeboten hat. Die Nitrat-Probe hat wenigstens in dem Kallus wie im Marke des abgeschälten Teiles ein positives Resultat ergeben, während sich unter dem Fruchtstande kein Blauwerden gezeigt hat, weil die zu ihrer Entstehung nötige Salpetersäure schon konsumiert war.

Es stimmen also, wie ersichtlich, einige von diesen Resultaten mit den Tatsachen, welche an der Zuckerrübe gewonnen wurden, überein. Dass die Siebröhren vorzugsweise leitende Organe darstellen, darüber kann kein Zweifel bestehen: es bezeugt dies ihre Organisation, die Resektions- und Ringelungsversuche, das Aufhören ihrer Funktion durch Narkotisieren etc. In der Zuckerrübe aber enthalten sie, freilich neben anderen Stoffen, hauptsächlich den Eiweissverbindungen, auch eine bedeutende Menge Saccharose; ja eine solche, dass man genötigt ist zu vermuten, dass dieselbe ihr hauptsächliches Inhalts-Material vorstellt. (Eiweissreaktionen über die Siebröhren habe ich nicht unternommen.) Diese Tatsache gilt für die Rüben, von welchem Zuckergehalte immer und für den grössten Teil des Rübenkörpers; auch in den Blattstielen und zwar in den noch unverstopften Siebröhren habe ich das Osazon gefunden, welches, der Gleichförmigkeit der Reaktion gemäss, wahrscheinlich ebenso aus der Saccharose hervorgegangen ist. Und weil sie gerade mit unverstopften Querwändern in den Partieen vorkommen, von welchen man sicher urtleilen kann, dass in ihnen eine lebhafte Ableitung der Assimilate vor sich geht, oder in der Erntezeit stattfand: in der Peripherie der am deutlichsten wachsenden Teile der Rübenwurzel (im oberen Teile), bei den Radialstreifen, welche zu den Nebenwürzelchen führen, in der ganzen Breite der jungen Rübchen, welche gerade sich zu verdicken beginnen, im Blattstiele, bei *Saccharum officinarum* im Stengelteil, welcher unter einer sich entwickelnden assimilierenden Knospe sich

befindet — so liegt der Schluss nahe, dass sie in hohem Grade die Ableitung der Saccharose, freilich noch nebst anderen Assimilaten, in der Rübenwurzel besorgen.

Die Rübenwurzel ist ein Reserveorgan, ein Organ, in welchem die Saccharose angehäuft wird. Auch ihre Gewebe müssen in der Ruhezeit, soweit sie in einer grösseren, auffallenderen Menge angehäufte Stoffe aufweisen, als Speichergewebe aufgefasst werden. Dies gilt in noch höherem Masse für die Fälle, wo bestimmte Zellen als ihre Spezialspeicher sich offenbaren, indem sie überdies Einrichtungen zeigen, welche ihren Abgang verhindern, event. indem sie mit denselben an Stellen hervortreten, wo auf eine Bewegung der plastischen Stoffe zu schliessen überhaupt unmöglich ist. Und die Siebröhren zeigen dies Alles in den inneren Kreisen (etwa von IV. an beginnend): sie zeichnen sich auffallend nach der Senft's Reaktion durch Osazon-Massen aus und besitzen äusserst zahlreiche, glänzende, öfters mächtige Verstopfungen. In bestimmten Partieen und gewissen Zeitfristen gehen in der Rübenwurzel die Siebröhren aus ihrer Leitfunktion in diejenige der Reserveorgane über, indem sie spezifische Vorratskammern für Saccharose werden. Es zeigen vielleicht einen ähnlichen Funktionswechsel auch bei anderen Pflanzen die Siebröhren während der Ausbildung der Kallusbelege.

Durch welche Ursachen es bedingt ist, dass die Zuckerrübe keine Reserve-Idioblasten ausbildet, in welche die Saccharose aus den Siebröhren geleitet werden könnte, lässt sich nicht sagen. Es ist augenscheinlich am einfachsten, wenn ein Stoff in demselben Organ deponiert, kondensiert werden kann, in welches er ursprünglich — vielleicht in kleineren Koncentrationen — allmählich geleitet wurde, unter einer nur geringfügigen Modifikation desselben. Dies stellt dann ein gewisses labiles Uebergangs-Reserveorgan vor. Weiter ist es merkwürdig, dass die Reserve-Idioblasten meistens Zellen von nicht grossen Dimensionen sind. Die Rübenpflanze verschafft sich solche damit, dass sie die röhrenförmigen Siebröhren durch die Kallusplatten in Segmente entweder ursprüngliche oder multiple zerteilt. Es kann ein solches Verfahren bei dem abermaligen Erwachen der Vegetations-Tätigkeit eine allmählige, nur in bestimmten Quantitäten erfolgende Abnahme des Reservestoffes ermöglichen; vielleicht macht es auch einen überflüssigen Zufluss unmöglich, welcher eventuell den Verlauf eines bestimmten Stoffwechsels hindern würde. Leider ist die ganze Frage nach dem Mechanismus der Stoffleitung in Siebröhren so wenig

erforscht, dass man über diese teleologischen, wenig befriedigenden Vermutungen nicht hinaus kann.

Eine auffallende Lokalisation der Saccharose erscheint — wie schon erwähnt — bei der Zuckerrübe auch in den prosenchymatisch verlängerten Zellen, welche Gefässe begleiten.[19]) Ob davon der Zucker in dieselben abgeleitet wird, um durch diese aufzusteigen, wie es z. B. im Holze der Bäume im Frühling geschieht, oder ob dies in etwaigem Zusammenhange mit dem Ablegen der Pentosane in dem ungelösten Zustande an holzigen Geweben steht, hatte ich keine Gelegenheit zu untersuchen.

Wie bekannt ist die Saccharose in der Rübenwurzel nicht überall in der gleichen Konzentration verteilt. Das Maximum des Zuckergehaltes liegt etwa in der Höhe des Schwerpunktes der Zuckerrübe, von wo sowohl zum Kopfe — langsamer — wie auch zu der Spitze — u. zwar schneller — die Menge des Zuckers abnimmt. In dem in dieser Höhe geführten Querschnitte befindet sich das Maximum in dem Kreise, welcher vom Centrum etwa drei Viertel des Halbmessers entfernt parallel zur Oberfläche läuft, von wo wieder der Zuckergehalt langsamer zum Centrum, zur Peripherie aber rapid abnimmt. (Plot.) Sehr sonderbar und nach unseren bisherigen physiologisch-anatomischen Kentnissen[20]) unerklärlich erscheint die gründlicher verfolgte Lokalisation der Zuckerzonen, wie sie unlängst mittels sehr präziser Methoden Schubart[21]) ausgeführt hat: „Die zuckergleichen Zonen bilden sozusagen Kegelmäntel, die ineinander geschichtet sind, u. zw. im oberen Teil der Rübe mit der Spitze nach unten, der Basis nach oben, im unteren Teile mit der Spitze nach oben und der Basis nach unten liegen. An einer Stelle, etwa der mittleren zuckergleichen Zone, treffen die Kegelmäntelspitzen aufeinander; dann werden diese Kegelmäntel durch korrespondierende, abgestumpfte Kegelmäntel gedeckt und füllen so die Rübe aus und so erhält man in Uebereinstimmung der Forschungen anderer seitlich die reichste zuckergleiche Zone."

Zu quantitativen Untersuchungen die Senft'sche Reaktion anzuwenden ist ziemlich schwer. Doch ist es mir gelungen, mikrochemisch

---

19) Gerschwind, l. c. pg. 792.

20) Die betreffende Literatur ist in Oester.-Ung. Zeitschrift für Zuckerindustrie VI., 1906, zusammengestellt (H. Briem, Die Zuckerlagerung in der Rübenwurzel mit Rücksicht auf ihre Untersuchung zu Zuchtzwecken).

21) Schubart, Zur Vertheilung des Zuckers in der Rübe. Centralblatt für die Zuckerindustrie, 1906, pg. 994.

in groben Umrissen Unterschiede in einzelnen Kreisen und Partieen des Rübenkörpers, wie sie Plot angegeben hat, festzustellen. Die Schubart'schen Befunde mikrochemisch zu verfolgen war mir schon unmöglich aus Mangel an Material.

Dagegen wird nach meiner Meinung aus Folgendem die Verschiedenheit des Zuckergehaltes aus verschieden zuckerhaltigen Rüben ersichtlich. Es wurden zuerst 2 Exemplare: 19·2%, 600 *g* und 14·4%, 660 *g* verglichen, wobei bei beiden der vierte (distinkte) Kreis von der Peripherie eines Radialschnittes, welcher durch den unteren Teil des ersten Viertels des Rübenkörpers (unterer Halsteil) geführt wurde, zur Untersuchung gelangte — also ein Kreis, welcher in der betreffenden Partie einer der zuckerreichsten war. Es wurden Schnitte ausgewählt, welche eine gleichartige Osazon-Ausscheidung zeigten (was nach meiner Meinung für die Beurtheilung ähnlicher Beziehungen sehr wichtig ist), nämlich in der Form von struppigen Massen.

Ein Schnitt aus der 19% Rübe zeigte mindestens 6 Reihen von geradlinigen, grossen, nahe nebeneinander stehenden Siebröhren-Massen im Phloëm [Fig. 9 *a*), *s*]. Ein Schnitt aus der 14% Rübe hatte 4 auffallende Reihen von Osazon-Massen, die Klumpen waren aber kleiner und in grösseren Entfernungen gelagert; auch die Dextrosazon-Ausscheidungen bei dem Holze dieses Kreises waren kleiner als bei dem vorigen. (Fig. 9 *b*, *L* = Leptom, *D* = Xylem, *s* = Siebröhren.)

Weiter wurden wieder die Schnitte aus dem 4. Kreise verglichen, welche aber den Füssen (das dritte Viertel der Körperlänge vom Oben) aus dem Exemplare 18·5%, 550 *g* und 12·5%, 1150 *g* entnommen wurden. Beide zeigten rundliche und ellipsoidische, „tropfenartige" Ausscheidungen; bei dem 12% Exemplare waren die „Tropfen" etwas grösser.

18·5%: 5 Siebröhren-Streifen mit zahlreichen, naheliegenden und in kontinuierliche Massen zusammenfliessenden Ausscheidungen.

12·5%: 2—3 deutliche Reihen von diskontinuierlichen, ellipsoidischen Osazon-Gebilden, welche Siebröhren verriethen.

Ich bin also der Meinung, dass sich wirklich Unterschiede feststellen lassen, und zwar gerade bezüglich der Siebröhren, in denselben Partieen von verschieden zuckerhaltigen Rüben. Darauf beschränke ich mich; schon in der Einleitung habe ich einige Mängel angedeutet, welche bei diesem Materiale bei der Anwendung von Senft's Reaktion auftreten und derentwegen diese mir bisher noch zu wenig präzis erscheint für eine derartige minuciöse Unter-

suchung. Nach einer weiteren Vervollkommnung derselben wird es vielleicht mit grösserer Sicherheit möglich sein histologische Unterschiede verschieden zuckerhaltiger Rüben festzustellen.

Der heutige Stand dieser Frage ist, dass man zwar annäherungsweise nach der Rübenstruktur ihren Zuckergehalt abschätzen kann, ohne dass aber auch nur von weitem diejenige Zuverlässigkeit erzielt wird, welche die Polarisation darbietet. Die hoch polarisierten Rüben zeichnen sich durch Festigkeit und Brüchigkeit des Gewebes aus, was nach Henneguy eine Folge ihrer Turgescenz ist, ihre Struktur ist verdichtet, kleinzellig und delikat. Die Gefässbündel pflegen zahlreich zu sein, die Phloëmteile zeichnen sich durch ihre Mächtigkeit aus. Ringsum die Gefässe (so wenigstens möchte ich nach den Geschwind'schen[22]) Abbildungen urteilen) gruppieren sich zahlreiche, im Querschnitte polygonale Zellen mit mehr oder weniger kollenchymatisch verdickten Wänden; auch die Zellen des interfascikularen Parenchyms sollen eckiger sein gegenüber dem rundzelligen, nur lose zusammenhängenden Parenchym der zuckerarmen Rüben. Ja, wenn zuweilen Resultate der Polarisation mit den Struktur-Verhältnissen der untersuchten Exemplare nicht übereinstimmen, wenn diese z. B. einen niedrigeren Procentsatz zeigen, ist es nach Geschwind Frage, ob es nicht die Folge eines zufälligen Zuckerverlustes ist, welcher durch eine mehrmonatliche Aufbewahrung (es werden nämlich die Rüben gewöhnlich erst kurz vor dem Anfang des Frühlings polarisiert, um später selektiv zur Samenzucht ausgesetzt zu werden), durch den Aufbewahrungsort, die Tätigkeit verschiedener Organismen etc. herbeigeführt wird. Dabei lässt sich freilich nicht leugnen, das verschiedene individuelle Variationen hervortreten können.

Diese Erfahrungen, welche grösstenteils schon seit langer Zeit bekannt sind, suchte ich mit Dir. *Briem* in einem primitivem Versuche auszubeuten, welchen wir in der Zuchtstation *Úholičky* ausgeführt haben. Es wurden aus grossem Materiale im Mai 1906 vier Rübchen von der Länge 140 *mm*, Kopfumfang ca 38 *mm*, und von einem möglichst gleichen Aussehen ausgelesen. Es wurde allen in ihrer unteren Körperpartie ein gleicher Teil abgeschnitten, dieser an Ort und Stelle anatomisch untersucht und der Rest (der unversehrte Kopf mit 35 *mm* Wurzel) gleich sorgfältig eingepflanzt. Die anatomischen Verhältnisse der einzelnen Exemplare, wie sie in derselben Rübenpartie konstatiert wurden, waren:

[22]) Geschwind, l. c. pg. 795.

1. Phloëmteile niedrig, Zellen in der Zone, wo die sog. Zuckerscheide sich befinden sollte, grob.

2. Phloëm-Teile höher, benachbarte Zellen feiner und zahlreicher.

3. Phloëm-Teile auffallend ausgebildet, hoch.

4. Phloëm-Theile nicht gerade mächtig, aber ihre Struktur sehr delikat.

Diesen Charakteren gemäss habe ich gemeint, dass Nr. 1. u. 2. nach der Ernte ärmer, 3. u. 4. zuckerreicher sich zeigen werden, und dass Nr. 1. endlich zur zuckerärmsten Rübe sich entwickeln wird.

Die Resultate der Polarisation, welche nach der Oktober-Ernte 17./10. 1906 von der Firma *Nevole & Neumann* in Prag ausgeführt wurde, waren:

Nr.	1.	2.	3.	4.
Gewicht:	37 *g*	75 *g*	62 *g*	124 *g*
Zuckergehalt:	14·05%,	12·45%,	16·40%,	14·50%.

Es entsprach also der Zuckergehalt dem Vorhergesagten, aber nur teilweise.

Nach meiner Ansicht ist es aber durchaus nicht die Basis für eine exaktere Untersuchung erschüttert; die neueren Arbeiten aus der experimentalen physiologischen Anatomie erwecken da neue Hoffnungen.

Laurent[28]) gibt an, dass die Erbsen, welche asseptisch in der Detmer's Nährlösung mit Glukose kultiviert wurden, Elemente des primären Holzteiles in der Wurzel auffallend dickwändiger als in blosser Mineralflüssigkeit ausgebildet haben. Das sekundäre Holz zeigte enge Gefässe und ausserdem zahlreiche Sklereiden; diese innere Sklerosis hat auch den Phloëm ergriffen. Die Hauptwurzeln von *Maïs*, welche in Detmer mit 4% Glycerin kultiviert werden, verdicken, nebst anderem, gegenüber den normalen die Wände der Zellen von Endoderm und Pericykl und vermehren die Anzahl der Bündelstrahlen sowie der charakteristischen grossen Gefässe. Das interfascikulare Gewebe wird sklerificiert und indem die Wände an Dicke zunehmen, bildet es einen fast kontinuirlichen Sklerenchymring, welcher die Gefässe einschliesst.

---

[28]) Laurent, Recherches sur la nutrition carbonée des plantes vertes a l'aide de matières organiques. Revue générale de Botanique 1904, pag. 190 et seq.

Noch weiter gehende Veränderungen hat MOLLIARD[24]) gewonnen, indem er — natürlich asseptisch — Samen verschiedener Pflanzen in Mineral-Lösungen mit verschiedenen organischen Stoffen kultivierte.

So löst bei *Ipomea purpurea* eine Zugabe von 10% Saccharose in dem Stengel die Bildung eines kräftigeren Phloems aus; während die Stengelchen, welche in bloss mineralischen Lösungen gezogen worden sind, in dem Momente, wo die sekundären Elemente sich konstituieren, einige schon ausgebildete Gefässe ausser dem Siebteile zeigen, sind dagegen in der Saccharose die Siebröhren zahlreicher, ohne dass ein einziges Gefäss ausgebildet wäre. (Vielleicht wäre es nicht uninteressant, wenn man den Gehalt dieser Siebröhren einer mikrochemischen Untersuchung unterziehen wollte.)

Bei dem Radieschen (*Raphanus sativus*) in Detmer + 15% Glukose hat ein Exemplar keinen Knollen ausgebildet. Das Hypokotyl zeigte aber gegenüber dem normalen das Markparenchym von einem kollenchymatischen Charakter, die Gefässe mehr verdickt, aber von einem kleineren Lumen, in dem sekundären Holze Sklerenchym und einen mächtigen extrakambialen Phloëm. In den Knollen der Exemplare, welche in 10% Glukose gezogen wurden, war wieder die Dickwandigkeit der Parenchymzellen und der Gefässe am Interessantesten. Die für das Radieschen-Knöllchen so charakteristischen Phloëm-Inseln in dem sekundären Holze erschienen in einer weit grösseren Anzahl und bestanden aus zahlreicheren Zellen als bei den normalen Pflanzen. Eine grosse Menge Stärke wurde aus der Glukose im ganzen Parenchym kondensiert, wieder zum Unterschiede von den normalen Verhältnissen.

Diese Erscheinungen erinnern in Manchem auf einige anatomische Verhältnisse, wie sie bei den Zuckerrüben geschildert wurden, so wie dieselben durch Variieren der Koncentrationen des Zellsaftes bei gewissen Zuckersorten von *Maïs* erzielt wurden. Vielleicht wäre es auch bei der Zuckerrübe durch das asseptische Kultivieren der Pflänzchen in den verschieden konzentrierten Zuckerlösungen möglich, genauer als bisher die histologischen Unterschiede festzustellen und darnach verlässige Daten den Agrikultur-Theoretikern zu verschaffen

[24]) MOLLIARD, Sur le rôle des tubes criblés. Comptes rendues, Tome CXLV, 1907, pag. 1063.

„Action morfogénique de quelques substances organiques sur les végétaux supérieurs. Revue génér. de Bot. 1907. Juni u. Juli.

zur Lösung z. B. des Problems, ob die Rüben, welche schwächere anatomische Verhältnisse zeigen, aus der Zucht ausgeschlossen oder im Gegenteil zur weiteren Selektion ausgewählt werden sollen etc.

Zum Schlusse erlaube ich mir, Herrn Prof. Dr. *B. Němec* für die gütige Unterstützung während der Arbeit meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Haupt-Resultate:

1. Die SENFT'sche Methode (Phenylhydrazin, essigsaures Natron, Glycerin) lässt sich sehr gut bei der mikrochemischen Untersuchung der Lokalisation der Saccharose in der Zuckerrübe anwenden.

2. Mit derselben wurde nachgewiesen, dass es die Siebröhren sind, welche unter den Zellen der Rübenwurzel meistens den grössten Zuckergehalt aufweisen.

3. Dies zeigt sich in einer derartigen Weise, dass es nötig ist anzunehmen, dass sie in der Rübenwurzel hauptsächlich der *Saccharose*-Leitung, eventuell, nach der Bildung der Kallusplatten, der Saccharose-Aufspeicherung dienen.

4. „Die Zuckerscheide" nach dem Begriff WIESNERS dürfte kaum existieren.

5. Die Siebröhren-Merkmale in der Zuckerrübe könnten vielleicht bei der Beurteilung der Beziehungen, welche zwischen der anatomischen Struktur und dem Zuckergehalt der Zuckerrübe obwalten, ins Gewicht fallen.

Prag, Pflanzenphysiologisches Institut der k. k. böhmischen Universität.

Figuren-Erklärung:

1. *Beta vulgaris.* 12·8%, 800 *g*. Tangential-Schnitt. Eine Siebröhre im Parenchym (im Innern des Schnittes verlaufend.) Vergr. ca 65.

2. 18·5, 550 *g*. Parenchymzelle mit Sphärokrystall von Osazon 140.

3. 18·5%, 550 *g*. Parenchymzelle. 500.

4. 18·5%, 550 *g*. Parenchymzelle. 400.

5. 18·5%, 550 *g*. Unverstopfte Siebröhre. 400.

6. 19·2%, 600 *g*. Verzweigte Siebröhre. 400.

7. Junge Rübe (3·2 *cm*). Verstopfte Siebröhre. *k* = Kallose. 400.

8. 18·5%, 550 *g*. Tangential-Schnitt von der Peripherie der Wurzel. *L* = Leptom, *P* = interfascikuläres Parenchym, *p* = Leptom-Parenchym. 50.

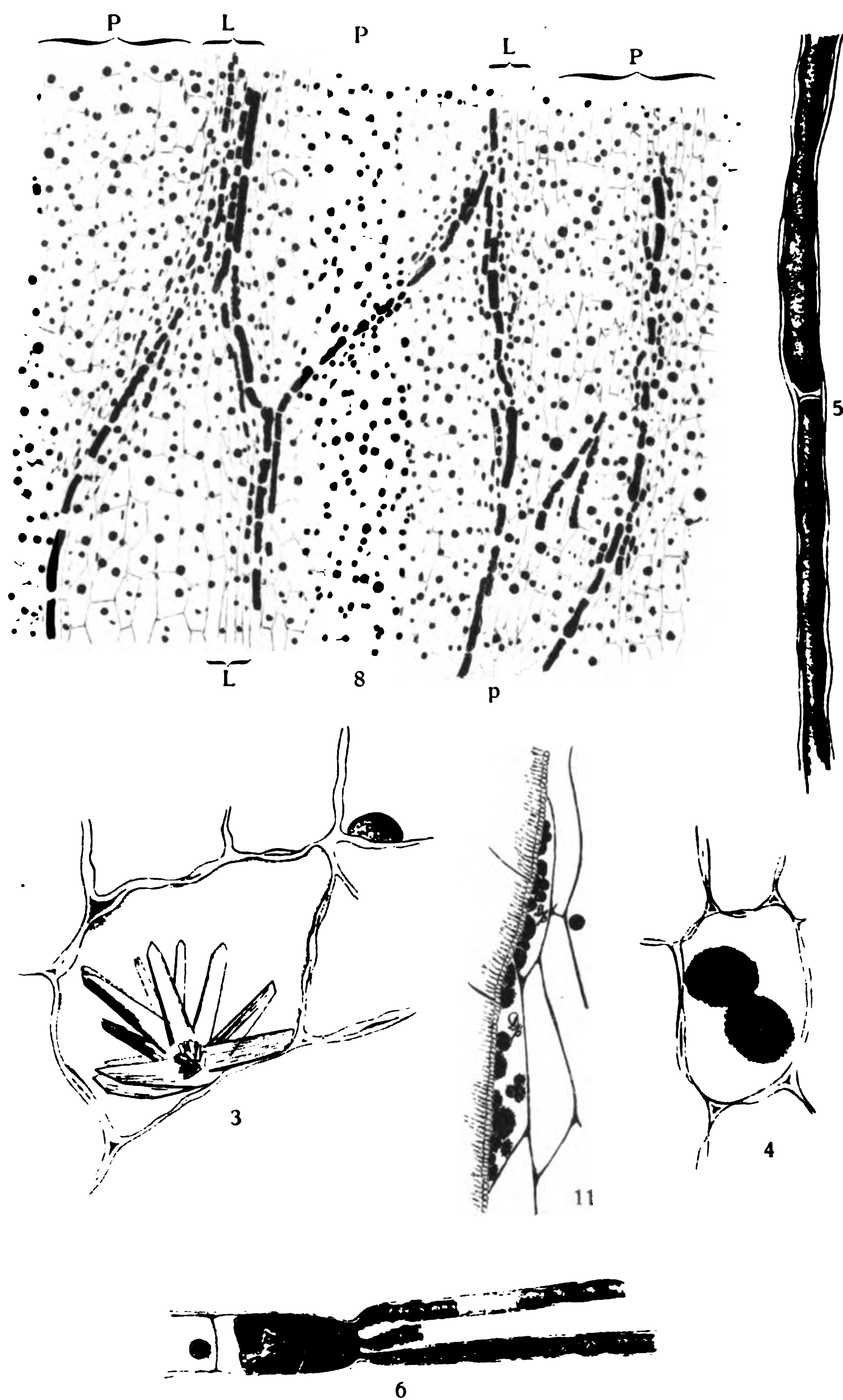
9*a*. 19.2%, 600 *g*. Radial-Schnitt durch das Gefässbündel. *L* = Leptom. *D* = Xylem, *s* = Siebröhren, *p* = Leptom-Parenchym, *P* = interfascikuläres Parenchym. 75.

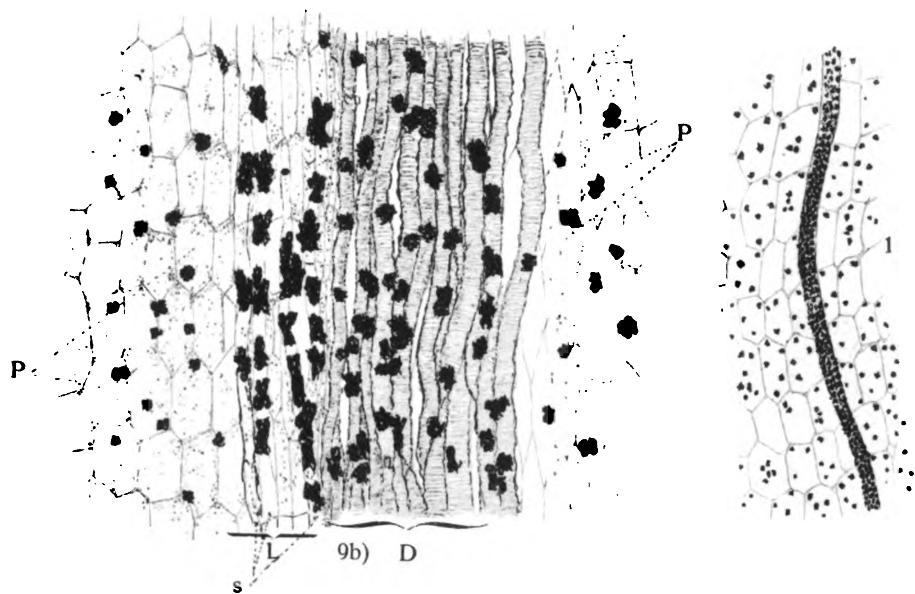
9*b*) 14·4%, 660 *g*. Radial-Schnitt durch das Gefässbündel. Wie bei 9a). 75

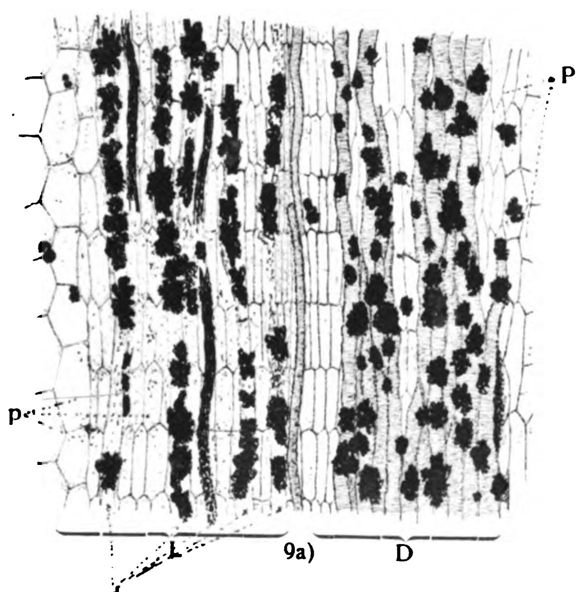
10. 18·5%, 550 *g*. Tangential-Schnitt durch das Holz. *C* = Gefäss, *Dp* = Holzparenchym, *P* = interfascikuläres Parenchym. 85.

11. 14·7%, 900 *g*. Gefäss mit anliegendem Holzparenchym (*Dp*.) 220.

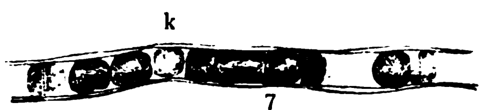
12. *Saccharum officinarum.* Unverstopfte Siebröhre. 390.


P
L
P
L
P
5
L
8
p
3
11
4
6

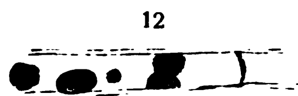

P
P
1
L
9b)
D
s


P
p
L
9a)
D


P
C
D. p
P
D. p
C
10


k
7


2


12

XXIII.

Über Bernoulli'sche und Euler'sche Zalen.

Von **Franz Rogel.**

Vorgelegt in der Sitzung am 22. November 1907.

Eine symbolische Darstellung einer bekannten Relation zwischen BERNOULLI'sche Zalen B, die bereits LUCAS*) mitteilte, wurde von CESÁRO und HERMITE**) zu interessanten Anwendungen benutzt. Diese fruchtbare Symbolik ermöglicht auch, wie es im Nachfolgenden gezeigt wird, eine einfache Herleitung von Beziehungen, in welchen

I. *aufeinanderfolgende* Zalen B, E erscheinen,

II. nur jede *zweite* Zal B, E und

III. nur jede *dritte* Zal B, E

auftritt, deren Zeiger eine vorgegebene untere Grenze haben.

Das Verfahren besteht im Allgemeinen darin, dass teils längst bekannte, teils vom Verfasser in diesen Sitzungsberichten mitgeteilte Beziehungen zwischen den B, bezw. E, siehe „*Trigonometrische Entwicklungen*", 1892, „*Theorie der Euler'schen Functionen*", 1893, „*Ein neues Recursionsgesetz der Bernoulli'schen* Zalen", 1895,***) zunächst *symbolisch* durch eine Gleichung

$$f(x) = c, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

*) Siehe C. R. t. LXXXIII, p. 539.

**) C. R. du troisième Congrès Scientifique international, tenu à Bruxelles, 1894.

***) Die in eckigen Klammern stehenden Zahlen beziehen sich auf diese Abhandlungen.

wo $f(x)$ eine *ganze* rationale Function und c eine von den B und E unabhängige Grösse bezeichnet, dargestellt werden.

Eine ebenfalls ganze, möglichst einfach gebildete Hilfsfunction

$$F[f(x)] \equiv G(x) \equiv x^n \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ wieder eine ganze Function ist, führt dann, wenn die $f(x)$ in F durch ihre bekannten Werte c ersetzt und für die Potenzen von x in $G(x)$ dieselben Substitutionen ausgeführt werden, durch die (α) in die zu Grunde liegende Beziehung übergeht, zu den angekündigten neuen Gleichheiten.

Da sich dieser Vorgang stets wiederholt, so wurde nur der erste Fall ausführlicher behandelt.

I. Beziehungen zwischen aufeinanderfolgenden B_r, E_r $r \geqq n$.

1. *Bernoulli'sche Zalen.*

a) Die bekannte Identität, die man Malmstén verdankt,

$$1 - \binom{m}{1}\frac{B_1}{1} + \binom{m}{3}\frac{B_2}{2} - \binom{m}{5}\frac{B_3}{3} + \cdots$$

$$\left\{\begin{array}{l} + (-1)^{\frac{m}{2}} \binom{m}{m-1} \dfrac{B_{\frac{m}{2}}}{m:2} \\ + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \binom{m}{m-2} \dfrac{B_{\frac{m-1}{2}}}{(m-1):2} \end{array}\right\} = \frac{2}{m+1} \quad . \; . \; . \; (\Upsilon)$$

lässt sich *symbolisch* durch

$$f(x) \equiv \mathfrak{x}_m \equiv (1+x)^m - x^m = \frac{2}{m+1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (\beta)$$

darstellen. Wird nach vollzogener Entwicklung

$$x^{2r-1} = (-1)^r \frac{B_r}{r}, \; x^{2r} = 0, \; r = 1, 2, 3, \quad . \; . \; . \; . \; (\gamma)$$

gesetzt, so geht (β) in (Υ) über. Die nun zu wählende Hilfsfunction F — teilbar durch x^n — wird aus zwei von $(1+x)^n$ und x^n abhängigen Teilen bestehen, und da auch der erste Teil durch x^n teilbar sein muss, so kann als solcher

$$x^n(1+x)^n = (1+x-1)^n(1+x)^n$$

$$= (1+x)^{2n} - \binom{n}{1}(1+x)^{2n-1} + - \ldots + (-1)^n(1+x)^n$$

angenommen werden. Werden hierin die Potenzen mittels (β), d. i. $(1+x)^m$ durch $x^m + \frac{2}{m+1}$ ausgedrückt, so ergiebt sich

$$x^n(1+x)^n = x^n(x-1)^n + 2k,$$

wo

$$k = \frac{1}{2n+1} - \frac{\binom{n}{1}}{2n} + \frac{\binom{n}{2}}{2n-1} - + \ldots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{n+1}$$

$$= (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \text{*)}.$$

Die gesuchte Hilfsfunction ist daher

$$X_1 = x^n[(x+1)^n - (x-1)^n] = 2k$$

$$= 2\left[\binom{n}{1}x^{2n-1} + \binom{n}{3}x^{2n-3} + \ldots\right]$$

und geht durch die Substitutionen (γ) über in

$$\binom{n}{1}\frac{B_n}{n} - \binom{n}{3}\frac{B_{n-1}}{n-1} + \binom{n}{5}\frac{B_{n-2}}{n-2} - + \ldots$$

---

*) S. d. Verfassers „*Zur Theorie der höheren Integrale,*" diese Sitzungs-Ber. 1892, Formel [29], die, wenn $2n+1$ für n und n für m geschrieben wird, obige Summe liefert.

$$\left.\begin{array}{l} +(-1)^{\frac{n-2}{2}}\binom{n}{n-1}\dfrac{B_{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1},\ n \text{ gerade} \\ +(-1)^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{n}\dfrac{B_{\frac{n+1}{2}}}{\frac{n+1}{2}},\ n \text{ ungerade} \end{array}\right\}$$

$$=\frac{(n!)^2}{2n+1)!}, \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

die gesuchte Beziehung zwischen $\frac{n}{2}$, bezw. $\frac{n+1}{2}$ Zalen B, der Zeiger nicht unter $\frac{n}{2}+1$, bezw. $\frac{n+1}{2}$ liegen, ergebend.

Dieselbe entwickelte minder einfach mit Zuhilfenahme eines bestimmten Integrals bereits Hermite.*)

$$b)\ 1+\binom{m}{2}2^2B_1-\binom{m}{4}2^4B_2+-\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} (-1)^{\frac{m+2}{2}}\binom{m}{m}\binom{m+1}{m-2}B_{\frac{m}{2}} \\ (-1)^{\frac{m+1}{2}}\binom{m}{m-1}B_{\frac{m-1}{2}} \end{array}\right\} = m \ \ldots \quad (\gamma)$$

(Malmstén)

symbolisch:

$$(1+2x)^m+(2^m-2)\,x^m=m,$$

$$x^{2r}=(-1)^{r+1}B_r,\ x^{2r+1}=0,\ r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \quad (\delta)$$

Hilfsfunction:

$$X_2=(2x)^n\left[(2x+1)^n+(2x-1)^n\right]-2x^n(x-1)^n$$

$$=(2x+1)^{2n}-\binom{n}{1}(2x+1)^{2n-1}+-\ldots+(-1)^n(2x+1)^n$$

*) S. Fussnote 2) p. 1.

$$+(2^{2n}-2)\,x^{2n}-\binom{n}{1}(2^{2n-1}-2)x^{2n-1}+-\ldots+(-1)^n(2^n-2)x^n$$

$$=2n-\binom{n}{1}(2n-1)+-\ldots+(-1)^n n$$

$$=Dz^n(z-1)^n\}_{z=1}=\begin{cases}0, & n>1\\ 1, & n\geqq 1\end{cases}$$

$$\frac{1}{2}X_2=(2^{2n}-1)\,x^{2n}+\ldots+\binom{n}{2}(2^{2n-2}-1)\,x^{2n-2}+\ldots,$$

woraus, nach Ersetzung der Potenzen durch die B mittels (δ)

$$(2^{2n}-1)\,B_n-\binom{n}{2}(2^{2n-2}-1)\,B_{n-1}+\binom{n}{4}(2^{2n-4}-1)\,B_{n-2}-+\ldots$$

$$\ldots\begin{Bmatrix}+(-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{n}(2^n-1)\,B_{\frac{n}{2}},\ n\ \textit{gerade}\\ +(-1)^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{n-1}(2^{n-1}-1)\,B_{\frac{n-1}{2}},\ n\ \textit{ungerade}\end{Bmatrix}$$

$$=0,\ n>1\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

2. *Secanten-Coefficienten* E_{2r}.

$$\binom{2m}{0}E_0-\binom{2m}{2}E_2+\binom{2m}{4}E_4-+\ldots$$

$$+(-1)^m\binom{2m}{2m}E_{2m}=0,\ \ldots\ldots\ldots\ (\varkappa)$$

symbolisch:

$$(1+y)^{2m}=0,\ m>0,$$

$$y^{2r}=(-1)^rE_{2r},\ y^{2r+1}=0,\ r=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Hilfsfunction:

$$Y_1=[(1+y)^2-1]^n=y^n(y+2)^n$$

$$=(1+y)^{2n}-\binom{n}{1}(1+y)^{2n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(1+y)^2$$

$$+(-1)^n=(-1)^n,$$

$$Y_1=y^{2n}+\binom{n}{1}2y^{2n-1}+\ldots+\binom{n}{n}2^ny^n,$$

folglich

$$E_{2n} - \binom{n}{2} 2^2 E_{2n-2} + \binom{n}{4} 2^4 E_{2n-4} - + \cdots$$

$$\left.\begin{matrix} + (-1)^{\frac{n}{2}} 2^n E_n \\ + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{n-1} 2^{n-1} E_{n-1} \end{matrix}\right\} = +1 \left.\begin{matrix} n \text{ gerade} \\ \\ n \text{ ungerade} \end{matrix}\right\} \ldots (3)$$

3. *Tangenten-Coefficienten* E_{2r+1}.

$$\binom{2m+1}{1} E_1 - \binom{2m+1}{3} E_3 + \binom{2m+1}{5} E_5 - + \cdots$$

$$+ (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1} E_{2m+1} = 1, \quad \ldots \ldots \ldots (♋)$$

symbolisch

$$(1+z)^{2m+1} = 1, \quad z^{2r+1} = (-1)^r E_{2r+1}, \quad z^{2r} = 0,$$

Hilfsfunction:

$$Z = (1+z)\left[(1+z)^2 - 1\right]^n$$

$$= (1+z)^{2n+1} - \binom{n}{1}(1+z)^{2n-1} + - \cdots + (-1)^n (1+z)$$

$$= (1-1)^n = 0,$$

$$Z = z^n (z+1)(z+2)^n =$$

$$= z^{2n+1} + \cdots + \binom{n}{1} 2 \frac{2n}{2} z^{2n-1} + \cdots + \binom{n}{3} 2^3 \frac{2n-2}{4} z^{2n-3} \ldots,$$

somit

$$E_{2n+1} - \binom{n}{1} 2n E_{2n-1} + \binom{n}{3} 2^3 \frac{n-1}{2} E_{2n-3}$$

$$- \binom{n}{5} . 2^5 \frac{n-2}{3} E_{2n-5} + - \cdots$$

$$\left.\begin{array}{l} +(-1)^{\frac{n}{2}}2^{n-1}\binom{n}{n-1}\frac{n+3}{n-1}E_{n+1} \\ +(-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{n-2}\binom{n}{n-2}\frac{n+4}{n-2}E_{n+2}+(-1)^{\frac{n+1}{2}}2^nE_n \end{array}\right\}$$

n *gerade*

$$=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

n *ungerade.*

II. Beziehungen, die nur jedes zweite B, bezw. E enthalten.

Ausgangspunkte sind die etwas umgestalteten Gleichungen [35] bis [40][1]) der „*Trigon.-Entwicklungen.*"

1. *Bernoulli'sche Zalen.*

a) $m \equiv 2 \bmod 4$; Gleichung [37][1]) durch 2 dividiert:

$$\binom{m}{4}2^2B_2-\binom{m}{8}2^4B_4+\binom{m}{12}2^6B_6-+\ldots$$

$$+(-1)^{\frac{m+2}{4}}\binom{m}{m-2}2^{\frac{m-2}{2}}B_{\frac{m-2}{2}}=\frac{m}{2}-1, \ldots (\Omega)$$

symbolisch:

$(1+x)^m=\frac{m}{2}-1$, $x^{4r}=(-1)^{r+1}B_{2r}$, $r=1, 2, 3, \ldots$, x^0 und alle anderen Potenzen $=0$.

Hilfsfunction:

$$X_1=(1+x)^2[(1+x)^4-1]^n, \; n>1,$$

$$X_1=(1+x)^{4n+2}-\binom{n}{1}(1+x)^{4n-2}+-\ldots$$

$$=-\binom{n}{1}(2n-2)+\binom{n}{2}(2n-4)-+\ldots-1+\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+-\ldots$$

$$=D_v(v^2-1)^n\}_{v=1}-(1-1)^n=0,$$

---

[1]) Die Formeln [37] und [40] fand auf anderem Wege J. C. Kapteyn und W. Kapteyn, s.: „*Die höheren Sinus*", Sitzgs.-Ber. d. Kais. Akad. d. Wiss. in Wien, 1886, p. 807 ff., Formeln (77), (78).

$$X_1 = \ldots + A_{4n} x^{4n} + \ldots + A_{4n-4} x^{4n-4} + \ldots + A_q x^q, \; q \geqq n,$$

$$A_{4\nu} = \frac{1}{(4\nu)!} D_x^{4\nu} X_1 \}_0 = \binom{4n+2}{4\nu} - \binom{n}{1}\binom{4n-2}{4\nu}$$

$$+ \binom{n}{2}\binom{4n-6}{4\nu} - + \ldots,$$

folglich

$$\binom{4n+2}{2} 2^{2n} B_{2n} - \left[\binom{4n+2}{6} - \binom{n}{1}\binom{4n+2}{2}\right] 2^{2n-2} B_{2n-2}$$

$$+ \left[\binom{4n+2}{10} - \binom{n}{1}\binom{4n-2}{6} + \binom{n}{2}\binom{4n-6}{2}\right] 2^{2n-4} B_{2n-4} - + \ldots$$

$$= 0, \; n > 1 \; \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Kleinster Zeiger der B ist die kleinste *gerade* Zal $\geqq \frac{n}{2}$.

b) $m \equiv 0 \bmod 4$, Gleichung [38] durch 2 dividiert:

$$\binom{m}{2} 2^1 B_1 - \binom{m}{6} 2^3 B_3 + \binom{m}{10} 2^5 B_5 - + \ldots$$

$$+ (-1)^{\frac{m-4}{4}} \binom{m}{m-2} B_{\frac{m-2}{2}} = \frac{m}{2}, \ldots\ldots\ldots (\mathfrak{np})$$

symbolisch:

$$(1 + x)^m = \frac{m}{2}, \; x^{4r+2} = (-1)^r 2^{2r+1} B_{2r+1}, \; r = 0, 1, 2, \ldots$$

alle anderen Potenzen $= 0$.

Hilfsfunction:

$$X_2 = [(1+x)^4 - 1]^n$$

$$= (1+x)^{4n} - \binom{n}{1}(1+x)^{4n-4} + - \ldots + (-1)^n$$

$$= 2n - \binom{n}{1}(2n-2) + - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} 2$$

$$= 2 D_v (v-1)^n \}_{v=0} + (-1)^n = (-1)^n;$$

$$X_2 = \ldots + A_{4n-2} x^{4n-2} \ldots + A_{4n-6} x^{4n-6} \ldots + A_q x^q, \; q \geqq n,$$

$$A_{4\nu-2} = \frac{1}{(4\nu-2)!} D_x^{4\nu-2} X_2 \}_0 =$$

$$= \binom{4n}{4\nu-2} - \binom{n}{1}\binom{4n-4}{4\nu-2} + \binom{n}{2}\binom{4n-8}{4\nu-2} - + \ldots,$$

daher

$$\binom{4n}{2} 2^{2n-1} B_{2n-1} - \left[\binom{4n}{6} - \binom{n}{1}\binom{4n-4}{2}\right] 2^{2n-3} B_{2n-3}$$

$$+ \left[\binom{4n}{10} - \binom{n}{1}\binom{4n-4}{6} + \binom{n}{2}\binom{4n-8}{2}\right] 2^{2n-5} B_{2n-5} - + \ldots$$

$$= +1, \; n > 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Kleinster Zeiger der B ist die kleinste *ungerade* Zal $\geqq \frac{n}{2}$.

c) $m \equiv 3 \bmod 4$, Gleichung [35a) durch $(-1)^{\frac{m-3}{4}} 2^{\frac{m}{2}}$ dividiert:

$$\binom{m}{1} \frac{2^1-1}{1 \cdot 2^0} B_1 - \binom{m}{5} \frac{2^3-1}{3 \cdot 2^2} B_3 + \binom{m}{9} \frac{2^9-1}{5 \cdot 2^4} B_5 - + \ldots$$

$$+ (-1)^{\frac{m-3}{4}} \frac{2^{m-2}-1}{\frac{m-1}{2} \cdot 2^{\frac{m-3}{2}}} \binom{m}{m-2} B_{\frac{m-1}{2}} = (-1)^{\frac{m-3}{4}} 2^{-\frac{m-1}{2}}, \ldots \text{[illegible]}$$

symbolisch:

$$(1+x)^m = (-1)^{\frac{m-3}{4}} 2^{\frac{m-1}{2}},$$

$x^{4r+1} = (-1)^r \dfrac{2^{4r+1}-1}{(2r+1)^{2r}} B_{2r+1}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, alle anderen Po-

Potenzen $= 0$.

Hilfsfunction:

$$X_3 = (1+x)^3[(1+x)^4 - 1]^n = x^n(1+x)^3(x^3 + 4x^2 + 6x + 4)^n$$

$$= (1+x)^{4n+3} - \binom{n}{1}(1+x)^{4n-1} + - \ldots + (-1)^n(1+x)^3$$

$$= (-1)^n \frac{1}{2}\left[2^{-2n} + \binom{n}{1} 2^{-2n+2} + \ldots + \binom{n}{n}\right] = (-1)^n \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^n;$$

$$X_3 = \ldots + C_{4n+1}x^{4n+1} + \ldots + C_{4n-3}x^{4n-3} + \ldots + C_q x^q, \; q \geqq n,$$

$$C_{4\nu+1} = \frac{1}{(4\nu+1)!} D_x^{4\nu+1} X_3 \}_0 =$$

$$= \binom{4n+3}{4\nu+1} - \binom{n}{1}\binom{4n-1}{4\nu+1} + \binom{n}{2}\binom{4n-5}{4\nu+1} - + \ldots,$$

demnach

$$\binom{4n+3}{2} \frac{2^{4n+1}-1}{(2n+1)2^{2n}} B_{2n+1}$$

$$-\left[\binom{4n+3}{6} - \binom{n}{1}\binom{4n-1}{2}\right] \frac{2^{4n-3}-1}{(2n-1)2^{2n-2}} B_{2n-1}$$

$$+\left[\binom{4n+3}{10} - \binom{n}{1}\binom{4n-1}{6}\right.$$

$$\left.+\binom{n}{2}\binom{4n-5}{2}\right] \frac{2^{4n-7}-1}{(2n-5)2^{2n-4}} B_{2n-3} - + \ldots = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^n \ldots (7)$$

Kleinster Zeiger der B ist die kleinste *ungerade* Zal $\geqq \frac{n+1}{2}$.

d) $m \equiv 1 \bmod 4$, Gleichung [35b],*) durch $(-1)^{\frac{m+3}{4}} 2^{\frac{m-3}{2}}$ dividiert:

$$\binom{m}{3} \frac{2^3-1}{1} \frac{B_2}{2^2} - \binom{m}{7} \frac{2^7-1}{2} \frac{B_4}{2^4} + \binom{m}{11} \frac{2^{11}-1}{3} \frac{B^6}{2^6} - + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m+3}{4}} \frac{2^{m-2}-1}{(m-1):4} \binom{m}{m-2} \frac{B_{\frac{m-1}{2}}}{2^{\frac{m-1}{2}}}$$

$$= 2\left(\frac{1}{m+1} + \frac{(-1)^{\frac{m+3}{4}}}{2^{\frac{m+1}{2}}}\right), \ldots \ldots . (\mathfrak{m})$$

symbolisch:

$$(1+x)^m = \frac{2}{m+1} + \frac{(-1)^{\frac{m+3}{4}}}{2^{\frac{m+1}{2}}},$$

---

*) In [35b] muss auf der rechten Seite stehen: $\frac{1}{2} - \frac{(-)^{\frac{n-1}{4}} 2^{\frac{n-1}{2}}}{n+1}$.

$x^{4r+3} = (-1)^r \frac{2^{4r+3}-1}{r+1} \frac{B_{2r+2}}{2^{2r+2}}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, alle anderen Potenzen $= 0$.

Hilfsfunction:

$$X_4 = (1+x)[(1+x)^4 - 1]^n = x^n(1+x)[x^3 + 4x^2 + 6x + 4]^n$$

$$= (1+x)^{4n+1} - \binom{n}{1}(1+x)^{4n-3} + - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}(1+x)$$

$$= (-1)^{n+1}\left(\frac{5}{4}\right)^n + k_n,$$

worin

$$k_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{\binom{n}{1}}{2n-1} + \frac{\binom{n}{2}}{2n-3} - + \ldots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{1}$$

$$= \int_0^1 (s^2-1)^n ds = (-1)^n \frac{2^n n!}{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)};$$

$$X_4 = \ldots + C_{4n-1}x^{4n-1} + \ldots + C_{4n-5}x^{4n-5} + \ldots + C_q x^q, \; q \geqq n,$$

$$C_{4\nu-1} = \frac{1}{(4\nu-1)!} D_x^{4\nu-1} X_4 \}_0 = \binom{4n+1}{4\nu-1} - \binom{n}{1}\binom{4n-3}{4\nu-1}$$

$$+ \binom{n}{2}\binom{4n-7}{4\nu-1} - + \ldots,$$

daher

$$\binom{4n+1}{2} \frac{2^{4n}-1}{n} \frac{B_{2n}}{2^{2n}}$$

$$-\left[\binom{4n+1}{6} - \binom{n}{1}\binom{4n-3}{2}\right] \frac{2^{4n-5}-1}{n-1} \frac{B_{2n-2}}{2^{2n-2}} + \left[\binom{4n+1}{10}\right.$$

$$\left. - \binom{n}{1}\binom{4n-3}{6} + \binom{n}{2}\binom{4n-7}{2}\right] \frac{2^{4n-9}-1}{n-2} \frac{B_{2n-4}}{2^{2n-4}} - + \ldots =$$

$$= \left(\frac{5}{4}\right)^n - \frac{2^n n!}{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)} \quad \ldots \quad (8)$$

Kleinster Zeiger der B ist die kleinste *gerade* Zal $> \frac{n+1}{2}$.

2. *Secanten-Coefficienten.*

a) $m \equiv 0 \bmod 4$. Gleichung [36] durch $(-4)^{\frac{m}{4}}$ dividiert:

$$\binom{m}{0} E_0 - \binom{m}{4} 2^{-2} E_4 + \binom{m}{8} 2^{-4} E_8 - + \ldots + (-1)^{\frac{m}{4}} 2^{\frac{m}{2}} E_2$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^{\frac{m}{4}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

symbolisch:

$(1+y)^m = \left(-\frac{1}{4}\right)^{\frac{m}{4}}$, $y^{4r} = (-1)^r 2^{-2r} E_{4r}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, alle anderen Potenzen $= 0$.

Hilfsfunction:

$$Y_1 = [(1+y)^4 - 1]^n = y^n (y^3 + 4y^2 + 6y + 4)^n$$
$$= (1+y)^{4n} - \binom{n}{1}(1+y)^{4n-4} + - \ldots$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^n - \binom{n}{1}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \ldots + (-1)^n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n;$$
$$Y_1 = F_{4n} y^{4n} + \ldots + F_{4n-4} y^{4n-4} + \ldots + F_q y^q, \quad q \geqq n,$$
$$F_{4\nu} = \frac{1}{(4\nu)!} D_y^{4\nu} Y_1 \}_0 = \binom{4n}{4\nu} - \binom{n}{1}\binom{4n-4}{4\nu}$$
$$+ \binom{n}{2}\binom{4n-8}{4\nu} - + \ldots,$$

mithin;

$$\frac{E_{4n}}{2^{2n}} - \left[\binom{4n}{4} - \binom{n}{1}\right] \frac{E_{4n-5}}{2^{2n-2}}$$
$$+ \left[\binom{4n}{8} - \binom{n}{1}\binom{4n-4}{4} + \binom{n}{2}\right] \frac{E_{4n-8}}{2^{2n-4}} - + \ldots = \left(\frac{5}{4}\right)^n \ldots \ (9)$$

Kleinster Zeiger der E ist die kleinste durch 4 teilbare Zal $\geqq n$.

b) $m \equiv 2 \bmod 4$, Gleichung [36] durch $(-1)^{\frac{m-2}{2}} 2^{\frac{m}{2}}$ dividiert:

$$\binom{m}{2} 2^{-1} E_2 - \binom{m}{6} 2^{-3} E_6 + \binom{m}{10} 2^{-5} E_{10} - + \ldots$$

$$+(-1)^{\frac{m-2}{4}}\binom{m}{m}2^{-\frac{m}{2}}E_m=(-1)^{\frac{m-2}{4}}2^{-\frac{m}{2}}, \quad \ldots\ldots (9)$$

symbolisch:

$(1+y)^m=(-1)^{\frac{m-2}{2}}2^{-\frac{m}{2}}$, $y^{4r+2}=(-1)^r 2^{-2r-1}E_{4r+2}$, $r=0,1,2,\ldots$,

alle anderen Potenzen — 0.

Hilfsfunction:

$$Y_2=(1+y)^2[(1+y)^4-1]^n=y^n(1+y)^2(y^3+4y^2+6y+4)=$$

$$=(1+y)^{4n+2}-\binom{n}{1}(1+y)^{4n-2}+-\ldots$$

$$=(-1)^n\frac{1}{2}\left(4^{-n}+\binom{n}{1}4^{-n+1}+\binom{n}{2}4^{-n+2}+\ldots\right)$$

$$=(-1)^n\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^n.$$

$$Y_2=G_{4n+2}y^{4n+2}+\ldots+G_{4n-2}y^{4n-2}+\ldots+G_q y^q,\ q\geqq n,$$

$$G_{4\nu+2}=\frac{1}{(4\nu+2)!}D_y^{4\nu+2}Y_2\}_0=\binom{4n+2}{4\nu+2}-\binom{n}{1}\binom{4n-2}{4\nu+2}$$

$$+\binom{n}{2}\binom{4n-6}{4\nu+2}-+\ldots,$$

folglich

$$\frac{E_{4n+2}}{2^{2n+1}}-\left[\binom{4n+2}{4}-\binom{n}{1}\right]\frac{E_{4n-2}}{2^{2n-1}}+\left[\binom{4n+2}{8}-\binom{n}{1}\binom{4n-2}{4}\right.$$

$$\left.+\binom{n}{2}\right]\frac{E_{4n-6}}{2^{2n-3}}-+\ldots=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^n. \quad \ldots\ldots (10)$$

Kleinster Zeiger der E ist die kleinste Zal $\equiv 2 \bmod 4$, die $\geqq n$ ist.

3. *Tangenten-Coefficienten.*

a) $m\equiv 1 \bmod 4$, Gleichung [39] durch n dividiert, $n-1=m$ gesetzt und die B durch die E_{2r-1} ersetzt:

$$\binom{m}{1} E_1 - \binom{m}{5} 2^{-2} E_5 + \binom{m}{9} 2^{-4} E_9 - + \cdots$$

$$+ (-1)^{\frac{m-1}{4}} \binom{m}{m} E_m = 1, \quad \ldots \ldots \ldots (\approx)$$

symbolisch:

$(1+z)^m = 1$, $z^{4r+1} = (-1)^r 2^{-2r} E_{4r+1}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, alle anderen Potenzen $= 0$.

Hilfsfunction:

$$Z_1 = (1+z)[(1+z)^4 - 1]^n = z^n (1+z)(z^3 + 4z^2 + 6z + 4)^n$$

$$= (1+z)^{4n+1} - \binom{n}{1}(1+z)^{4n-3} + - \cdots + (-1)^n (1+z)$$

$$= (1-1)^n = 0;$$

$$Z_1 = H_{4n+1} z^{4n+1} \cdots + H_{4n-3} z^{4n-3} + \cdots + H_q z^q, \; q \geqq n,$$

$$H_{4\nu+1} = \frac{1}{(4\nu+1)!} D_z^{4\nu+1} Z_1\Big|_0 = \binom{4n+1}{4\nu+1} - \binom{n}{1}\binom{4n-3}{4\nu+1}$$

$$+ \binom{n}{2}\binom{4n-7}{4\nu+1} - + \cdots,$$

demnach

$$\frac{E_{4n+1}}{2^{2n}} - \left[\binom{2n+1}{4} - \binom{n}{1}\right] \frac{E_{4n-3}}{2^{2n-2}} + \left[\binom{4n+1}{8} - \binom{n}{1}\binom{4n-3}{4}\right.$$

$$\left. + \binom{n}{2}\right] \frac{E_{4n-7}}{2^{2n-4}} - + \cdots = 0. \quad \ldots \ldots \ldots (11)$$

Kleinster Zeiger der E ist die kleinste Zal $\equiv 1 \bmod 4$, die $\geqq n$ ist.

b) $m \equiv 3 \bmod 4$, Gleichung [40] durch n dividiert, $n - 1 = m$ gesetzt und die B durch die E_{2r+1} ersetzt.

$$\binom{m}{3} 2^{-1} E_3 - \binom{m}{7} 2^{-3} E_7 + \binom{m}{11} 2^{-5} E_{11} - + \cdots$$

$$+ (-1)^{\frac{m}{4}} \binom{m}{m} 2^{\frac{m-1}{2}} E_m = 1, \quad \ldots \ldots \ldots (\text{)(})$$

symbolisch:

$(1+z)^m = 1$, $z^{4r+3} = (-1)^r 2^{-2r-1} E_{2r+1}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, alle anderen Potenzen $= 0$.

Hilfsfunction:

$$Z_2 = (1+z)^3[(1+z)^4 - 1]^n = z^n(1+z)^3(z^3+4z^2+6z+4)^n$$

$$= (1+z)^{4n+3} - \binom{n}{1}(1+z)^{4n-1} + - \dots + (-1)^n(1+z)^3$$

$$= 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - + \dots = 0;$$

$$Z_2 = J_{4n+3}z^{4n+3} + \dots + J_{4n-1}z^{4n-1} + \dots + J_q z^q,\ q \geqq n,$$

$$J_{4\nu+3} = \frac{1}{(4\nu+3)!} D_z^{4\nu+3} Z_2\Big|_0 = \binom{4n+3}{4\nu+3} - \binom{n}{1}\binom{4n-1}{4\nu+3}$$

$$+ \binom{n}{1}\binom{4n-5}{4\nu+3} - + \dots,$$

somit

$$\frac{E_{4n+3}}{2^{2n+1}} - \left[\binom{4n+3}{4} - \binom{n}{1}\right]\frac{E_{4n-1}}{2^{2n-1}}$$

$$+ \left[\binom{4n+3}{8} - \binom{n}{1}\binom{4n+3}{4} + \binom{n}{2}\right]\frac{E_{4n-5}}{2^{2n-3}} - + \dots = 0. \quad (12)$$

Kleinster Zeiger der E ist die kleinste Zal $\equiv 3$ mod, die $\geqq n$ ist.

C. **Beziehungen, die nur jedes dritte B oder E enthalten.**

1. *Bernoulli'sche Zalen.*

Zu Grunde gelegt sind hier die Formeln [7],[1]) [8], [9] in „*Ein neues Recursionsgesetz der Bernoulli'schen Zalen*", *1895.*

a) Formel [7][1])

$$\binom{6p+3}{6}B_3 - \binom{6p+3}{12}B_6 + \binom{6p+3}{18}B_9 - + \dots$$

$$+ (-1)^{p+1}\binom{6p+3}{6p}B_{3p} = 2p, \quad \dots\dots (\odot)$$

symbolisch:

$(1+u)^{6p+3} = 2p$, $u^{6r} = (-1)^{r+1}B_{3r}$, $r = 0, 1, 2, \dots$, alle anderen Potenzen $= 0$.

---

[1]) Auf anderem Wege von J. C. & W. Kapteyn gefunden; s. Fussnote auf pag. 4.

Hilfsfunction:

$$U_1 = (1+u)^3[(1+u)^6 - 1]^n = u^n(1+u)^3(u^5 + 6u^4 + 15u^3 + 20u^2$$

$$+ 15u + 6)^n = (1+u)^{6n+3} - \binom{n}{1}(1+u)^{6n-3} + - \ldots$$

$$+ (-1)^n(1+u)^3 = 2n - \binom{n}{1}(2n-2) + \binom{n}{2}(2n-4) - + \ldots$$

$$+ (-1)^{n+1}\binom{n}{n-1}2 = 2D(z-1)^n\Big\}_{z=1} = 0,\ n > 1,$$

(für $n = 1$ ist $U_1 = 2$);

$$U_1 = \ldots + K_{6n}u^{6n} + \ldots + K_{6n-6}u^{6n-6} + \ldots + K_q u^q,\ q \geqq n,$$

$$K_{6\nu} = \frac{1}{(6\nu)!} D_u^{6\nu} U_1\Big\}_0 = \binom{6n+3}{6\nu} - \binom{n}{1}\binom{6n-3}{6\nu}$$

$$+ \binom{n}{2}\binom{6n-9}{6\nu} - + \ldots,$$

folglich

$$\binom{6n+3}{3}B_{3n} - \left[\binom{6n+3}{9} - \binom{n}{1}\binom{6n-3}{3}\right]B_{3n-3} + \left[\binom{6n+3}{15}\right.$$

$$\left. - \binom{n}{1}\binom{6n-3}{9} + \binom{n}{2}\binom{6n-9}{3}\right]B_{3n-6} - + \ldots = 0.\quad .\ .\ .\ (13)$$

Kleinster Zeiger der B ist die kleinste durch 3 teilbare Zal $\geqq n$.

b) Formel [8]:

$$\binom{6p+5}{2}B_1 - \binom{6p+5}{8}B_4 + \binom{6p+5}{14}B_7 - + \ldots$$

$$+ (-1)^p\binom{6p+5}{6p+2}B_{3p+1} = 2p + \frac{5}{3},\quad .\ .\ .\ .\ (\mathfrak{C})$$

symbolisch:

$(1+u)^{6p+5} = 2p + \frac{5}{3}$, $u^{6r+2} = (-1)^r B_{3r+1}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, alle anderen Potenzen $= 0$.

Hilfsfunction:

$$U_2 = (1+u)^5[(1+u)^6 - 1]^n = u^n(1+u)^5(u^5 + 6u^4 + 15u^3 + 20u^2$$

$$+ 15u + 6)^n = (1+u)^{6n+5} \binom{n}{1}(1+u)^{6n-1} + - \ldots + (-1)^n(1+u)^5$$

$$= 2n + \frac{5}{3} - \binom{n}{1}\left(2p - 2 + \frac{5}{3} + - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} \frac{5}{3}\right.$$

$$= 2D(s-1)^n\Big\}_{s=1} + (1-1)^n \frac{5}{3} = \begin{cases} 0, & n > 1 \\ +2, & n = 1. \end{cases}$$

$$U_2 = \ldots + L_{6n+2}u^{6n+2} + \ldots + L_{6n-4}u^{6n-4} + \ldots + L_q u^q, \; q \geqq n$$

$$L_{6\nu+2} = \frac{1}{(6\nu+2)!} D_u^{6\nu+2} U_2\Big\}_0 =$$

$$= \binom{6n+5}{6\nu+2} - \binom{n}{1}\binom{6n-1}{6\nu+2} + \binom{n}{2}\binom{6n-7}{6\nu+2} - + \ldots,$$

daher

$$\binom{6n+5}{3} B_{3n+1} - \left[\binom{6n+5}{9} - \binom{n}{1}\binom{6n-1}{3}\right] B_{3n-2}$$

$$+ \left[\binom{6n+5}{15} - \binom{n}{1}\binom{6n-1}{9} + \binom{n}{2}\binom{6n-7}{3}\right] B_{3n-5} - + \ldots$$

$$= 0, \; n > 1, \; \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

Kleinster Zeiger der B ist die kleinste Zal $\equiv 1 \bmod 4$, die $\geqq n$ ist.

c) Formel [9]:

$$\binom{6p+1}{4} B_2 - \binom{6p+1}{10} B_5 + \binom{6p+1}{16} B_8 - + \ldots$$

$$+ (-1)^p \binom{6p+1}{6p-2} B_{3p-1} = p + \frac{1}{6}, \ldots \ldots (\hat{9})$$

symbolisch:

$$(1+u)^{6p+1} = p + \frac{1}{6}, \; p > 0, \; (1+u)^1 = 0$$

$u^{6r+4} = (-1)^r B_{3r+2}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, alle anderen Potenzen $= 0$.

Hilfsfunction:

$$U_3 = (1+u)[(1+u)^6 - 1]^n = u^n(1+u)(u^5 + 6u^4 + 15u^3 + 20u^2$$
$$+ 15u + 6)^n = (1+u)^{6n+1} - \binom{n}{1}(1+u)^{6n-5} + - \ldots$$
$$+ (-1)^n\binom{n}{n}(1+u) = n + \frac{1}{6} - \binom{n}{1}\left(n - 1 + \frac{1}{6}\right) + - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\left(1 + \frac{1}{6}\right)$$
$$= D(s-1)^n\Big\}_{s=1} + \frac{1}{6}(1-1)^n - (-1)^n\frac{1}{6} = \frac{(-1)^{n+1}}{6},$$

$$U_3 = \ldots + M_{6n-2}u^{6n-2} + \ldots + M_{6n-8}u^{6n-8} + \ldots + M_q u^q, \quad q \geqq n,$$

$$M_{6\nu-2} = \frac{1}{(6\nu-2)!} D_u^{6\nu-2}U_3\Big\}_0 =$$
$$= \binom{6n+1}{6\nu-2} - \binom{n}{1}\binom{6n-5}{6\nu-2} + \binom{n}{2}\binom{6n-11}{6\nu-2} - + \ldots, \quad n > 1,$$

demnach

$$\binom{6n+1}{3}B_{3n-1} - \left[\binom{6n+1}{9} - \binom{n}{1}\binom{6n-5}{3}\right]B_{3n-4}$$
$$+ \left[\binom{6n+1}{15} - \binom{n}{1}\binom{6n+1}{9} + \binom{n}{2}\binom{6n+1}{3}\right]B_{3n-7} - + \ldots$$
$$= \frac{1}{6}, \quad n > 1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Bei $n = 1$ kommt auf der rechten Seite $\frac{7}{6}$ zu stehen.

Kleinster Zeiger der B ist die kleinste Zal $\equiv 2 \bmod 3$, die $\geqq n$ ist.

2. *Secanten-Coefficienten.*

Zu Grunde gelegt sind die Formeln [93], [94], [95] in „*Theorie der Euler'schen Functionen*", p. 42, 43; sämmtliche E wurden auf die linke Seite geschafft und Alles durch eine Potenz von 2 dividiert.

a) Formel [93], durch $2 2^{6p}$ dividiert:

$$\binom{6p}{0} E_0 - \binom{6p}{6} 2^{-6} E_6 + \binom{6p}{12} 2^{-12} E_{12} - + \cdots$$

$$+ (-1)^p \binom{6p}{6p} 2^{-6p} \cdot \frac{4}{3} E_{6p} = \frac{2}{3} \frac{1 + (-1)^p 3^{3p}}{2^{6p}}, \quad \ldots (☿)$$

symbolisch:

$$(1 + v)^{6p} + \frac{1}{3} v^{6p} = \frac{2}{3} \frac{1 + (-1)^p 3^{3p}}{2^{6p}} \equiv \mathfrak{v}_{6p},$$

$v^{6r} = (-1)^r 2^{-6r} E_{6r}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, alle anderen Potenzen $= 0$.

Hilfsfunction:

$$V_1 = (1 + v)^{6n} [(1 + v)^6 - 1]^n + \frac{1}{3} (v^6 - 1)^n v^{6n}$$

$$= v^n [(1 + v)^{6n} (v^5 + 6v^4 + 15v^3 + 20v^2 + 15v + 6) + \frac{1}{3} (v^6 - 1)^n v^{6n}]$$

$$= (1 + v)^{12n} - \binom{n}{1} (1 + v)^{12n-6} + - \ldots + (-1)^n (1 + v)^{6n}$$

$$+ \frac{1}{3} v^{12n} - \frac{1}{3} \binom{n}{1} v^{12n-6} + - \ldots + (-1)^n v^{6n}$$

$$= \mathfrak{v}_{12n} - \binom{n}{1} \mathfrak{v}_{12n-6} + - \ldots + (-1)^n \mathfrak{v}_{6n}$$

$$+ \frac{2}{3} \frac{(9^3 + 12^3)^n + (-1)^n (2^6 - 1)^n}{2^{12n}};$$

$$V_1 = N_{12n} v^{12n} + \ldots + N_{12n-6} v^{12n-6} + \ldots + N_q v^q, \quad q \geqq n,$$

$$N_{12n-6\nu} = \binom{12n}{6\nu} - \binom{n}{1} \binom{12n-6}{6\nu-6} + \binom{n}{2} \binom{12n-12}{6\nu-12} - + \ldots$$

$$+ (-1)^{\nu-1} \binom{n}{\nu-1} \binom{12n-6\nu+6}{6} + (-1)^\nu \frac{4}{3} \binom{n}{\nu},$$

folglich

$$\frac{4}{3} \frac{E_{12n}}{2^{12n}} - \left[\binom{12n}{6} - \frac{4}{3} \binom{n}{1}\right] \frac{E_{12n-6}}{2^{12n-6}}$$

$$+ \left[\binom{12n}{12} - \binom{n}{1} \binom{12n-6}{6} + \frac{4}{3} \binom{n}{2}\right] \frac{E_{12n-12}}{2^{12n-12}}$$

$$-\left[\binom{12n}{18}-\binom{n}{1}\binom{12n-6}{12}+\binom{n}{2}\binom{12n-12}{6}\right.$$

$$\left.-\frac{4}{3}\binom{n}{3}\right]\frac{E_{12n-18}}{2^{12n-18}}+-\ldots=\frac{2}{3}\frac{(9^3+12^3)^n+(-1)^n(2^6-1)^n}{2^{12n}}. \quad (16)$$

Kleinster Zeiger der E ist die kleinste durch 6 teilbare Zal $\geqq n$.

b) Formel [94], durch 2^{6p+2} dividiert:

$$\binom{6p+2}{2}2^{-2}E_2-\binom{6p+2}{8}2^{-8}E_8+\binom{6p+2}{14}2^{-12}E_{14}-+\ldots$$

$$+(-1)^{p-1}\binom{6p+2}{6p-4}2^{-6p+4}E_{6p-4}+(-1)^p\frac{4}{3}\binom{6p+2}{6p+2}2^{-6p-2}E_{6p+2}$$

$$=\frac{2}{3}\frac{(-1)^p3^{3p+1}-1}{2^{6p+2}}, \quad \ldots\ldots\ldots (24)$$

symbolisch:

$$(1+v)^{6p+2}+\frac{1}{3}v^{6p+2}=\frac{2}{3}\frac{(-1)^p3^{3p+1}-1}{2^{6p+2}},$$

$v^{6r+2}=(-1)^r2^{-6r+2}E_{6r+2}$, $r=0, 1, 2, \ldots$, alle anderen Potenzen $=0$.

Hilfsfunction:

$$V_2=(1+v)^{6n+2}[(1+v)^6-1]^n+\frac{1}{3}(v^6-1)^nv^{6n+2}$$

$$=(1+v)^{12n+2}-\binom{n}{1}(1+v)^{12n-4}+-\ldots+(-1)^n(1+v)^{6n+2}$$

$$+\frac{1}{3}v^{12n+2}-\frac{1}{3}\binom{n}{1}v^{12n-4}+-\ldots+(-1)^nv^{6n+2}$$

$$=\frac{2}{3}\frac{3^{3n+1}(3^3+4^3)^n+(-1)^{n-1}(4^3-1)^n}{2^{12n+2}};$$

$$V_2=P_{12n+2}v^{12n+2}+\ldots+P_{12n-4}v^{12n-4}+\ldots+P_qv^q,\ q\geqq n,$$

$$P_{12n+2-6\nu}=\binom{12n+2}{6\nu}-\binom{n}{1}\binom{12n-4}{6\nu-6}$$

$$+\binom{n}{2}\binom{12n-10}{6\nu-12}-+\ldots+(-1)^{\nu-1}\binom{n}{\nu-1}\binom{12-6\nu-4}{6}$$

$$+(-1)^\nu\frac{4}{3}\binom{n}{\nu},$$

daher

$$\frac{4}{3}\,\frac{E_{12n+2}}{2^{12n+2}} - \left[\binom{12n+2}{6} - \frac{4}{3}\binom{n}{1}\right]\frac{E_{12n-4}}{2^{12n-4}}$$

$$+\left[\binom{12n+2}{12} - \binom{n}{1}\binom{12n-4}{6} + \frac{4}{3}\binom{n}{2}\right]\frac{E_{12n-10}}{2^{12n-10}} - + \dots$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{3(9^3+12^3)^n + (-1)^{n+1}(4^3-1)^n}{2^{12n+2}}; \quad \dots (17)$$

auch giltig für $n = 0$.

Kleinster Zeiger der E ist die kleinste Zal $\equiv 2 \bmod 12$, die $\geqq n$ ist.

c) Formel [95], durch 2^{6p+4} dividiert:

$$\binom{6p+4}{4}2^{-4}E_4 - \binom{6p+4}{10}2^{-10}E_{10} + \binom{6p+4}{16}2^{-16}E_{16} - + \dots$$

$$+(-1)^{p-1}\binom{6p+4}{6p-2}2^{-6p+2}E_{6p-2} + (-1)^p\,\frac{4}{3}\,2^{-6p-4}E_{6p+4}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1+(-1)^p 3^{3p+2}}{2^{6p+4}}, \quad \dots\dots\dots (♀)$$

symbolisch:

$$(1+v)^{6p+4} + \frac{1}{3}v^{6p+4} = \frac{2}{3}\,\frac{1+(-1)^p 3^{3p+2}}{2^{6p+4}},$$

$v^{6r+4} = (-1)^r 2^{-6r-4}E_{6r+4}$, $r = 0, 1, 2, \dots$, alle anderen Potenzen $= 0$.

Hilfsfunction:

$$V_3 = (1+v)^{6n+4}[(1+v)^6-1]^n + \frac{1}{3}(v^6-1)^n v^{6n+4}$$

$$= (1+v)^{12n+4} - \binom{n}{1}(1+v)^{12n-2} + - \dots + (-1)^n(1+v)^{6n+4}$$

$$+\frac{1}{3}v^{12n+4} - \frac{1}{3}\binom{n}{1}v^{12n-2} + - \dots + (-1)^n\frac{1}{3}v^{6n+4}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{9(9^3+12^3)^n + (-1)^n(4^3-1)^n}{2^{12n+4}};$$

$$V_3 = Q_{12n+4} v^{12n+4} + \ldots + Q_{12n-2} v^{12n-2} + \ldots + Q_q v^q, \; q \geqq n,$$

$$Q_{12n+4-6\nu} = \binom{12n+4}{6\nu} - \binom{n}{1}\binom{12n-2}{6\nu-6} + \binom{n}{2}\binom{12n-8}{6\nu-12} - + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\nu-1}\binom{n}{\nu-1}\binom{12n-6\nu+10}{6} + (-1)^{\nu}\frac{4}{3}\binom{n}{\nu};$$

demnach

$$\frac{4}{3}\,\frac{E_{12n+4}}{2^{12n+4}} - \left[\binom{12n+4}{6} - \frac{4}{3}\binom{n}{1}\right]\frac{E_{12n-2}}{2^{12n-2}}$$

$$+ \left[\binom{12n+4}{12} - \binom{n}{1}\binom{12n-2}{6} + \frac{4}{3}\binom{n}{2}\right]\frac{E_{12n-8}}{2^{12n-8}} - + \ldots$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{9(9^3+12^3)^n + (-1)^n(4^3-1)^n}{2^{12n+4}} \;\ldots\ldots \;(18)$$

Kleinster Zeiger der E ist die kleinste Zal $\equiv 4 \bmod 12$, die $\geqq n$ ist.

3. *Tangenten-Coefficienten.*

Zu Grunde gelegt sind die Formeln [97], [98], [99] in „*Theorie der Euler'schen Functionen*"; alle E wurden auf die linke Seite gebracht und Alles durch eine Potenz von 2 dividiert.

a) Formel [97], durch 2^{6p+1} dividiert

$$\binom{6p+1}{1} 2^{-1}E_1 - \binom{6p+1}{7} 2^{-7}E_7 + \binom{6p+1}{13} 2^{-13}E_{13} - + \ldots$$

$$+ (-1)^{p+1}\binom{6p+1}{6p-5} 2^{-6p+5}E_{6p-5} + (-1)^p \frac{4}{3}\, 2^{-6p-1}E_{6p+1} = \frac{2}{3}, \quad (\mathfrak{b})$$

symbolisch:

$$(1+w)^{6p+1} + \frac{1}{3}\, w^{6p+1} = \frac{2}{3},$$

$W^{6r+1} = (-1)^r 2^{-6r-1} E_{6r+1}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ alle anderen Potenzen $= 0$.

Hilfsfunction:

$$W_1 = (1+w)^{6n+1}[(1+w)^6 - 1]^n + \frac{1}{3}(w^6 - 1)^n w^{6n+1} =$$

$$= (1+w)^{12n+1} - \binom{n}{1}(1+w)^{12n-5} + - \ldots + (-1)^n (1+w)^{6n+1}$$

$$+ \frac{1}{3} w^{12n+1} - \frac{1}{3}\binom{n}{1} w^{12n-5} + - \ldots + (-1)^n w^{6n+1}$$

$$= \frac{2}{3}(1-1)^n = 0;$$

$$W_1 = R_{12n+1} w^{12n+1} + \ldots + R_{12n-5} w^{12n-5} + \ldots + R_q w^q,\ q \geqq n,$$

$$R_{12n-6\nu+1} = \binom{12n+1}{6\nu} - \binom{n}{1}\binom{12n-5}{6\nu-6} + \binom{n}{2}\binom{12n-11}{6\nu-12} - + \ldots$$

$$+ (-1)^{\nu-1}\binom{n}{\nu-1}\binom{12n-6\nu+7}{6} + (-1)^\nu \frac{4}{3}\binom{n}{\nu},$$

folglich

$$\frac{4}{3}\frac{E_{12n+1}}{2^{12n+1}} - \left[\binom{12n+1}{6} - \frac{4}{3}\binom{n}{1}\right]\frac{E_{12n-5}}{2^{12n-5}} + \left[\binom{12n+1}{12}\right.$$

$$\left. - \binom{n}{1}\binom{12n-5}{6} + \frac{4}{3}\binom{n}{2}\right]\frac{E_{12n-11}}{2^{12n-11}} - + \ldots = 0.\ . \ (19)$$

Kleinster Zeiger der E ist die kleinste Zal $\equiv 1 \bmod 12$, die $\geqq n$ ist.

b) Formel [98], durch 2^{6p+3} dividiert:

$$\binom{6p+3}{3} 2^{-3} E_3 - \binom{6p+3}{9} 2^{-9} E_9 + \binom{6p+3}{15} 2^{-15} E_{15} - + \ldots$$

$$+ (-1)^{p-1}\binom{6p+3}{6p-3} 2^{-6p+3} E_{6p-3} + (-1)^p \frac{4}{3} 2^{-6p-3} E_{6p+3} = \frac{1}{3}. \ (\text{G}_4)$$

symbolisch:

$$(1+w)^{6p+3} + \frac{1}{3} w^{6p+3} = \frac{1}{3},\ w^{6r+3} = (-1)^r 2^{-6r-3} E_{6r+3},$$

$$r = 0, 1, 2 \ldots, \text{ alle anderen Potenzen} = 0.$$

Hilfsfunction:

$$W_2 = (1+w)^{6n+3}[(1+w)^6 - 1]^n + \frac{1}{3}(w^6 - 1)^n w^{6n+3}$$

$$= (1+w)^{12n+3} - \binom{n}{1}(1+w)^{12n-3} + - \ldots + (-1)^n (1+w)^{6n+3}$$

$$+\frac{1}{3}w^{12n+3}-\frac{1}{3}\binom{n}{1}w^{12n-3}+-\ldots+(-1)^n\frac{1}{3}w^{6n+3}$$

$$=\frac{1}{3}(1-1)^n=0;$$

$$W_2=S_{12n+3}w^{12n+3}+\ldots+S_{12n-3}w^{12n-3}\ldots+T_q w^q,\ q\geqq n$$

$$S_{12n-6\nu+3}=\binom{12n+3}{6\nu}-\binom{n}{1}\binom{12n-3}{6\nu-6}+\binom{n}{2}\binom{12n-9}{6\nu-12}-+\ldots$$

$$+(-1)^{\nu-1}\binom{n}{\nu-1}\binom{12n+9-6\nu}{6}+(-1)^\nu\frac{4}{3}\binom{n}{\nu},$$

daher

$$\frac{4}{3}\frac{E_{12n+3}}{2^{12n+3}}-\left[\binom{12n+3}{6}-\frac{4}{3}\binom{n}{1}\right]\frac{E_{12n-3}}{2^{12n-3}}+\left[\binom{12n+3}{12}\right.$$

$$\left.-\binom{n}{1}\binom{12n-3}{6}+\frac{4}{3}\binom{n}{2}\right]\frac{E_{12n-9}}{2^{12n-9}}-+\ldots=0. \quad (20)$$

Kleinster Zeiger der E ist die kleinste Zal $\equiv 3 \bmod 12$, die $\geqq n$ ist.

c) Formel [99], durch 2^{6p+5} dividiert:

$$\binom{6p+5}{5}2^{-5}E_5-\binom{6p+5}{11}2^{-11}E_{11}+\binom{6p+5}{17}2^{-17}E_{17}-+\ldots$$

$$+(-1)^{p-1}\binom{6p+5}{6p-1}2^{-6p+1}E_{6p-1}$$

$$+(-1)^n\frac{4}{3}2^{-6p-5}E_{6p+5}=\frac{2}{3}, \quad \ldots\ldots\ldots (♂)$$

symbolisch:

$$(1+w)^{6p+5}+\frac{1}{3}w^{6p+5}=\frac{2}{3},$$

$w^{6r+5}=(-1)^r 2^{-6r-5}E_{6r+5}$, $r=0,1,2\ldots$, alle anderen Potenzen $=0$.

Hilfsfunction:

$$W_3=(1+w)^{6n+5}[(1+w)^6-1]^n+\frac{1}{3}(w^6-1)^n w^{6n+5}$$

$$=(1+w)^{12n+5}-\binom{n}{1}(1+w)^{12n-1}+-\ldots+(-1)^n(1+w)^{6n+5}$$

$$+\frac{1}{3}w^{12n+5}-\frac{1}{3}\binom{n}{1}w^{12n-1}+-\ldots+(-1)^n\frac{1}{3}w^{6n+5}$$

$$=\frac{2}{3}(1-1)^n=0,\ n>0;$$

$$W_3=T_{12n+5}w^{12n+5}+\ldots+T_{12n-1}w^{12n-1}+\ldots+T_qw^q,\ q\geqq n,$$

$$T_{12n-6\nu+5}=\binom{12n+5}{6\nu}-\binom{n}{1}\binom{12n-1}{6\nu-6}$$

$$+\binom{n}{2}\binom{12n-7}{6\nu-12}-+\ldots,$$

mithin

$$\frac{4}{3}\frac{E_{12n+5}}{2^{12n+5}}-\left[\binom{12n+5}{6}-\frac{4}{3}\binom{n}{1}\right]\frac{E_{12n-1}}{2^{12n-1}}+\left[\binom{12n+5}{12}\right.$$

$$\left.-\binom{n}{1}\binom{12n-1}{6}+\frac{4}{3}\binom{n}{2}\right]\frac{E_{12n-7}}{2^{12n-7}}-+\ldots=0, \quad \ldots \quad (21)$$

$$n>0.$$

Kleinster Zeiger der E ist die kleinste Zal $\equiv 5 \bmod 12$, die $\geqq n$ ist.

Indem statt den in I bis III gewählten einfachsten Hilfsfunctionen die *folgenden* unter Beibehaltung derselben Symbole und Substitutionen eingeführt werden, entstehen allgemeinere, eine beliebige Constante k enthaltende Beziehungen. Während die untere Zeigergrenze hiedurch nicht beeinflusst wird, erfährt aber die obere Grenze ω einen Zuwachs proportional dem k; die Form der Ausdrücke gestaltet sich jedoch minder einfach.

$$\text{I } 1a:\ x^n(x+1)^{k+n}-x^{k+n}(x-1)^n,\ \omega=\begin{cases} n+\frac{k}{2}, & k \text{ gerade} \\ n+\frac{k+1}{2}, & k \text{ ungerade}\end{cases}$$

$$\text{I } 1b:\ (2x)^n(2x+1)^{k+n}+(2x)^{k+n}(2x-1)^n-2x^{k+n}(x-1)^n,$$

$$\omega = \begin{cases} n + \frac{k}{2}, & k \text{ gerade} \\ n + \frac{k-1}{2}, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

I 2: $(y+1)^{2k}[(y+1)^2 - 1]^n, \quad \omega = 2n + 2k$

I 3: $(z+1)^{2k+1}[(z+1)^2 - 1]^n, \quad \omega = 2n + 1 + 2k$

II 1a: $(x+1)^{4k+2}[(x+1)^4 - 1]^n, \quad \omega = 2n + 2k$

II 1b: $(x+1)^{4k}[(x+1)^4 - 1]^n, \quad \omega = 2n - 1 + 2k$

II 1c: $(x+1)^{4k+3}[(x+1)^4 - 1]^n, \quad \omega = 2n + 1 + 2k$

II 2a: $(y+1)^{4k}[(y+1)^4 - 1)^n, \quad \omega = 4n + 4k$

II 2b: $(y+1)^{4k+2}[(y+1)^4 - 1]^n, \quad \omega = 4n + 2 + 4k$

II 3a: $(z+1)^{4k+1}[(z+1)^4 - 1]^n, \quad \omega = 4n + 1 + 4k$

II 3b: $(z+1)^{4k+3}[(z+1)^4 - 1]^n, \quad \omega = 4n + 3 + 4k$

III 1a: $(u+1)^{6k+3}[(u+1)^6 - 1]^n, \quad \omega = 3n + 3k$

III 1b: $(u+1)^{6k+5}[(u+1)^6 - 1]^n, \quad \omega = 3n + 1 + 3k$

III 1c: $(u+1)^{6k+1}[(u+1)^6 - 1]^n, \quad \omega = 3n - 1 + 3k$

III 2a: $(v+1)^{6n+6k}[(v+1)^6 - 1]^n + \frac{1}{3} v^{6(n+k)} v^6 - 1)^n, \quad \omega = 12n + 6k$

III 2b: $(v+1)^{6n+6k+2}[(v+1)^6 - 1]^n + \frac{1}{3} v^{6n+6k+2}(v^6 - 1)^n,$

$\omega = 12n + 6k + 2$

III 2c: $(v+1)^{6n+6k+4}[(v+1)^6 - 1]^n + \frac{1}{3} v^{6n+6k+4}(v^6 - 1)^n,$

$\omega = 12n + 6k + 4$

III 3a: $(w+1)^{6n+6k+1}[(w+1)^6 - 1]^n + \frac{1}{3} w^{6n+6k+1}(w^6 - 1)^n;$

$\omega = 12n + 6k + 1$

III 3b: $(w+1)^{6n+6k+3}[(w+1)^6 - 1]^n + \frac{1}{3} w^{6n+6k+3}(w^6 - 1)^n,$

$\omega = 12n + 6k + 3$

III 3c: $(w+1)^{6n+6k+5}[(w+1)^6 - 1]^n + \frac{1}{3} w^{6n+6k+5}(w^6 - 1)^n,$

$\omega = 12n + 6k + 5.$

Demnach vergrössert sich ω in I1 um rund $\frac{k}{2}$, in I2 bis II1c um $2k$, in II2a bis II3b um $4k$, in III1 um $3k$, in III2 und III3 um $6k$.

In den Ergebnissen 1 bis 21 ($k = 0$) ist daher das Verhältnis der in die Beziehungen eingehenden B_1 bezw. E zur unteren Zeigergrenze ein *Kleinstes* und somit als das günstigste zu bezeichnen.

XXIV.

Exoplasma oder Metaplasma?

Von Dr. F. K. Studnička.

Vorgelegt in der Sitzung am 6. Dezember 1907.

In dem neuestens erschienenen Buche „Plasma und Zelle“ von Martin Heidenhain, ist zuerst in einem modernen Handbuche der Versuch gemacht worden, die Grundsubstanzen und die Kutikularsubstanzen als lebende Modifikationen des Protoplasmas darzustellen, und ihnen so aus der wenig beneidenswerten Stellung, die sie bisher in der Biologie eingenommen haben, zu helfen. Die betreffenden Substanzen, und besonders die ersteren von ihnen, leben, sie haben ihren eigenen Stoffwechsel und sind formativer Prozesse fähig. Ich bin der Meinung, dass diese Auffassung, die auch ich in einigen Arbeiten in der letzten Zeit vertreten habe, entschieden richtiger ist als die bisherige, die sie als vollkommen passiv und unter dem Einflusse der benachbarten Zellen stehend ansah. Virchow und Koelliker sind diejenigen Autoren, denen die ältere „Sekretionslehre“ ihren Ursprung verdankt. Sie haben sie für Ausscheidungen der Zellen gehalten und in eine Reihe mit den Sekreten der gewöhnlichen Drüsenzellen gestellt. Diese Auffassung hat fast allseitig Beifall gefunden und sie wird allgemein, auch in den neuesten Lehrbüchern, vertreten. Auch diese Lehre hat übrigens seinerzeits, wie es allen, die mit der Geschichte der Histologie einigermassen vertraut sind, bekannt sein wird, einen wesentlichen Fortschritt, und zwar gegenüber der alten Schwannschen „Blastemlehre“, bedeutet. Schwann wollte in einem grossen Teil der Grundsubstanzen von ihnen eine zellbildende Substanz erblicken und man hat sie vom Blutplasma abgeleitet.

Heidenhain führt in seinem Buche für die lebende Substanz der Grundsubstanzen und der Kutikularsubstanzen einen besonderen Namen, und zwar den Namen „Metaplasma" ein, den er bereits einmal früher, im Jahre 1902, im ähnlichen Sinne angewendet hat. Der Tierkörper würde demnach aus zwei „Plasmaarten", dem in den Zellen konzentrierten „Protoplasma" und dem interzellulär, resp. extrazellulär vorkommenden „Metaplasma" bestehen. Auf den ersten Blick erscheint der Name Metaplasma gut gewählt, doch kann man da gewisse Bedenken nicht unterdrücken. Es soll da, früher, bevor der von Heidenhain gewählte Name in allgemeine Benützung übergeht, auf diese aufmerksam gemacht werden.

Soviel mir bekannt ist, wurde der Name „Metaplasma" zuerst von Hanstein, und zwar in einem wesentlich anderen Sinne als jetzt bei Heidenhain benützt. Hanstein versteht unter ihm (1887) die sekundären Produkte des Protoplasmas, die Stärkekörner, Kristalloide, Fett u. s. w., also etwas ähnliches, was wir in der Zoologie allgemein mit den viel passenderen von Namen „Deutoplasma" oder als „Alloplasma" zu bezeichnen gewohnt sind. Soviel ich mich orientieren konnte, hat die Anwendung des Namens Metaplasma im Hansteinschen Sinne in der botanischen Literatur eine ziemlich grosse Verbreitung gefunden*), und es sollte da eigentlich früher eine Verständigung mit den Botanikern erzielt werden und die Einführung einer einheitlichen Nomenklatur für jene sekundäre Protoplasmabestandteile vorangehen, bevor man den Namen im neuen Sinne anwenden kann. Es ist fraglich, ob dies schliesslich möglich wäre. In der Histologie muss man zwar mit den Namen, die sich hier nicht ad libitum neu und neu bilden lassen, sparsam umgehen und so nötigen die Umstande manchmal — ich kann wirklich nicht begreifen, warum es denn nicht erlaubt werden könnte — mit einem Namen später eine neue z. B. erweiterte Definition zu verbinden, doch in unserem speziellen Falle müsste man bei den Namenänderungen etwas zu weit gehen!

Viel wichtiger, als der eben besprochene Umstand, scheint mir ein anderer zu sein.

Schon früher wurde für dasselbe, was jetzt Heidenhain „Metaplasma" nennt, von verschiedenen, Seiten ein anderer Name benützt, der auch jetzt, wenn da auch nichts anderes wäre, schon wegen der

*) Man spricht da auch von „metaplasmatischen Gebilden". Der Namen wird übrigens, obgleich seltener, auch in der Zoologie in dem eben angegebenen Sinne angewendet. Vergl. z. B.: Diamare, „Metaplasma ed immagini di secrezione nelle capsule soprarenali". Archivio zoologico. Vol. III. 1906.

Priorität den Vorrang verdienen sollte. Ich meine den Namen „Exoplasma" (Ectoplasma anderer) den auch ich in meinen Arbeiten anwende.

Nach dem Vorgange von Haeckel versteht man bekanntlich unter dem Namen „Exoplasma" die äussere Protoplasmaschichte des Körpers zahlreicher Protozoen. Bei verschiedenen Protozoen verdichtet sich das Protoplasma an der Oberfläche, wird resistenzfähiger und grenzt sich manchmal ziemlich auffallend gegen das innere, unverändert gebliebene, Protoplasma, das Endoplasma, ab. Das Vorkommen eines Exoplasmas ist keine allgemeine Erscheinung. Man findet in der Natur alle Fälle, von solchen angefangen, wo das Protoplasma an der Oberfläche kaum etwas verändert ist, bis zu solchen, wo sich eine dicke, gegen das Endoplasma ziemlich deutlich (wenn auch nicht scharf) abgegrenzte Exoplasmaschichte befindet. Manchmal kann man im Exoplasma mehrere, verschieden, oft kompliziert, gebaute Schichten unterscheiden, und endlich kann sich an der Oberfläche des Exoplasmas noch eine besondere Verdichtungsschicht in der Form einer Zellmembran oder Pellikula bilden, und diese übernimmt dann den Schutz des übrigen Körpers. Unter ihr können sich im Exoplasma Tonofibrillen, oder, wie wir es bei Infusorien finden, Myofibrillen bilden; das Exoplasma übernimmt dann also etwa dieselbe Rolle, wie sie z. B. ein Muskelschlauch höherer Metazoen hat. Neben Exoplasmabildung kann man bei Protozoen jedenfalls auch Ausscheidungen beobachten, und diesen allein verdanken manche Schutzhüllen, z. B. die bekannten Gallerthüllen vieler Protozoen, ihre Entstehung.

Bei einem Vergleiche des Protozoenkörpers mit dem der Metazoen entspricht selbstverständlich das Exoplasma der ersteren der Haut der letzteren, dies jedoch nur vom allgemein morphologischen Standpunkte. Wenn man die Sache vom Standpunkte der Cytologie betrachtet — und die Zellulartheorie ist ja doch immer noch in Geltung — entspricht jede einzelne Zelle dem ganzen Körper des Protozoons. Es ist nicht anders möglich, als alle festere Schichten, die sich an der Oberfläche der Metazoenzellen durch Verdichtung des Protoplasmas bilden mit demselben Name zu bezeichnen, den wir bei Protozoen angewendet haben. Der Namen „Exoplasma", der somit auch hier konsequenterweise angewendet wird, gehört also nicht in die anatomische, sondern in die cytologische Nomenklatur. Es ist das eine Gesamtbezeichnung für alle Modifikationen des Protoplasmas, die zum Schutz der eigentlichen Zelle dienen, und die, wie wir gleich sehen werden, in den Stützgeweben auch in den Dienst des Gesamtkörpers treten.

In ihrem ursprünglichsten Zustande kann man solche Verdichtungsschichten in den primitivsten Geweben des Tierkörpers, den Epithelien, bei Vertebraten z. B. auch in dem von jenen abstammenden Chordagewebe beobachten. Renaut hat (1886) den bisher nur in der Protistologie benützten Namen zuerst in dem eben angegebenen Sinne angewendet, und wendet ihn auch für die sog. Knorpelkapseln des Knorpelgewebes an. Streng genommen, kann man den Namen nur für die *Substanz*, um die es sich hier handelt, anwenden, denn es werden aus derselben Gebilde, die wesentlich von einander verschieden sind, gebildet. In den obersten Epidermiszellen baut das Exoplasma z. B. verschiedene Kutikulargebilde, von denen diejenige, die ich seinerzeit unter dem Namen „Deckplatte" beschrieben habe, noch die primitivsten zu sein scheinen, es bildet weiter die eigentlichen Zellmembranen, die wieder in der Form einer Pellikula oder einer Krusta (F. E. Schultze) erscheinen können, und endlich die eigentliche Basalmembran des Epithelgewebes (wo eine solche überhaupt zur Entwickelung kommt.) Im Knorpelgewebe bildet es die Knorpelkapseln, jedoch, wie wir gleich sehen werden auch Anderes.

Die Anwendung des Namens Exoplasma in der Cytologie des Epithels hat ihre eigene Bedeutung. Es wird durch dieselbe der Umstand betont, dass die Kutikulen, Membranen u. s. w. durch Umwandlung des Protoplasmas der Zellen, des eigentlichen Cytoplasmas und nicht durch einen Ausscheidungsprozess entstanden sind. Wollte man da den Namen Metaplasma anwenden, so könnte leicht scheinen, dass es sich um eine vom Protoplasma wesentlich verschiedene Substanz handelt, was durchaus nicht richtig wäre. Selbstverständlich gibt es Unterschiede zwischen dem Exoplasma eines Protozoon und demjenigen einer Epithelzelle, und es kann dies ja nicht anders sein, wenn man erwägt, dass es im ersteren Falle den Schutz des ganzen Körpers zur Aufgabe hat in dem anderen den einer einzigen Zelle. Das Exoplasma einer Amoebe z. B. ist einfach verdichtetes Protoplasma, welches vom Endoplasma niemals scharf getrennt ist, und welches sich unter Umständen in ein solches wieder zurück umwandeln kann. Bei Epithel- und Chordazelle finden wir meistens schon ganz scharfe Grenzen zwischen beiden, es gehört dies auch hier *durchaus nicht zur Regel*. Ob sich auch hier das Exoplasma wieder in Endoplasma zurück verwandeln kann, können wir nicht entscheiden, ausgeschlossen ist es nicht. Das Exoplasma des Protozoenkörpers kann auch die lokomotorische Funktion übernehmen, und es können sich in ihm (Infusorien) Myofibrillen entwickeln. Bei den Epithelzellen der Metazoen finden wir

nur ausnahmsweise etwas ähnliches, hier haben sich schon meistens die Funktionen getrennt, die einen Zellen dienen dem Schutze des Körpers, andere der Lokomotion, und Fälle, in denen beide Funktionen in einer einzigen Zelle vereint sind (wie in den bekannten Epithelmuskelzellen der Hydra), weisen schon wesentlich verschiedene Verhältnisse auf. Statt der Myofibrillen kann man dagegen im Exoplasma der Epithel- und Chordazellen sehr oft Tonofibrillen finden; ich meine hier die bekannten „Protoplasmafasern".

Aus Allem, was wir eben angeführt haben geht hervor, dass das Exoplasma der Protozoen wirklich ein Analogon in den verschiedenen Umwandlungsprodukten des Cytoplasmas der Epithel- und Chordazellen besitzt. Auf beiden Seiten handelt es sich um Verdichtungen oder überhaupt um Modifikationen des Protoplasmas, die jedenfalls einen verschiedenen Grad erreichen können. Wollte man nun, und dies tut Heidenhain, für die letzteren den Namen Metaplasma einführen, so sollte man, streng genommen, mit der Namensänderung bei Protozoen anfangen.

Genau so, wie dasjenige der Epithelzellen, kann auch das Cytoplasma anderer Zellen auf seiner Oberfläche besonders geartete Schichten differenzieren. Bei einigen, so den Ganglienzellen und Eizellen handelt es sich nur um eine breitere oberflächliche Schichte von etwas einfacherer Struktur, welche in das innere Protoplasma der Zelle allmählig übergeht und keine besondere Bedeutung hat, anderswo, und zwar überall, wo es für die Zellen oder den Gesamtorganismus notwendig erscheint, entstehen breite Schichten von festerem Exoplasma, anderswo wird das Exoplasma massenhaft gebildet und emanzipiert sich noch auffallender von den Zellkörpern, die ihm Ursprung gegeben haben. In der Regel kombiniert sich die Exoplasmabildung in diesen Fällen, die alle die sog. Binde-, Füll- und Stützgewebe betreffen mit der Bildung von Tonofibrillen, welche jedenfalls auch selbständig im reinen Cytoplasma auftreten können, und mit Ausscheidungsprozessen.

Ebenso, wie im Epithel- und Chordagewebe, kann man auch in einigen der Gewebe, von denen hier zuletzt die Rede war Fälle finden, in denen sich das Exoplasma in der Form von individualisierten Hüllen an der Peripherie von Zellen differenziert, und mit ihnen so wenigstens in der ersten Entwickelungszeit Ganze bildet, welche ich in einer meiner Abhandlungen (1903) mit dem Namen „Gesamtzellen" bezeichnet habe.*) Viel zahlreicher sind Fälle, in denen das Exoplasma

*) Dass meine „Gesammtzellen" etwas von den „Zellterritorien" Virchows wesentlich verschiedenes sind, brauche ich vielleicht nicht näher zu beweisen.

vom Anfang an zusammenhängende interzelluläre Netze bildet, oder sich überhaupt kontinuierlich zwischen den Zellen bildet. Man kann solche Fälle in denen von einer Individualität des Exoplasmas nicht die Rede sein kann, mit Syncytien vergleichen. Noch weniger deutlich sind selbstverständlich die Beziehungen der Zellen und des Exoplasmas dort, wo sich kontinuierliche Exoplasmapartien an der Oberfläche von Zellschichten (Epithelen) oder zwischen Geweben (wie das Zahnbein) gebildet haben. Solche Fälle habe ich unlängst in zwei Abhandlungen (Anat. Anzeiger, Bd. 30., 31.) genauer besprochen. Man könnte da auch vom „Synexoplasma" [Nach der Analogie mit einem „Symplasma" (Hanstein)] sprechen.

Auch darauf habe ich bereits aufmerksam gemacht, dass das Exoplasma in den hier in Betracht kommenden Geweben wahrscheinlich nur in der ersten Zeit seiner Entwickelung rein ist. Die Zellen des Gewebes sind vielleicht in einem jeden Falle später als Drüsenzellen tätig, und scheiden besondere Stoffe aus, denen beim weiteren Ausbau des Gewebes verschiedene Rolle zukommt. Die Knorpelzellen scheiden die verschiedenen für das Knorpelgewebe charakteristischen Substanzen aus, Odontoblasten und Osteoblasten dienen zum Vorbereiten der Kalksalze und übergeben dieselben den von ihnen versorgten Geweben, die Zellen des Gallertgewebes scheiden in die Grundsubstanz des Gewebes jene mucinhaltige Flüssigkeit aus, welche für das betreffende Gewebe charakterisch ist. In einer Reihe von Geweben tritt das Exoplasma übrigens noch mehr in den Hintergrund; es wird von den dicht gelagerten Tonofibrillen verdrängt. Es erhält sich nur in der Kittsubstanz, welche die engen Lücken zwischen den Fibrillen erfüllt. Kurz gesagt, es handelt sich bei der Bildung einer Grundsubstanz um drei wesentlich verschiedene Prozesse: 1. Exoplasmabildung, 2. Fibrillenbildung die schon im Cytoplasma beginnen kann, 3. Ausscheidungen von Seiten der Zellen. Sehr wahrscheinlich ist es, dass sich eine Reihe der im letzten Falle in Betracht kommenden Stoffe das Exoplasma später selbst bereiten kann.

Soviel über die morphologische und physiologische Seite des Problemes. Man sieht, dass das Exoplasma resp. Metaplasma in den verschiedensten Formen entstehen kann. Absolut unmöglich ist es diese in scharf begrenzte Kategorien einzuteilen und vielleicht sagen zu wollen, dies oder jenes ist noch ein Exoplasma, das andere ist schon ein Metaplasma. Der Name, den man da anwenden wird, kann eigentlich nur eine ganz *allgemeine Bedeutung* haben, für die besonderen Fälle hat man ja doch Spezialbezeichnungen: Zellmembran, Kutikula,

Basalmembran, Grundsubstanz zur Disposition. Immer handelt es sich um Modifikationen des Protoplasmas, die eine ganz kontinuierliche Reihe vom eigentlichen Cytoplasma angefangen bis zu der festesten Grundsubstanz bilden — auch hier kennt die Natur keine Sprünge.

Jedenfalls kann man nicht verhindern, dass man auch später den Namen Exoplasma in seiner ursprünglichsten speziellen Bedeutung anwendet. Die äussere Schichte des Amoebenkörpers oder desjenigen einer Epithelzelle ist ein Exoplasma sensu strictiori, für welches es vielleicht überflüssig wäre, eine besondere Spezialbezeichnung anzuwenden.

Früher hat man die Zellmembranen, Grund- und Kutikularsubstanzen einfach für Ausscheidungen gehalten. Noch unlängst hat man sie ja mit dem Namen „geformte Sekrete" bezeichnet [Biedermann], und hat man an die Ähnlichkeit der Fibrillenbildungen in ihnen mit Faserungen, die in anorganischen Massen, kolloiden Substanzen z. B. durch Druck oder Zug hervorgerufen werden können hingewiesen [v. Ebner]. Es lässt sich nicht bestreiten, dass wirklich weitgehende Analogien zwischen vielen Erscheinungen in den lebenden und leblosen Substanzen bestehen, und dass besonders das mehr passiven Exoplasma dem Anorganischen viel näher steht, als das lebensfrische Cytoplasma, doch ist auf der anderen Seite absolut unmöglich Alles einfach durch solche Kräfte erklären zu wollen, wie sie z. B. in kolloiden Substanzen walten. Manches, was man hier sieht, die Entstehung der Fibrillen, die Vermehrung derselben durch Längsspaltung und das zweckmässige Anordnen derselben bereits im embryonalen Körper, wo ja doch von mechanisch wirkenden Ursachen, von Zuge oder vom Drucke gar keine Rede ist und wo es sich nur um *Vererbung des einmal Erworbenen* handeln kann, spricht entschieden dafür, dass wir da mit, ihrem Wesen nach bisher unbekannten Lebenserscheinungen zu tun haben.

Heidenhain spricht seinem Metaplasma einen gewissen Grad von Irritabilität zu; dass es selbständig wachsen, Strukturen bilden und sich ernähren kann, habe ich selbst an einer Reihe von Fällen gezeigt. Ich habe unter anderem Fälle gefunden, in denen grosse Partien vom Exoplasmagewebe [so kann man es vielleicht benennen] zellfrei sind, oder wenigstens so wenig Zellen enthalten, dass man denselben einen Anteil an den Lebenserscheinungen des Exoplasmas nicht zuschreiben kann.

Eine einfache Erwägung über die Wachstumverhältnisse z. B. des Knochen- oder Dentingewebes müsste uns übrigens zu der An-

nahme einer Irritabilität deren Exoplasmas führen. Es ist unmöglich alles auf die Zellen zurückzuführen. Die Formbildungsfähigkeit der Grund- und Kutikularsubstanzen wurde besonders in der letzten Zeit von vielen Seiten angenommen, nur weigerte man sich meistens den weiteren Schritt zu machen und diese „Sekrete" überhaupt für lebendig zu erklären und ihre Beziehungen zu dem Protoplasma näher zu untersuchen. Was das letztere betrifft so können wir übrigens auch heute nicht sagen, dass wir bezüglich der Kutikularsubstanzen in dieser Richtung genügend informiert wären.

Die in den Grund- und Kutikularsubstanzen enthaltene lebendige Substanz hat nicht nur die Fähigkeit, selbstständig zweckmässige Strukturen zu bilden und sich so den äusseren Einflüssen unterordnen, sie hat nicht nur die Fähigkeit Strukturen von neuem zu bauen, die der Organismus vererbt hat, sondern sie ist überhaupt formbestimmend. Die Gestalt einer Skeletpartie hängt vom Exoplasma ab, die Gestalt einer grösstenteils aus Grundsubstanz bestehenden Meduse ebenfalls, und dasselbe Vermögen müssen wir auch dem Exoplasma der Kutikularsubstanzen zuschreiben. Unmöglich ist es alles auf das Cytoplasma der spärlich vorhandenen Zellen zurückführen zu wollen, das ganze Gewebe lebt; ebenso wie es in anderen Fällen das Cytoplasma das Wesentlicheist, ist es in den zuletzt erwähnten wieder das Exoplasma.

Das Wachstum des Knochens unter abnormen Verhältnissen, nach einem Knochenbruch z. B., also unter Umständen, in denen das Wirken der Erblichkeit ausgeschlossen ist, wird nur durch die Irritabilität der in der Grundsubstanz enthaltenen lebenden Substanz — des Exoplasmas — geregelt. Der Druck, der zum Entstehen der ersten neuen Knochentrabekeln führt, wirkt ja doch direkt an die Grundsubstanz des an der betreffenden Stelle früher befindlichen Bindegewebes resp. an die Fibrillen derselben, und das Gewebe wandelt sich in Knochen um. Die Zellen spielen da jedenfalls auch eine wichtige Rolle, die Irritation wird auch auf sie übertragen, sie vergrössern sich und sind als Drüsenzellen — Osteoblasten — weiter tätig, doch immer sind sie in einem solchen Falle von untergeordneten Bedeutung. Ähnlich ist es klar, dass wenn z. B. eine dünne Knochenlamelle mehr in Anspruch genommen wird, dass dies in erster Reihe an deren Grundsubstanz einwirkt; der Reiz breitet sich an diejenige des umgebenden Bindegewebes und die Lamelle verdickt sich. Kurz und, gut in Binde- und Stützsubstanzen ist das Exoplasma natürlich mit allen seinen Nebengebilden, Fibrillen u. s. w. dasjenige das hier fungiert also genau so, wie es in einem Muskel das Sarcoplasma

mit den Myofibrillen, ist. Schon wenn man von diesem Standpunkte aus den Sachverhalt betrachtet, kann man sie nicht für leblos halten. Eine solche Annahme war nur als eine unbegründete Konsequenz der bisherigen zellulären Theorie, die nur die Zellen leben liess, möglich.

Vollkommen richtig bemerkt Heidenhain, dass es heute nicht möglich ist, in der Zelle das Element des fertigen Metazoenkörpers zu erblicken, und vermeidet für sein Buch den üblichen Titel „Zellenlehre"; man wird ja künftig ohnehin, in Betracht der oben erwähnten Tatsachen, einen passenderen Namen, vielleicht „Plasmatologie" benützen müssen. Der fertige Körper eines Metazoons stellt wirklich, wie das einmal schon (damals jedoch ohne jede Berechtigung — Heitzmann) gesagt wurde, einen Protoplasmaklumpen vor, in dem das Protoplasma in verschiedenen Richtungen, je nach Bedarf, modifiziert ist. Das Leben konzentriert sich jedenfalls in das Cytoplasma der Zellen, und dieses ist vielleicht allein fähig die Gewebe des Tierkörpers zu regenerieren, aber auch das Exoplasma der Grundsubstanz- und Kutikulargewebe lebt. Wenn man bedenkt, dass auch das Cytoplasma bereits aus wenigstens zwei Bestandteilen, dem Centroplasma in der Umgebung der Centriolen, und dem eigentlichen Cytoplasma besteht, so hat man hier eigentlich drei Stufen der Umbildung des Protoplasmas vor sich. Ein ganz eigentümliches Licht an alle diese drei Modifikationen des Protoplasmas werfen Befunde beim sekundären Entstehen von Cytoplasma, wie ich es in einer Reihe von Fällen beschrieben habe. Das ursprüngliche Cytoplasma des embryonalen Gewebes bildet Tonofibrillen und sein Aussehen kann sich bedeutend modifizieren. Nachdem diese Modifikation einen gewissen Grad erreicht hat erscheint in der unmittelbaren Umgebung der Zellkerne neues Cytoplasma. In meiner letzten Arbeit habe ich erwähnt, dass die Sache auf mich so einen Eindruck macht, als ob sich das Cytoplasma von einem grösseren Bereiche der ehemaligen Zelle sammeln würde. Möglicherweise ist es so, aber es kommt jetzt die Frage, was an dieser Neubildung des Zellkörpers beteiligt ist. Was dies betrifft, so ist es nicht unwahrscheinlich, dass es das Zentrum der Zelle — das Centriol — ist, welches die Neubildung des Cytoplasmas bewirkt, und es wären neue Untersuchungen in dieser Richtung sehr wünschenswert. Nicht uninteressant ist eine weitere Betrachtung: In einer Reihe von Fällen konnte ich das sekundäre Bilden von Zellen beobachten. Um einen im veränderten Protoplasma liegenden Zellkern entsteht auf einmal eine neue Zelle; der Vorgang durch den dies geschieht, ist sehr frappant, und doch hat man

da eine Erscheinung vor sich, die vielleicht — bestimmt zu sagen wage ich dies nicht — schon SCHWANN beobachtet hat. Die Neubildung der Zellen im veränderten Protoplasma erinnert auffallend auf die von ihm beschriebenen Zellbildung im Cytoblastem. Es wäre übrigens weiter zu untersuchen, ob sich in den Grundsubstanzgeweben wirklich überall neue Zellen („Grundsubstanzellen" nach WALDEYERS Bezeichnung) an der Oberfläche der Zellkerne bilden müssen, oder ob, wie ja mehrmals angegeben wurde, auch „nackte" Kerne in solchen vorkommen können. Die bisherige Zelltheorie hielt so etwas für unzulässig, die Exoplasmatheorie würde darin jedoch nichts Besonderes erblicken können.

Die Exoplasmalehre, von der bisher die Rede war, modifiziert, wie auch HEIDENHAIN betont, bedeutend unsere bisherige Anschauungen vom Metazoenkörper und es werden sicher auch weitere Folgerungen, die besonders die bisherige Vererbungslehre schwer treffen müssen, nicht ausbleiben können. Anders verhält sich die Sache, wenn man die Fylogenese und die Ontogenese der Metazoen in Betracht zieht; hier bleibt, und dies betont mit vollem Rechte auch HEIDENHAIN die bisherige Zellenlehre in ihrem Rechte bestehen, auch an dem Grundgedanken der Zellenlehre, demjenigen vom prinzipiellen Übereinstimmen des Pflanzen- und Tierkörpers, wird durch dieselbe kaum etwas geändert.

Brünn, am 1. Dezember 1907.

XXV.

Studie o síranu železitém.

Docent Dr. Jar. Milbauer a Ot. Quadrat.

Se 4 obrazci v textu.

Předloženo dne 6. prosince 1907.

Jeden z nás ukázal při jiné příležitosti,*) že síran železnatý v kyselině sírové koncentrované při vyšší teplotě se okysličuje i v tom případě, prochází-li tekutinou vodík a vzniká li v ní kysličník siřičitý. Reakce jde zvolna za nižší teploty, při vyšší je měřitelná a konečným produktem je látka velmi jemně krystallinická, barvy pleťové, v literatuře popsaná od Gilewa (Chem. News 51, 213), bezvodý síran železitý.

Ve své studii o podvojných síranech (Comp. rendus 87, 602) Etard nebral na tuto reakci zřetele a tvrdí, že síran složení $FeSO_4Fe_2(SO_4)_3 2H_2SO_4$ vzniká účinkem kyseliny sírové koncentrované na směs síranů železnatého a železitého.

Jeho pokusy jsme opakovali a zjistili, že záhřevem do 200° nevzniká jím popsaná látka a pokračuje-li se v zahřívání, tu zvolna nastává oxydace síranu železnatého, jak dále výsledky měření nás poučily a resultátem je směs krystalovaného síranu železitého a bezvodého železnatého; posledního je tím méně, čím déle zahřívání trvalo.

Obrátili jsme v následující studii pozornost svoji ku kinetice této reakce, všimli jsme si síranu železitého po stránce analytické a ko-

*) Zeitschr. f. physik. Chemie LVII. 649.

nečně připravili jsme několik podvojných síranů, jejichž jednou složkou je síran železitý.

a) *Oxydace síranu železnatého.*

Do Bodensteinova thermostatu (Zeit. f. phys. Chemie 30, 120) vloženy zkoumavky, volně zakryté skleněnými zátkami a zavěšené na květinový drát, aby při vysoké teplotě mohly být rychle vytaženy. Do každé odváženo po 1 *g* jemně třeného krystalovaného síranu železnatého a přidáno 20 *cc* koncentr. kyseliny sírové s 95,6% H_2SO_4. Teplota v thermostatu udržována na konstantní výši elektrickým thermoregulatorem Van t'Hoffovým (Zeit. f. phys. Chemie 27, 79). Po určité době, měřené chronometrem, vytažena za drátek jednotlivá zkoumavka vložena do objímky z měděné sítky a rychle ochlazena. Po 5 minutách reakční směs kvantitativně spláchnuta do vody, tekutina uvedena do varu, udržována v něm po jednu minutu, načež přítomná nezoxydovaná sůl železnatá štitrována roztokem permanganátu. Tento způsob analytický obsahuje chybu, jež zaviněna malým množstvím kysličníku siřičitého, který rozpouští se i za vysoké teploty v kyselině sírové, přejde do tekutiny zředěné a zredukuje něco soli železité; proto vždy byla dána do thermostatu jedna zkoumavka, do níž odváženo ekvivalentní množství síranu železitého a kterému přidáno 20 *cc* kyseliny sírové, za chladu nasycené kysličníkem siřičitým; s tekutinou zde resultující bylo naloženo jako s předešlými, několik desetin *cc* permanganatu zde spotřebovaných na vzniklou sůl železnatou odečítáno pak jako oprava.

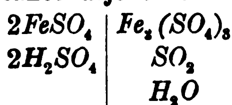
Měření poskytlo tyto hodnoty:

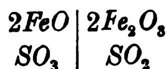
Po době		nalezeno množství soli železité		která odpovídá
45 minut		128,2 *mg*		20,5 *mg* SO_2 *)
75 „		448,6 „		71,7 „ „
105 „		638,8 „		102,0 „ „
135 „		723,5 „		115,6 „ „
165 „	max.:	737,3 „	max.:	117,8 „ „
		751,0 „		120,0 „ „

jež dávají tečkovanou křivku obrazce I.

*) Přepočteny údaje na tuto hodnotu, by dále mohlo být srovnáváno.

Reakce děje se buď dle schema: aneb:



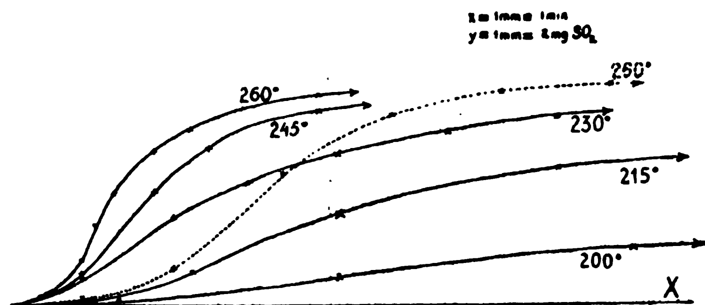


Rovnice platné pro rychlostní „konstantu" v systemu trimolekulárné aneb kvadrimolekulárné reakce, totiž:

$$k = \frac{1}{t(b-a)^2}\left[\frac{(b-a)x}{(a-x)a} + ln\,\frac{b(a-x)}{a(b-x)}\right], \text{ případně:}$$

$$k' = \frac{1}{t(a-b)^3}\left[ln\,\frac{(x-a)b}{(x-b)a} - (a+b)\left(\frac{4x-(a-b)}{(x-a)(x-b)} + \frac{a-b}{ab}\right)\right]$$

nedají při výpočtu žádných „konstant" ani pro ty případy, kdy uvažujeme jednodušší eventualitu, že koncentrace b kyseliny sírové je mnohokrát větší než a koncentrace síranu železnatého.



Obr. 1.

Domnívali jsme se, že příčina leží v tom, že system je nehomogenní.

V další řadě pokusů hleděli jsme k tomu, abychom inhomogenitu prostředí zmírnili. Užívali jsme materiál co nejjemněji třený a tekutina udržována neustále v pohybu kysličníkem uhličitým, který pod konstantním tlakem prováděn dle způsobu, jaký popsán byl jedním z nás ve studii již citované.

Reakčními nádobkami byly zde táhlé baňky (viz obr. II.) se zabroušenou trubicí, kterou přiváděn kysličník uhličitý, a s postranní trubkou pro odvádění reakcí vzniklého kysličníku siřičitého. Tento jímán do titrovaného jodu, jehož nadbytek určován arsenanem sodnatým.

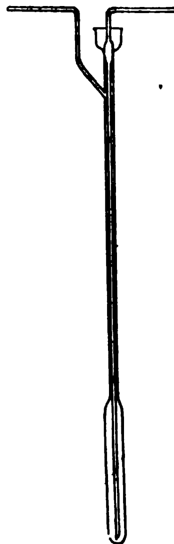
Pracováno se stejnými množstvími jako předešle a nalezeno:

Teplota	Čas v min.	Vzniklo mg SO_2
200°	30	2,4
	90	16,0
	170	30,6
	210	37,5
	265	46,0
	335	53,9
	375	61,0
215°	50	19,1
	90	48,6
	150	73,9
	210	92,3
	270	104,2
230°	25	23,2
	45	47,9
	65	65,3
	90	79,6
	120	90,3
	150	98,5
245°	25	26,9
	40	61,6
	55	83,4
	75	103,8
	95	112,0
260°	20	24,6
	30	61,4
	40	84,0
	50	96,1
	90	115,5
	125	122,7

Výsledky tyto vneseny jsou v grafická řešení do křivek na obrazci I. a, jak patrno, neliší se od křivky dříve uvedené tvarem; rychlost jest ovšem zvýšena tím, že zplodina, kysličník siřičitý, ze systemu je unášen.

Ani zde neskýtá výpočet „konstant" hodnoty blízké, nýbrž s časem rostoucí. Kombinuje se patrně rychlost reakční s rychlostí rozpouštěcí a mimo to přistupuje i ten moment, že látka samotna se odvodňuje. Z té příčiny k dalším pokusům užit síran železnatý částečně odvodněný.

Krystalovaný síran železnatý, jemně třený, nasuspendován do koncentrované kyseliny sírové a udržován při teplotě 60° po $^1/_2$ hod. Preparát odssán Goochovým tyglem a vysušen na poresním talíři.



Obr. II.

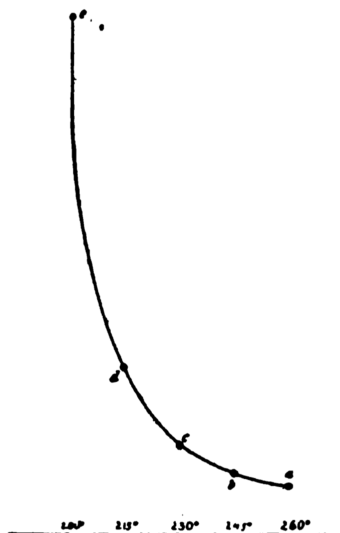
Pracováno týmž způsobem jako předešle, avšak do práce vzato množství odpovídající 1 molu Fe^{II} v litru kyseliny sírové.

Při teplotě 230° *C* získány výsledky:

čas. v min.	$mg SO_2$
25	7, 7
40	31, 0
55	61, 5
70	92, 0
85	122, 2
100	154, 6

čas v min.	$mgSO_2$
115	188, 9
130	222, 6
145	255, 5
160	278, 9
180	302, 1
215	321, 0
245	338, 9
285	366, 7

které dají podobným grafickým řešením křivku, která neliší se tvarem od předešlých. Hodnot pro „konstanty“ nedocíleno.



Obr. III.

Ze všech našich pokusů je patrno, že oxydace síranu železnatého koncentrovanou kyselinou sírovou není jednoduchá a nedá se obecnými zákony řešit, okolnost, kterou pozoroval již Baborovský (Rozpravy č. Akademie r. X. č. 19.) při studiu rychlosti sufonační, kdy působeno koncentrovanou kyselinou sírovou na uhlovodíky.

Teplota velice účinně zrychluje naši oxydaci jako většinu reakcí, což zřejmo z těchto čísel:

50 mg SO_2 vyvine se z 1 *g* síranu železnatého a 20 *cc* konc. kys. sírové

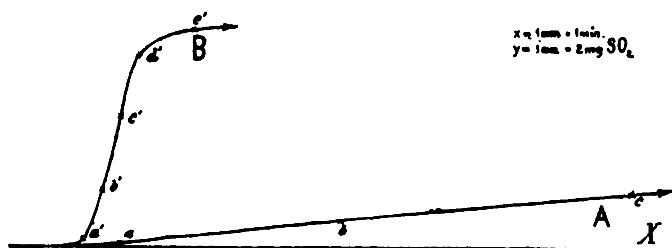
při teplotě

200°	v	140	minutách
215°	„	45	„
230°	„	24	„
245°	„	16	„
260°	„	13	„

a pak z obrazce III.

Pro zajímavost zkoušeno také, zda síran rtuťnatý, který v konc. kyselině sírové rozpuštěn, dovede mnohé processy oxydačně-redukční urychlit, funguje zde jako positivní katalysátor. I srovnány výsledky dvou řad měření při stejných podmínkách; 1 g látky použit jednou s čistou kyselinou sírovou a podruhé s roztokem síranu rtuťnatého v konc. kyselině sírové (10 *cc* konc. kyseliny a 10 *cc* konc. roztoku $HgSO_4$ v H_2SO_4) Nalezeno:

bez $HgSO_4$ (křivka **A**)		se $HgSO_4$ (křivka **B**)	
čas v min.	*mg* SO_2	čas v min.	*mg* SO_2
30	2, 4	20	4, 3
90	16, 0	25	31, 0
170	30, 6	30	70, 3
210	37, 5	35	104, 8
265	46, 0	50	118, 0
235	53, 9		
275	61, 0		



Obr. IV.

Vyneseny v obr. IV. podávají nám jasný obraz o mocném účinku této látky na rychlost oxydační.

b) Síran železitý jako základ pro titraci permanganatem.

Veliká stálost síranu železitého vedla nás k tomu, bychom ho připravili ve větším množství a zkoušeli, zda se dá použít ku stanovení titru chameleonu.*)

Všechny způsoby příprav, které vycházejí ze síranu železnatého a oxydaci provádějí kyselinou dusičnou jsme zavrhli, poněvadž sledy kyseliny této velmi těžko lze odstraniti a nikdy látka získaná není čistá. Náš způsob práce poskytuje síran železitý o složení theoretickém $Fe_2[SO_4]_3$.

Postupujeme u přípravě jeho takto: Do kjehldalisační baňky z jenského skla se stěnami rovnými odvážíme 10 *g* síranu železnatého, třikrát rušenou krystalisací čistěného přidáme 100 *cc* koncentrované kyseliny sírové, uzavřeme krátkou nálevkou a vaříme přímo na síťce $^3/_4$—1 hodinu. Během té doby se síran železnatý odvodní a zoxyduje na jemné žluté šestiboké destičky. Vyjmutý vzorek musí v zorném poli mikroskopu jeviti se úplně homogenním. Po vychladnutí nabude látka barvy pleťové; filtrujeme ji Goochovým tyglem přes asbestovou vrstvu, na níž položena destička Wittova. Odssajeme důkladně a promýváme lihem, pak bezvodým čistým etherem a usušíme ve vodní sušárně do konst. váhy. Chováme látku získanou v dobře uzavřených lahvičkách. Na vzduchu se látka nemění, v prostoru nasyceném vodními parami v uzavřené nádobě nad vodou přijímá vláhu rychle.

Ku stanovení titru permanganatu odvážen 1 *g* do baňky Erlenmayerovy, přidáno 25 *cc* vody a 10 *cc* konc. kyseliny sírové, několik zrnek zinku železa prostého, mírně zahříváno až vše se rozpustilo, zředěno stejným volumem vody a stitrováno roztokem permanganatu.

---

*) Rozsáhlá je literatura k předmětu tomu se vztahující. Snesena je podrobně v studii Langově: „O určení titru permanganatu draselnatého kysličníkem arsenovým,“ jež samostatně vyšla u Dr. Grégra a syna 1904. Uvedeme zde pouze jména navržených látek základních: klavírní drát (Marguerittе), kryst. kyselina oxalová (Hempel), též sublimovaná (Hampe), elektrolytické železo (Classen), Mohrova sůl, kamenec ammonatý (Volhard), kaliumtetraoxalat (Ullricht a Meissel), šťovan železnatý (Gräger), manganatý (Röst), olovnatý (Štolba), sodnatý (Sörensen), ammonatý (Gooch), šťovan hydroxylaminu (Simon), manganistan draselnatý (Gräger), ferrokyanid draselnatý (Gintl), sulfokyanidy olovnatý a ammonatý (Erlenmayer).

a) Roztok permanganatu obsahoval stitrován:

na kyselinu oxalovou . . 0,00639 *g Fe* (střed z několika stanovení)

„ ferrisulfat . . . . . 0,00639 *g Fe* („)

b) podobně:

na oxalovou . . . . . . 0,005554 *g Fe* („)

„ kaliumtetraoxalat . . 0,00556 *g Fe* („)

„ ferrisulfat . . . . . 0,005557 *g Fe* („)

Z výsledků patrna dostatečná shoda; hodí se tudíž síran železitý bezvodý ku stanovení titru roztoku permanganatu.

c) *Podvojné sírany se síranem železitým.*

Vaříme-li směs síranu železnatého s některými sírany těžkých kovů v konc. kyselině sírové způsobem takovým, jakým jsme připravovali čistý síran železitý tu vznikají mnohdy podvojné sole.

Podvojná sůl se síranem měďnatým.

20 g krystalovaného síranu měďnatého a *20 g* krystalovaného síranu železnatého vařeno s *200 cc* konc. kyseliny sírové po 4 hodiny. V té době vytvoří se mikroskopické krystaly barvy špinavě růžové a přebytečný síran měďnatý vejde v roztok. Krystaly mají složení $2CuSO_4Fe_2(SO_4)_3$.

Analysou nalezeno:

	I.	II.	III.
CuO . . .	22,09%	21,89%	21,99%
Fe_2O_3 . .	22,25%	22,19%	22,22%
SO_3 . . .	55,42%	—	55,68%
	99,76%		99,87%

Theorie pro $Cu_2F_2(SO_4)_5$

22,13%
22,24%
55,63%
100,00%

Látka jeví se pod mikroskopem jako úplně homogenní, krystalovaná pravděpodobně v krychlích; úplně suchá je šedivá s odstínem do růžova. Varem s konc. kyselinou nasycenou síranem měďnatým se nerozkládá. Na vzduchu velmi snadno vlhne, rozkládá se a modrá; ve vodě se dosti snadno rozpouští.

Podvojný síran $CuSO_4Fe_2(SO_4)_3 24H_2O$ získal BASTICK (Pharm. I. Trans 13.639) z roztoku obou síranů okyselených kyselinou sírovou odkouřením ku krystalisaci.

Podvojná sůl se síranem nikelnatým.

Odvažováno krystalovaných *14 g* síranu železnatého a *14 g* síranu nikelnatého ($NiSO_4 7aq$) a odměřováno *150 cc* konc. kyseliny sírové. Obvyklým způsobem pracovním získána látka, která má složení $2NiSO_4Fe_2(SO_4)_3$.

Analysou nalezeno:

	I.	II.	Theorie pro $Ni_2Fe_2(SO_4)_5$
NiO . . .	21, 12%	21, 04%	21, 06%
Fe_2O_3 . .	22, 60%	22, 51%	22, 52%
SO_3 . . .	55, 64%	56, 44%	56, 42%
	99, 36%	99, 99%	100, 00%

Tvoří citronově žluté krystalky mikroskopické, pravděpodobně krychle. Vodou se zvolna rozkládá, při čemž železo rychleji vchází do roztoku. Záhřevem se zředěnými kyselinami rozpouští se rychle. Není identickým se sulfatem ETARDOVÝM $NiSO_4Fe_2(SO_4)_3 2H_2SO_4$ (Comptes rendus 87, 602.)

Podvojná sůl se síranem manganatým.

Vaříme-li po několik hodin *6 g* krystalovaného síranu manganatého ($MnSO_4 7aq$) a *6 g* síranu železnatého ($FeSO_4 7aq$) se *100 cc* koncentrované kyseliny sírové, získáme jemný nažloutlý prášek a roztok hnědočervený. Látka získaná není úplně čistá, jak rozbor nás poučil. I nasuspendována do konc. kyseliny sírové, přimísený síran manganatý vyvařen, promyta horkou konc. kyselinou, pak studenou, lihem, etherem a vysušena ve vodní sušárně. Pod mikroskopem jeví se jako porušené lamely, které po tomto čistění nejeví konstantní složení. Ve vodě se zvolna rozpouštějí, rychleji po okyslení kyselinou sírovou. Obsahují kol 10% MnO, nejsou však rozhodně totožny ani se sulfatem $2MnSO_4Fe_2(SO_4)_3 3H_2SO_4$, který má $17,7\% MnO$ a vzniká, přidá-li se ku směsi koncentrovaných roztoků síranu manganatého a železnatého kyselina dusičná a kyselina sírová záhřevem až na *160°*, ani se solí $2MnSO_4Fe_2(SO_4)_3$, jež obsahuje $20,2\% MnO$ a vodou z prvé vzniká. Obě popsal ETARD (Comptes rendus 56, 1399).

Neznáme zatím methody, kterou bychom látku naši vyčistili.

Podvojná sůl se síranem chromitým.

Výchozí směsí zde bylo:

$14{,}4\ g\ Fe_2(SO_4)_3$, $5g\ CrO_3$ a $100\ cc$ konc. kys. sírové*)

Směs skýtá varem 4hodinným jemně krystallinickou látku světle žlutozelenou, jež pod mikroskopem jeví se jako tabulky mnohohrané a jíž přimísena je zelená hmota beztvará, ve vodě rozpustná. Krystaly ani ve vodě, ani v kyselinách nejsou rozpustny; lze je od hmoty beztvaré studenou vodou odděliti. K účelům analytickým převáděli jsme ji tavením s ledkem a sodou na síran a chroman alkalický i kysličník železitý.

Analysou nalezeno:

	I.	II.	Theorie pro: $Cr_2(SO_4)_3 2Fe_2(SO_4)_3$
Cr_2O_3 . . .	13, 69%	13, 40%	12, 78%
Fe_2O_3 . . .	26, 90%	26, 74%	26, 74%
SO_3 . . .	—	60, 63%	60, 48%
		100, 77%	100, 00%

Tento nový síran $Cr_2(SO_4)_3 2Fe_2(SO_4)_3$ je neobyčejně stálou látkou pouze žíravé louhy a amoniak teprv za varu ji rozkládají.

Etard ve své, zde několikrát již citované studii připravil řadu podvojných síranů chromu i jiných elementů těžkých kovů a mezi nimi též kyselý síran železito-chromitý $Cr_2(SO_4)_3Fe_2(SO_4)_3 2H_2SO_4$ a normálný $Cr_2(SO_4)_3Fe_2(SO_4)_3$.

Konečně dlužno se nám zmíniti o tom, že všechny pokusy stejnou cestou připraviti sírany podvojné se síranem draselnatým, vápenatým, hořečnatým, kobaltnatým a ciničitým nesetkaly se s úspěchem žádným, u jiných (síranu antimonu, vizmutu a rtuti), podobně jak popsáno u manganu, vznikaly podvojné sole ve směsi s dotyčnými sírany, jež čisté nepodařilo se isolovati. Též z roztoku kysličníku arsenového v konc. kyselině sírové nekrystaluje síran podvojné soli, vzniklé krystaly jsou síran železitý prostý arsenu, oxydace síranu železnatého jest však přítomností kysličníku arsenového velmi zvolněna.

---

*) Vyjdeme-li od síranu železnatého a kysličníku chromového, látky dále popsané neobdržíme, nýbrž vznikne hmota úplně nekrystalinická.

Résumé.

V této práci studována oxydace síranu železnatého konc. kys. sírovou za vyšších teplot a zjištěno, že reakce nedá se jednoduchým kinetickým zákonem vyjádřiti.

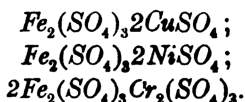
Vyšetřen vliv teploty na tuto reakci.

V síranu rtuťnatém nalezen katalysator mocně rychlost reakční zvyšující.

Výsledky měření vyjádřeny graficky.

Popsána výhodná příprava čistého bezvodého krystalovaného síranu železitého $Fe_2(SO_4)_3$ a ukázáno, že může sloužit jako základní látka k určování titru roztoku permanganatového.

Nalezeny tyto nové podvojné sole:



$$Fe_2(SO_4)_3 2CuSO_4;$$
$$Fe_2(SO_4)_3 2NiSO_4;$$
$$2Fe_2(SO_4)_3 Cr_2(SO_4)_3.$$

V Praze, v listopadu 1907.

Z analytické laboratoře c. k. české vys. školy technické v Praze.

XXVI.

Untersuchungen über die Bahn des zweiten Planeten der Jupitergruppe „(617) Patroclus".

Von **Vladimir Heinrich.**

Vorgelegt in der Sitzung am 6. Dezember 1907.

Im Anschluss an unseren vorläufigen Bericht wollen wir zuerst einige Details der ersten Bahnberechnung mitteilen. Die Konstruktion des bisher bekannten Bogens der Bahn ist durch sechs Beobachtungen begründet. Dieselben — von Fixsternaberration befreit und auf das mittlere Aequinoxe 1906,0 überführt — lauten:

Datum	Okt. 17.	Okt. 21.	Okt. 28.
Ort	Heidelberg *)	Rom	Wien
Ortszeit	$11^h\ 56^m\ 48^s$	$11^h\ 20^m\ 52^s$	$15^h\ 52^m\ 6^s$
Berl. „	$12^h\ 15^m\ 34^s$	$11^h\ 24^m\ 31^s$	$15^h\ 40^m\ 19^s$
Tag	17·510816	21·475363	28·653003

Datum	Nov. 9.	Nov. 15.	Dez. 7.
Ort	Heidelberg	Wien	Wien
Ortszeit	$8^h\ 26^m\ 54^s$	$12^h\ 50^m\ 42^s$	$10^h\ 0^m\ 40^s$
Berl. „	$8^h\ 45^m\ 40^s$	$12^h\ 38^m\ 55^s$	$9^h\ 48^m\ 53^s$
Tag	40·365051	46·527031	68·408951

*) Beide Heidelberger Beobachtungen sind vom Beobachter auf den Jahresanfang reduziert worden.

	Okt. 17.	Okt. 21.	Okt. 28.
α app.		2h 29m 27s 56	2h 24m 54s 15
red. 1906, 0		— 44″7	— 45″7
α 1906, 0	2h 31m 50s 35	37° 21′ 8″7	36° 12′ 46″5
δ app.		10° 50′ 58″5	10° 49′ 52″7
red. 1906,0		— 11″5	— 11″9
δ 1906, 0	10° 51′ 22″1	10° 50′ 47″0	10° 49′ 40″8

	Nov. 9.	Nov. 15.	Dez. 7.
α app.		2h 13m 42s 39	2h 3m 9s 25
red. 1906, 0		— 46″97	— 46″0
α 1906, 0	2h 17m 23s 43	33° 24′ 48″9	30° 46′ 32″7
δ app.		10° 49′ 41″4	11° 4′ 46″4
red. 1906, 0		— 12″6	— 12″8
δ 1906, 0	10° 48′ 45″3	10° 49′ 28″8	11° 4′ 33″6

Das ganze Zeitintervall beträgt also 51 Tage, was besonders zur Beurteilung der möglichen Sicherheit der Elemente dienen darf.

Wegen der kleinen Breiten wurde die Bahnbestimmung aus 4 Orten Okt. 21, 28, Nov. 15, Dez. 7 berechnet. Was die Methode betrifft, wurde diejenige von J. Bauschinger (Bahnbestimmung) angewandt.

Die Korrektionen bei der Einführung des locus fictus ergaben:

corr. der Breite	13″0	10″1	— 19″3	— 1′44″5
„ log R*)	147	154	160	252

Die Grundlagen der Rechnung waren also:

	λ	β	L	log R
Okt. 21·47536	38° 31′ 26″ 4	— 3° 41′ 55″ 4	27° 37′ 11″ 5	9·998002
28 65300	37° 27′ 19″ 9	(— 3° 21′ 31″ 5)	34° 46′ 35″ 8	9·997141
46·52703	34° 51′ 10″ 2	(— 2° 27′ 44″ 8)	52° 42′ 26″ 6	9·995275
61·40895	32° 29′ 53″ 7	— 1° 21′ 8″ 2	74° 49′ 51″ 0	9·993668

Bei der Bahnbestimmung zeigte sich

$l_1 - L_1$	8° 35′ 12″ 9
$l_3 - L_3$	— 34° 13′ 42″ 4
tg b_1	8_n 707777
tg b_3	8_n· 294850

*) In Einheiten der sechsten Dezimalstelle.

r_1	0·668685
r_2	0·672913
$u_2 - u_1$	4° 44′ 37″ 9
y_2	0·000459
p	0·705038

danach lauten nun die ersten Elemente*)

(617) Patroclus

Ep. 1906, Okt. 21·5, Mittl. Z. Berlin.

M	41° 31′ 54″ 6	
ω	297° 28′ 37″ 4	Aequinoxe 1906, 0
Ω	43° 21′ 38″ 8	Aequinoxe 1906, 0
i	22° 16′ 46″ 6	Aequinoxe 1906, 0
φ	8° 42′ 41″ 4	
μ	300·′ 145	
$\log a$	0·715117	

Die Darstellung der beiden mittleren Örter ergab (im Sinne $B-R$)

für	Okt. 28	Nov. 15
$d\lambda$	0″ 0	0″ 0
$d\beta$	(+ 1″ 4)	(— 4″ 0)

Aus diesem Vorzeichenwechsel kann man auf einen kleinen Beobachtungsfehler schliessen. Die Elemente ergaben vermittelst der heliocentrischen Aequatorealcoordinaten (Aequinoxe 1906, 0)

$$x = r\,[9{\cdot}9847642]\,\sin\,(v + 68^\circ\,37'\,32''\,97)$$
$$y = r\,[9{\cdot}8941516]\,\sin\,(v - 9^\circ\,2'\,11''\,03)$$
$$z = r\,[9{\cdot}8283212]\,\sin\,(v - 38^\circ\,35'\,11''\,39)$$

eine Ephemeride, deren Korrektionen sind:

			$d\alpha$	$d\delta$
Okt.	17	Heidelberg	— 3″ 1	+ 1″ 9
	21	Rom	+ 0″ 1	0″ 0
	28	Wien	— 0″ 9	+ 0″ 1
Nov.	9	Heidelberg	— 0″ 4	— 4″ 0
	15	Wien	+ 1″ 2	— 3″ 9
Dez.	7	Wien	— 0″ 7	— 0″ 1
also durchschnittlich			— 0″ 6	— 1″ 0

Darnach konnte eine neue Reduktion sämtlicher Beobachtungen namentlich wegen Aberration und Parallaxe unternommen werden. Sie wird im Folgenden zusammengestellt:

*) Vgl. „Vorläufiger Bericht."

Datum	17. Okt.	21. Okt.	28. Okt.
Berl. Zeit für Aberr. korrigiert	17·489505	21·454107	28·631774
α app.	*)	$2^h\,29^m\,27^s\,57$	$2^h\,24^m\,54^s\,13$
Parallaxe	— 0″36	— $0^s\,04$	+ $0^s\,09$
α geoc.		$2^h\,29^m\,27^s\,53$	$2^h\,24^m\,54^s\,22$
red. 1906, 0	18″95	— 25″23	— 25″97
mittl. α	37° 57′ 53″8	37° 21′ 27″7	36° 13′ 7″4
δ app.		10° 50′ 58″53	10° 49′ 52″71
Parallaxe	1″48	+ 1″24	+ 1″59
δ geoc.		10° 50′ 59″77	10° 49′ 54″30
red. 1906, 0	6″56	— 4″85	— 5″26
mittl. δ	10° 51′ 30″1	10° 50′ 54″9	10° 49′ 49″0
λ	39° 5′ 59″5	38° 31′ 46″7	37° 27′ 42″0
β**)	— 3° 52′ 38″5	— 3° 41′ 54″0	— 3° 21′ 30″2
Datum	Nov. 9.	Nov. 15.	Dez. 7.
Berl. Zeit für Aberr. korrigiert	40·343669	46·505468	68·386251
α app.	*)	$2^h\,13^m\,42^s\,39$	$2^h\,3^m\,9^s\,25$
Parallaxe	— 1″00	+ $0^s\,06$	$0^s\,03$
α geoc.		$2^h\,13^m\,42^s\,45$	$2^h\,3^m\,9^s\,28$
red. 1906, 0	19″33	— 28″15	— 31″46
mittl. α	34° 21′ 9″8	33° 25′ 8″7	30° 46″ 47″7
δ app.		10° 49′ 41″33	11° 4′ 46″49
Parallaxe	1″06	1″47	1″35
δ geoc.		10° 49′ 42″80	11° 4′ 47″84
red. 1906, 0	6″44	— 6″40	— 7″99
mittl. δ	10° 48′ 52″8	10° 49′ 36″4	11° 4′ 39″8
λ	35° 43′ 15″7	34° 51′ 31″ 0	32° 30′ 9″8
β**)	— 2° 46′ 36″9	— 2° 27′ 44″ 3	— 1° 21′ 7″6

*) α, δ 1906, 0 gegeben + Parallaxe + Fixsternaberration.

**) korr. wegen Elimination der Sonnenbreiten.

Nachdem also die Korrektionen der Aberrationszeiten und der Gang der Ephemeinde bekannt geworden sind, konnte eine neue definitive Bahnbestimmung aus der ganzen Opposition 1906 vorgenommen werden. Dazu wurde eine zweite Bahn durch dieselben vier Positionen hindurchgelegt und dieselbe nach der Methode der kleinsten Quadrate durch Variation der geocentrischen Distanzen definitiv verbessert.

Die Grundlagen der Rechnung waren diesmal:

	λ	β
Okt. 21·454107	38° 31′ 46″ 7	— 3° 41′ 54″ 0
28·631774	37° 27′ 42″ 0	(— 3° 21′ 30″ 2)
46·505468	34° 51′ 31″ 1	(— 2° 27′ 44″ 3)
68·386251	32° 30′ 9″ 8	— 1° 21′ 7″ 6

$(d\beta)$	L	$\log R$
— 0″ 11	27° 35′ 43″ 37	9·9978579
+ 0″.10	34° 45′ 9″ 34	9·9969904
— 0″ 21	52° 41′ 27″ 69	9 9951168
— 0″ 20	74° 50′ 12″ 45	9·9934177

Es zeigte sich dabei

$x =$	7·0834312	$\xi =$	7·699461
$\log \varrho_1$	0·5666919	$\log r_1$	0·6689804
$\log \varrho_3$	0·5953290	$\log r_3$	0·6733280

dann wurden folgende drei Elementen-Systeme bestimmt:

		Okt. 21	Dez. 7
$\log \varrho$	I.	0·5666919	0·5953290
	II.	0·5656919	0·5953290
	III.	0·5666919	0·5943290

	I.	II.	III.
$l_1 - L_1$	8° 36′ 47″ 83	8° 36′ 32″ 63	8° 36′ 47″ 83
$l_3 - L_3$	— 34° 14′ 31″ 99	— 34° 14′ 31″ 99	— 34° 13′ 36″ 11
$\operatorname{tg} b_1$	8_n 7078569	8_n 7076456	8_n 7078569
$\operatorname{tg} b_3$	8_n 2949312	8_n 2949312	8_n 2947583
r_1	0·6689804	0·6681910	0·6689804
r_3	0·6733280	0·6733280	0·6725009
$u_3 - u_1$	4° 44′ 7″ 11	4° 44′ 19″ 24	4° 44′ 59″ 42
y_2	0·0004575	0·0004588	0·0004589
p	0·7048904	0·7039308	0·7058942

Ep. 1906, Okt. 21·454107, Aequinoxe 1906, 0

M	42° 15′ 27″ 44	44° 12′ 43″ 98	38° 7′ 49″ 03
ω	— 63° 38′ 52″ 40	— 68° 7′ 10″ 11	— 56° 50′ 50″ 93
Ω	43° 20′ 49″ 74	43° 21′ 7″ 07	43° 22′ 14″ 01
i	22° 19′ 33″ 32	22° 17′ 26″ 93	22° 15′ 37″ 57
φ	8° 51′ 11″ 27	10° 0′ 2″ 41	7° 47′ 22″ 72
μ	299″ 9545	297″ 9628	301″ 3610
log a	0·7153008	0 7172296	0·7139464

wobei das erste System zur Beurteilung der Sicherheit unserer Voraussetzungen im Sinne $B-R$ ergibt:

	Okt. 28	Nov. 15
$d\lambda$	0″ 0	0″ 0
$d\beta$	+ 0″9	— 5″ 0

Zur Bahnverbesserung sind folgende 5 Beobachtungen auserwählt worden

		λ^{I}	β^{I}	λ^{II}
Rom	Okt. 21			
Wien	„ 28	37° 27′ 41″ 94	— 3° 21′ 31″ 13	37° 27′ 34″ 44
Heidelberg	Nov. 9	35° 43′ 16″ 31	— 2° 46′ 32″ 90	35° 43′ 2″ 52
Wien	„ 15	34° 51′ 31″ 02	— 2° 27′ 39″ 21	34° 51′ 17″ 6
Wien	Dez. 7			

		β^{II}	λ^{III}	β^{III}
Rom	Okt. 21			
Wien	„ 28	— 3° 21′ 28″ 93	37° 27′ 48″ 70	— 3° 21′ 34″ 02
Heidelberg	Nov. 9	— 2° 46′ 28″ 33	35° 43′ 27″ 75	— 2° 46′ 37″ 92
Wien	„ 15	— 2° 27′ 34″ 49	34° 51′ 42″ 08	— 2° 27′ 44″ 35
Wien	Dez. 7			

oder nach der leicht begreiflichen Bedingung

$$(\lambda_2^{II} - \lambda_2^{I})\, x_1 + (\lambda_2^{III} - \lambda_2^{I})\, x_2 = \lambda_2 - \lambda_2^{I}$$
$$(\beta_2^{II} - \beta_2^{I})\, x_1 + (\beta_2^{III} - \beta_2^{I})\, x_2 = \beta_2 - \beta_2^{I}$$

daraus fliesst:

$-\ 7''50\,x_1 + \ 6''76\,x_3 = 0$	Gewicht	1
$+\ 2''20\,x_1 - \ 2''89\,x_3 = 0''82$	„	1
$-13''79\,x_1 + 11''44\,x_3 = -1''13$	„	1
$+\ 4''57\,x_1 - \ 5''02\,x_3 = -5''01$	„	1
$-13''96\,x_1 + 11''06\,x_3 = 0$	„	4
$+\ 4''72\,x_1 - \ 5''15\,x_3 = -4''89$	„	4

$0_n\,87506\ x_1$	$+0{\cdot}82995\,x_3$	$= -\infty$
$0{\cdot}34242$	$0_n\,46090$	$= 9{\cdot}91381$
$1_n\,13956$	$1{\cdot}05843$	$= 0_n\,05308$
$0{\cdot}65992$	$0_n\,70070$	$= 0_n\,69984$
$1_n\,44591$	$1{\cdot}34478$	$= -\infty$
$0{\cdot}97497$	$1_n\,01284$	$= 0_n\,99034$

$0_n\,26863\ x_1$	$+\ 0{\cdot}30561\,x_3$	$= 0$
$0{\cdot}07880$	$+0_n\,13065$	$= 0{\cdot}08384$
$0_n\,49391$	$0{\cdot}51719$	$= 0_n\,11554$
$0{\cdot}16369$	$0_n\,22694$	$= 0_n{\cdot}51227$
1_n	$1{\cdot}$	$= 0$
$0{\cdot}33811$	$0_n\,46565$	$= 1_n$

Es lauten also die Normalgleichungen:

$$+1{\cdot}4634\,x_1 - 1{\cdot}5424\,x_3 = -0{\cdot}3582$$
$$-1{\cdot}5424 \qquad +1{\cdot}6463 \qquad = +0{\cdot}5111$$
$$-0{\cdot}0790 \qquad +0{\cdot}1039 \qquad = +0{\cdot}1529$$

woraus resultiert:

$$x_1 = 0{\cdot}81860 + 9{\cdot}54443 = 0{\cdot}36303 \ \text{num.}\ 2{\cdot}3069$$
$$x_3 = 0{\cdot}81161 + 9{\cdot}64556 = 0{\cdot}45717 \ \text{num.}\ 2{\cdot}8653$$

letztere Numeri in Einheiten der dritten Dezimalstelle.

Durch Einsetzung:

			$B-R$	$p\delta^2$
$1_n23809x_1$	$+1{\cdot}28712x_3$	$=0$	$-2''07$	$4''28$
$0{\cdot}70545$	0_n91807	$=+0''82$	$+4''02$	$16''16$
1_n50259	$1{\cdot}51560$	$=-1''13$	$-2''13$ *)	$4''53$
$1{\cdot}02295$	1_n15787	$=-5''01$	$-1''17$ *)	$1''37$
1_n50791	$1{\cdot}50092$	$=0''$	$+0''51$	$1''04$
$1{\cdot}03697$	1_n16898	$=-4''89$	$-1''02$	$4''16$
				$31''54$

Für jede einzelne Beobachtung vom Gewichte 1 ergibt sich der mittlere Fehler

$$\mu = \sqrt{\frac{(p\delta\delta)}{6-2}} = \pm 2{\cdot}81.$$

Die Summe der Fehlerquadrate ist dabei vom Betrage 1·2829 auf 0·3299 gesunken. Aus der Aenderung der Elemente I, II, III bei verhältnissmässig kleinen Differenzen $\lambda_2^{II} - \lambda_2^{I}$ etc. erkennt man leicht, wie sich etwaige Beobachtungsfehler besonders in den Elementen M, ω, φ schädlich offenbaren können.

Mit unseren warscheinlichsten geocentrischen Distanzen konnte nun folgendes definitive Elementensystem bestimmt werden.

$$\begin{array}{rr} & 0{\cdot}5666919 \\ \varrho_1 - & 23069 \\ \hline & 0{\cdot}5643850 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 0{\cdot}5953290 \\ \varrho_3 - & 28653 \\ \hline & 0{\cdot}5924637 \end{array}$$

Ep. und Osk. 1906 Nov. 9,0.

M	$39^\circ\,47'\,16''8$	
ω	$302^\circ\,11'\,26''7$	Aequinoxe 1906,0
Ω	$43^\circ\,25'\,31''6$	Aequinoxe 1906,0
i	$22^\circ\,\;3'\,32''6$	Aequinoxe 1906,0
φ	$8^\circ\,16'\,\;7''2$	
μ	$300''659$	
$\log a$	$0{\cdot}714621$	

*) Es wurde eine etwas fälschliche Ausmessung dazu benützt.

Mit dem definitiven Elementensysteme wurden nun folgende Korrektionen in Ekliptikalcoordinaten im Sinne $(B - R)$ direkt gefunden.

		λ	β	$d\lambda$	$d\beta$ (cos β)
Okt.	17	39° 6′ 0″3	− 3° 52′ 39″9	+ 0″8	+ 1″4
	21	38° 31′ 46″7	− 3° 41′ 54″0	0″0	0″0
	28	37° 27′ 43″9	− 3° 21′ 33″5	− 1″9	+ 3″3
Now.	9	35° 43′ 17″3	− 2° 46′ 36″7	− 1″6	− 0″2*)
	15	34° 51′ 30″5	− 2° 27′ 43″0	+ 0″5	− 1″3
Dez.	7	32° 30′ 9″8	− 1° 21′ 7″6	+ 0″0	+ 0″0

Das Bild derselben im Systeme des Aequators gestaltet sich wie folgt.

		$d\alpha$	$d\delta$
Okt.	17	− 1″1	+ 1″1
	21	0″0	0″0
	28	− 2″8	+ 2″4
Now.	9	− 1″5	− 1″0
	15	+ 1″0	− 1″0
Dez.	7	0″0	+ 0″1
Im Durchschnitt		− 0″7	+ 0″3

Letztere Daten sind folgender Ephemeride entnommen worden

Heliocentrische Aequatorealcoordinaten:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,[9{\cdot}9850225]\sin(v + 73^\circ\,26'\,53''82) \\ y &= r\,[9{\cdot}8950560]\sin(v - 4^\circ\,23'\,28''94) \\ z &= r\,[9{\cdot}8265560]\sin(v - 33^\circ\,44'\,19''04) \end{aligned}\right\}\ \text{Aequinoxe 1906, 0.}$$

*) Nach der besseren Ausmessung I.

Ephemeride für 12h mittl. Z. Berlin.

Datum		α''	I. dif.	δ''	I. dif.	log ϱ	Aberr.-Zeit
Oktober	16	38° 6′ 48″ 3	— 8′ 59″ 0	10° 51′ 36″ 0	— 7″ 2	0·56680	30m 34s
	17	37° 57′ 49″ 3	— 9′ 4″ 5	10° 51′ 28″ 9	— 7″ 8	0·56555	30 33
	18	37° 48′ 44″ 7	— 9′ 9″ 7	10° 51′ 21″ 0	— 8″ 4	0·56520	30 32
	19	37° 39′ 35″ 0	— 9′ 14″ 4	10° 51′ 12″ 6	— 8″ 9	0·56480	30 30
	20	37° 30′ 20″ 6	— 9′ 18″ 7	10° 51′ 3″ 7	— 9″ 2	0·56461	30 29
	21	37° 21′ 2″ 0	— 9′ 22″ 5	10° 50′ 54″ 5	— 9″ 5	0·56437	30 28
	22	37° 11′ 39″ 5	— 9′ 26″ 0	10° 50′ 45″ 0	— 9″ 7	0·56417	30 27
	23	37° 2′ 13″ 5	— 9′ 29″ 0	10° 50′ 35″ 3	— 9″ 7	0·56401	30 26
	24	36° 52′ 44″ 4	— 9′ 31″ 6	10° 50′ 25″ 6	— 9″ 7	0·56388	30 26
	25	36° 43′ 12″ 8	— 9′ 33″ 8	10° 50′ 15″ 8	— 9″ 6	0·56378	30 25
	26	36° 33′ 39″ 0	— 9′ 35″ 6	10° 50′ 6″ 2	— 9″ 4	0·56372	30 25
	27	36° 24′ 3″ 4	— 9′ 37″ 0	10° 49′ 56″ 8	— 9″ 1	0·56370	30 25
	28	36° 14′ 26″ 4	— 9′ 38″ 0	10° 49′ 47″ 7	— 8″ 7	5 56371	30 26
	29	36° 4′ 48″ 4	— 9′ 38″ 5	10° 49′ 39″ 0	— 8″ 3	0·56377	30 26
o—o	30	35° 55′ 9″ 9	— 9′ 38″ 7	10° 49′ 30″ 7	— 7″ 7	0·56386	30 26
	31	35° 45′ 31″ 2	— 9′ 38″ 4	10° 49′ 23″ 0	— 7″ 0	0·56399	30 27
November	1	35° 35′ 52″ 8	— 9′ 37″ 7	10° 49′ 16″ 0	— 6″ 3	0·56406	30 27
	2	35° 26′ 15″ 1	— 9′ 36″ 7	10° 49′ 9″ 7	— 5″ 5	0·56436	30 28
	3	35° 16′ 38″ 4	— 9′ 35″ 2	10° 49′ 4″ 2	— 4″ 5	0·56460	30 30
	4	35° 7′ 3″ 2	— 9′ 33″ 3	10° 48′ 59″ 7	— 3″ 5	0·56488	30 30
	5	34° 57′ 29″ 9	— 9′ 31″ 0	10° 48′ 56″ 2	— 2″ 4	0·56521	30 32
	6	34° 47′ 58″ 9	— 9′ 28″ 3	10° 48′ 53″ 8	— 1″ 2	0·56554	30 33
	7	34° 38′ 30″ 6	— 9′ 25″ 2	10° 48′ 52″ 5	+ 0″ 1	0·56592	30 35
	8	34° 29′ 5″ 5	— 9′ 21″ 6	10° 48′ 52″ 6	+ 1″ 5	0·56634	30 36
	9	34° 19′ 43″ 8	— 9′ 17″ 7	10° 48′ 54″ 1	+ 3″ 0	0·56680	30 38
	10	34° 10′ 26″ 1	— 9′ 13″ 5	10° 48′ 57″ 1	+ 4″ 5	0·56729	30 41
	11	[illegible]		[illegible]		[illegible]	30 42

	12	33° 52' 4" 0	— 9' 8" 6	10° 49' 7" 8	+ 6" 2	0·56838	30 45
	13	33° 43' 0" 5	— 9' 3" 5	10° 49' 15" 7	+ 8" 0	0·56898	30 48
	14	33° 34' 2" 6	— 8' 57" 9	10° 49' 25" 6	+ 9" 8	0·56962	30 48
	15	33° 25' 10" 5	— 8' 52" 0	10° 49' 37" 3	+ 11" 8	0·57028	30 53
	16	33° 16' 24" 9	— 8' 45" 7	10° 49' 51" 1	+ 13" 8	0·57099	30 56
	17	33° 7' 45" 9	— 8' 39" 0	10° 50' 7" 1	+ 15" 9	0·57173	30 59
	18	32° 59' 14" 0	— 8' 31" 9	10° 50' 25" 3	18" 2	0·57250	31 3
	19	32° 50' 49" 6	— 8' 24" 4	10° 50' 45" 8	20" 5	0·57330	31 6
	20	32° 42' 33" 0	— 8' 16" 6	10° 51' 8" 7	22" 9	0·57412	31 10
	21	32° 34' 24" 5	— 8' 8" 4	10° 51' 34" 0	25" 4	0·57499	31 14
	22	32° 26" 24" 5	— 8' 0" 0	10° 52' 2" 0	28" 0	0·57590	31 17
	23	32° 18" 33" 2	— 7' 51" 3	10° 52' 32" 6	30" 6	0·57683	31 21
	24	32° 10" 50" 8	— 7' 42" 3	10° 53' 5" 8	33" 2	0·57708	31 26
	25	32° 3" 17" 8	— 7' 33" 0	10° 53' 41" 8	36" 0	0·57876	31 30
	26	31° 55" 54" 4	— 7' 23" 5	10° 54' 20" 6	38" 8	0·57977	31 34
	27	31° 48" 40" 7	— 7' 13" 6	10° 55' 2" 3	41" 7	0·58081	31 39
	28	31° 41" 37" 1	— 7' 3" 6	10° 55' 46" 9	44" 6	0·58188	31 43
	29	31° 34" 43" 8	— 6' 53" 3	10° 56' 34" 6	47" 6	0·58298	31 48
	30	31° 28" 0" 9	— 6' 42" 9	10° 57' 25" 2	50" 6	0·58410	31 53
Dezember	1	31° 21" 28" 8	— 6' 32" 1	10° 58' 18" 9	53" 7	0·58525	31 58
	2	31° 15" 7" 5	— 6' 21" 2	10° 59' 15" 7	56" 8	0·58642	32 4
	3	31° 8" 57" 4	— 6' 10" 1	11° 0' 15" 7	1' 0" 0	0·58761	32 9
	4	31° 2" 58" 5	— 5' 58" 8	11° 1' 19" 0	1' 3" 2	0·58882	32 14
	5	30° 57" 11" 1	— 5' 47" 4	11° 2' 25" 5	1' 6" 5	0·59006	32 20
	6	30° 51" 35" 4	— 5' 35" 7	11° 3' 25" 3	1' 9" 8	0·59132	32 25
	7	30° 46" 11" 5	— 5' 23" 9	11° 4' 48" 4	1' 13" 1	0·59260	32 31
	8	30° 40" 59" 6	— 5' 11" 9	11° 6' 4" 9	1' 16" 5	0·59391	32 37

Opposition 30. Okt. Grösse 13^m (Millosewich).

Da es, wegen der beabsichtigten Vorausberechnung der Opposition 1907, nötig erschienen ist sich ein Bild der Elementen-Störungen zu verschaffen, wurden unsere Elemente auf das mittlere Aequinoxe 1910 übertragen. Die Correctionen waren

$$\Delta\Omega + 3' \, 17''5$$
$$\Delta i + 1''2$$
$$\Delta\omega + 3''8$$

sodass jetzt unser System lautet:

(617) Patroclus

Ep. et Osk. 1906 Nov. 9,0

M	39° 47′ 16″8	
ω	302° 11′ 30″5	Aequinoxe 1910, 0
Ω	43° 28′ 49″1	Aequinoxe 1910, 0
i	22° 3′ 33″8	Aequinoxe 1910, 0
φ	8° 16′ 7″2	
μ	300″659	
$\log a$	0·714621	

Bei der Berechnung der speziellen Störungen ist ein Intervall von 40 Tagen gewählt worden, als störende Planeten sind Jupiter und Saturn berücksichtigt worden.

Ueber die Masse der störenden Planeten wurden folgende Annahmen gemacht.

$$♃ = \frac{1}{1047·355} \qquad ♄ = \frac{1}{3501·6}$$

(Newcomb.) (Bessel.)

Es fanden sich nun folgende Differentialquotienten der Störungen, welche der Variation der Constanten zugrunde liegen.

Jupiter ♃ und Saturn ♄.

Datum			$40\frac{di}{dt}$	$40\frac{d\Omega}{dt}$	$40\frac{d\varphi}{dt}$	$40\frac{d\pi}{dt}$	$1600\frac{d\mu}{dt}$	$40\frac{d\bar{L}}{dt}$
1906	Sept.	10	— 1″ 044	+ 0″ 595	— 3″ 740	+ 95″ 651	— 0″ 4829	+ 23″ 679
	Okt.	20	— 1″ 263	+ 0″ 469	— 4″ 454	96″ 693	— 0″ 5103	24″ 082
	Nov.	29	— 1″ 465	+ 0″ 262	— 5″ 237	96″ 936	— 0″ 5295	24″ 448
1907	Jan.	8	— 1″ 642	— 0″ 013	— 6″ 070	96″ 317	— 0″ 5403	24″ 768
	Febr.	17	— 1″ 789	— 0″ 344	— 6″ 932	94″ 818	— 0″ 5438	25″ 055
	März	29	— 1″ 905	— 0″ 715	— 7″ 802	92″ 456	— 0″ 5409	25″ 306
	Mai	8	— 1″ 986	— 1″ 110	— 8″ 660	89″ 271	— 0″ 5324	25″ 522
	Juni	17	— 2″ 031	— 1″ 513	— 9″ 488	85″ 321	— 0″ 5195	25″ 710
	Juli	27	— 2″ 042	— 1″ 908	— 10″ 270	80″ 693	— 0″ 5032	25″ 869
	Sept.	5	— 2″ 022	— 2″ 284	— 10″ 994	75″ 474	— 0″ 4843	26″ 001
	Okt.	15	— 1″ 974	— 2″ 628	— 11″ 651	69″ 760	— 0″ 4638	26″ 110
	Nov.	24	— 1″ 902	— 2″ 933	— 12″ 234	63″ 651	— 0″ 4423	26″ 201
	Dez.	34	— 1″ 810	— 3″ 193	— 12″ 739	57″ 238	— 0″ 4205	26″ 275
$^{1}f(a-\frac{\omega}{2})$			+ 0″ 008	+ 0″ 009	+ 0″ 033	— 0″ 009	+ 0″ 0008	— 0″ 015
$^{2}f(a)$							— 0″ 0212	

Für dieselben Intervalle ergeben sich daraus folgende Störungsbeträge einzelner Constanten.

Datum			Δi	$\Delta\Omega$	$\Delta\varphi$	$\Delta\pi$	$\Delta\mu$	$\Delta\bar{L}$	$\int\int$
1906	Sept.	10	+ 2″	— 0″ 7	+ 6″	— 2′ 25″	+ 0″ 02	— 36″	— 1″
	Okt.	20	+ 1″	0	+ 2″	— 48″	0″ 00	— 12″	0
	Nov.	29	— 1″	0	— 2″	+ 48″	0″ 00	+ 12″	0
1907	Jan.	8	— 2″	0	— 8″	2′ 25″	— 0″ 02	+ 37″	— 1″
	Febr.	17	— 4″	0	— 15″	+ 4′ 1″	— 0″ 03	62″	— 2″
	März	29	— 6″	0	— 22″	+ 5′ 34″	— 0″ 05	1′ 27″	— 3″
	Mai	8	— 8″	— 1″	— 30″	+ 7′ 5″	— 0″ 06	1′ 52″	— 5″
	Juni	17	— 10″	— 3″	— 39″	+ 8′ 33″	— 0″ 07	2′ 18″	— 8″
	Juli	27	— 12″	— 4″	— 49″	+ 9′ 56″	— 0″ 09	2′ 44″	— 11″
	Sept.	5	— 14″	— 6″	— 1′ 0″	+ 11′ 14″	— 0″ 10	3′ 10″	— 15″
	Okt.	15	— 16″	— 9″	— 1′ 11″	+ 12′ 27″	— 0″ 11	3′ 36″	— 19″
	Nov.	24	— 18″	— 12″	— 1′ 21″	+ 13′ 33″	— 0″ 12	4′ 2″	— 24″
	Dez.	34	— 20″	— 15″	— 1′ 36″	+ 14′ 34″	— 0″ 13	4′ 28″	— 29″

$$\Omega_1 = \Omega_0 + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\Omega}{dt}\,dt$$

$$L_1 = L_0 + \mu(t_1 - t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\bar{L}_0}{dt} + \int\int_{t_0}^{t_1} \frac{d\mu}{dt}\,dt$$

$$\Omega_1 - \Omega_0 = \Delta\Omega$$

Durch Integration von der Anfangs-Epoche Nov. 9. 0 1906 bis zur Epoche Dezember 14,0 1907 hat sich gezeigt:

Δi	— 18″74
$\Delta \Omega$	— 13″19
$\Delta \varphi$	— 1′ 29″33
$\Delta \pi$	+ 14′ 4″42
$\Delta \omega$	+ 14′ 17″61
$\Delta \bar{L}$	+ 3′ 74″97
$\int\int$	— 26″37
ΔL	+ 3′ 48″60
$\Delta \mu$	— 0·1275,

woraus für die neue Opposition 1907 gefunden erscheint:

Patroclus (617)

Ep. et Osk. 1907 Dez. 14,0 M. Z. Berlin

M	73° 1′ 24″7	
ω	302° 25′ 48″2	Aequinoxe 1910, 0
Ω	43° 28′ 35″9	Aequinoxe 1910, 0
i	22° 3′ 15″1	Aequinoxe 1910, 0
φ	8° 14′ 37″9	
μ	300″532	
$\log a$	0·714644.	

Für die Aufsuchungsephemeride findet man also leicht die nötigen Konstanten

$$\left.\begin{aligned} x &= [9\cdot984999]\, r \sin (v + 73^\circ 44' 21'' 8) \\ y &= [9\cdot895168]\, r \sin (v + 355^\circ 54' 3'' 9) \\ z &= [9\cdot826449]\, r \sin (v + 326^\circ 31' 50'' 2) \end{aligned}\right\} \text{Aequinoxe 1910, 0}$$

Wenn man die gegenseitige Lage von ♃ ☉ (617) prüft, so findet man:

Am 21·5 Okt. 1906.	$l_{(617)} = 36^\circ 12'$	$l_{♃} = 90^\circ 16'$	$L_4 = 30^\circ 16'$
30·5 Dez. 1907.	$= 74^\circ 43'$	$= 126^\circ 14'$	$= 66^\circ 14'$

Die Elongation unseres Planeten vom Librationscentrum L_4 beträgt etwa 5°56′ — 8°23′, wenn man die nicht unbedeutende Neigung und Excentricität vernachlässigt. Er entspricht also der periodischen Lösung des Dreikörperproblems ♃ ☉ (617), welche mit dem bekannten Lagrangeschen Dreieck im engen Zusammenhange steht.

Unsere Störungsbeträge zeigen, dass die Jupiterstörungen sehr klein sind, wie es auch die Theorie erfordert.

Jedenfalls kann man behaupten, dass Patroclus — da Störungen seitens anderer Körper des Sonnensystems wegen der grossen Entfernungen nicht gross sind — sich lange Zeit in der Nähe des Librationscentrums L_4 bewegen kann.

Die Ephemeride wurde zuerst in den Astr. Nachr. Band 176 publiziert. Eine schriftliche Mitteilung meinerseits an Herrn Prof. Dr. Max. F. J. Cornelius Wolf, Director des astrophysikalischen Observatoriums zu Heidelberg, hat zur neuen Aufsuchung unseres Planeten gedient, wobei sich folgende Ephemeridenkorrektionen herausgaben: $(B-R)$

$$-34^s, \quad -0'8; \quad \text{für Nov. } 8.10.$$

welche — wie mir scheint — durch die Kürze des bisher untersuchten Bahnbogens sich völlig erklären lassen. Die Korrektionen unserer Elemente sollen auf Grund neuer, längere Zeit dauernden Beobachtungen einer demnächst erscheinenden Abhandlung vorbehalten werden.

Mit Herrn Prof. Charlier richte ich hiemit an die Planetenbeobachter die Bitte, „ihre Aufmerksamkeit ganz besonders diesem interessanten Planetoid zuzuwenden, damit die Integrationskonstanten seiner Bahn mit möglichst grosser Schärfe bestimmt werden könnten".

Ephemeride für 12^h mittl. Z. Berlin.

Datum	α^s	I. dif.	δ''	I. dif.	log ϱ	Aberr.-Zeit
Nov. 8	4^h 54^m 0^s 88	— 33·93	35° 13′ 54″ 5	2′ 42″ 4	0·620399	34^m 40^s
9	4 53 26 95	— 34 63	35° 16′ 37″ 1	2′ 38″ 8	0·619735	34 37
10	4 52 52 32	— 35 31	35° 19′ 15″ 8	2′ 34″ 9	0·619084	34 34
11	4 52 17 01	— 35 97	35° 21′ 50″ 7	2′ 30″ 9	0·618466	34 31
12	4 51 41 04	— 36 61	35° 24′ 21″ 7	2′ 27″ 0	0·617876	34 28
13	4 51 4 43	— 37 22	35° 26′ 48″ 6	2′ 22″ 9	0·617314	34 25
14	4 50 27 21	— 37 80	35° 29′ 11″ 5	2′ 18″ 7	0·616781	34 23
15	4 49 49 41	— 38 36	35° 31′ 30″ 3	2′ 14″ 5	0·616274	34 20
16	4 49 11 05	— 38 91	35° 33′ 44″ 8	2′ 10″ 2	0·615799	34 18
17	4 48 32 14	— 39 40	35° 35′ 55″ 0	2′ 5″ 9	0·615353	34 16
18	4 48 52 74	— 39 89	35° 38′ 0″ 9	2′ 1″ 5	0·614937	34 14
19	4 47 12 85	— 40 34	35° 40′ 2″ 5	1′ 57″ 1	0·614551	34 12
20	4 46 32 51	— 40 77	35° 41′ 59″ 5	1′ 52″ 6	0·614194	34 10
21	4 45 51 74	— 41 16	35° 43′ 52″ 1	1′ 48″ 1	0·613869	34 9
22	4 45 10 58	— 41 53	35° 45′ 40″ 2	1′ 43″ 5	0·613575	34 7
23	4 44 29 05	— 41 87	35° 47′ 23″ 7	1′ 38″ 8	0·613311	34 6
24	4 43 47 18	— 42 17	35° 49′ 2″ 5	1′ 34″ 2	0·613080	34 5
25	4 43 5 01	— 42 45	35° 50′ 36″ 7	1′ 29″ 5	0·612881	34 4
26	4 42 22 56	— 42 71	35° 52′ 6″ 2	1′ 24″ 8	0·612714	34 3
27	4 41 39 85	— 42 91	35° 53′ 31″ 0	1′ 20″ 1	0·612879	34 2
28	4 40 56 94	— 43 09	35° 54′ 51″ 1	1′ 15″ 4	0·612475	34 2
29	4 40 13 85	— 43 24	35° 56′ 6″ 5	1′ 10″ 6	0·612406	34 2
30	4 39 30 61	— 43 34	35° 57′ 17″ 1	1′ 5″ 9	0·612368	34 1
Dez. 1	4 38 47 27		35° 58′ 23″ 0		0·612364	34 2

Datum		α_0	I. dif.	δ_0	I. dif.	log ϱ	Aberr.-Zeit.
Dez.	1	4ʰ 38ᵐ 47ˢ 27	— 43 44	35° 58′ 23″ 0	1′ 1″ 1	0 612364	34ᵐ 2ˢ
	2	4 38 38 3	— 43 47	35° 59′ 24″ 1	0′ 56″ 4	0·612392	34 2
☍	3	4 37 20 36	— 43 48	36° 0′ 20″ 5	0′ 51″ 7	0·612454	34 2
	4	4 36 36 88	— 43 46	36° 1′ 12″ 2	0′ 47″ 0	0·612549	34 2
	5	4 35 53 42	— 43 39	36° 1′ 59″ 2	0′ 42″ 4	0·612676	34 3
	6	4 35 10 03	— 43 30	36° 2′ 41″ 6	0′ 37″ 8	0·612838	34 3
	7	4 34 26 73	— 43 16	36° 3′ 19″ 3	0′ 33″ 2	0·613033	34 4
	8	4 33 43 57	— 42 99	36° 3′ 52″ 6	0′ 28″ 8	0·613260	34 5
	9	4 33 0 58	— 42 80	36° 4′ 21″ 4	0′ 24″ 4	0·613520	34 6
	10	4 32 17 78	— 42 55	36° 4′ 45″ 8	0′ 20″ 1	0·613812	34 7
	11	4 31 35 23	— 42 29	36° 5′ 5″ 9	15″ 8	0·614147	34 9
	12	4 30 52 94	— 42 01	36° 5′ 21″ 7	11″ 6	0·614494	34 10
	13	4 30 10 93	— 41 66	36° 5′ 33″ 3	7″ 5	0·614883	34 12
	14	4 29 29 27	— 41 31	36° 5′ 40″ 9	3″ 5	0·615305	34 14
	15	4 28 47 96	— 40 92	36° 5′ 44″ 3	— 0″ 4	0·615758	34 16
	16	4 28 7 04	— 40 50	36° 5′ 43″ 9	— 4″ 4	0·616242	34 18
	17	4 27 26 54	— 40 05	36° 5′ 39″ 6	— 8″ 1	0·617757	34 20
	18	4 26 46 49	— 39 58	36° 5′ 31″ 5	— 11″ 7	0 617302	34 23
	19	4 26 6 91	— 38 08	36° 5′ 19″ 7	— 15″ 3	0·618877	34 25
	20	4 25 27 83	— 38 54	36° 5′ 4″ 4	— 18″ 7	0·619483	34 28
	21	4 24 49 29	— 37 99	36° 4′ 45″ 7	— 22″ 1	0·619118	34 31
	22	4 24 11 30		36° 4′ 23″ 5		0·619783	34 34
	26	4 21 45 36		36° 2′ 23″ 6		0 622726	34 51
	30	4 19 30 30		35° 59′ 39″ 1		0·626105	35 7

Opposition Dez. 3. Grösse 12ᵐ 5 (Wolf).

SEZNAM ODBOROVÝ. | FACHREGISTER.

1. Mathematatik, Fysik, Astronomie und Meteorologie.

2. Chemie.

3. Mineralogie.

Barvíř H., Über einige Verbindungsglieder der geraden Elementen-Reihen. 4 S. I.

—, Notizen über den südlichen Teil des Kuttenberger Bergbaubezirkes. 17 S. 1 Skizze. V.

4. Botanik.

Peklo Jar., Histochemisches über die Lokalisation der Saccharose in der Zuckerrübe. 28 S., 1 Taf. XXII.

Straňák Fr., Studie o temnostní flóře jeskyň sloupských. 41 str., 10 obr. v textu. XII.

5. Zoologie.

Brožek Art., Über die Variabilität und Localformen bei Palaemonetes varians Leach., aus vier verschiedenen Localitäten. 27 S., 1 Taf. und 8 Textfig. XVI.

Počta Th., Neues über Graptholiten. 9 S., 1 Taf. XV.

Studnička F. K., Exoplasma oder Metaplasma? 10 S. XXIV.

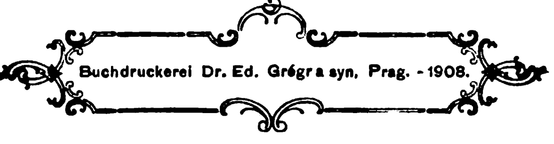
Wenig Jar., O nových smyslových orgánech slepých isopodů (Titanethes hercegowinensis Verh.). 12 str., 1 tab., 2 obr. v textu. XIII.

OBSAH.

Seznam přednášek, konaných ve schůzkách třídy mathematicko-přírodovědecké r. 1907 . . . . str. V.

INHALT.

Verzeichnis der Vorträge, welche in den Sitzungen der mathematisch - naturwissenschaftlichen Classe im J. 1907 abgehalten wurden . . . . S. V.


Buchdruckerei Dr. Ed. Grégra syn, Prag. - 1908.


3 2044 106 228 05

